Дрожжина О.В., Щеглов А.Ю.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МОДЕЛИ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается обратная коэффициентная задача для параболического уравнения. Модель изучаемого вида используется для описания функционирования иерархической структуры [1], а также весьма характерна для теории теплопередачи [2]. В данной работе устанавливается единственность решения обратной задачи. В схожих постановках выделение условий, обеспечивающих однозначность решения, привлекает значительный интерес [3-6].

Постановка задач.

Пусть функция $p(x,t)$ является решением задачи:

$$p_t=\left(k(p)p_x\right)_x+F(p),\quad (x,t)\in(0,l)\times(0,T)=Q_T, \tag{1}$$

$$p(x,0)=p_0(x)\geq 0,\ x\in[0,l], \tag{2}$$

$$p_x|_{x=0}=0,\ t\in[0,T], \tag{3}$$

$$p_x|_{x=l}=0,\ t\in[0,T], \tag{4}$$

где

$$p_0(x)\in C^3[0,\ l\ ],\ p_0^{/}(0)=p_0^{/}(l)=0, \tag{5}$$

$$k(s)\in C^2[0,S],\ k(s)\geq k_0=const>0,\ s\in[0,S],\ \forall S>0, \tag{6}$$

$$F(s)\in C^2[0,S],\ F(s)\geq 0,\ F^{/}(s)\geq 0,\ s\in[0,S],\ \forall S>0. \tag{7}$$

При ограничениях (5) – (7) решение $p(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ задачи (1) - (4), удовлетворяющее условиям Липшица по обеим переменным, существует и единственно [7]. Здесь $\overline{Q_T}$ - замыкание Q_T.

Теперь поставим обратную задачу. Пусть дано дополнительное условие

$$p(0,t)=f(t),\ f'(t)>0,\ f\in C^1[0,T]. \tag{8}$$

Требуется определить решение обратной задачи (1) – (4), (8) - функции $k(p)$, $p(x,t)$ такие, что

1) $p(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, где $Q_T=\{(x,t):0<x<l,\ 0<t<T\}$,

2) $k(p)>0,\ k(p)\in C^2[R_1,R_2]$, где $R_1=\min\limits_{\overline{Q}_T}p(x,t),\ R_2=\max\limits_{\overline{Q}_T}p(x,t)$,

3) $k(p)$ – кусочно-аналитическая,

4) $k(p)$, $p(x, t)$ удовлетворяют соотношениям (1) – (4), (8).

Свойства прямой задачи.

Лемма 1. При условии $p_0^{/}(x)<0$, $x\in(0,l)$, решение $p(x,t)$ задачи (1) – (4) удовлетворяет неравенству $p_x(x,t)\le 0$, $(x,t)\in Q_T$, причем $p_x(x,t)<0$ почти всюду в Q_T.

Доказательство. Введем функцию

$$b(p)=\int_{p_0}^{p}k(s)ds \quad .$$

Следовательно (1) преобразуется к виду $p_t=\left(b(p)\right)_{xx}+F(p)$.

Тогда для любой функции $\varphi\in C^{2,1}\left(\overline{Q_\tau}\right)$, имеющей непрерывные производные $\varphi_{xt}=\varphi_{tx}$ в Q_τ, и для любого τ, $0<\tau\le$ T выполнено соотношение:

$$0=\iint_{Q_\tau}[p_t-b(p)_{xx}-F(p)]\varphi_x dxdt=\int_0^l p\varphi_x\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx-\iint_{Q_\tau}p\varphi_{xt}dxdt-$$

$$-\int_0^\tau k(p)p_x\varphi_x\Big|_{x=0}^{x=l}dt+\iint_{Q_\tau}k(p)p_x\varphi_{xx}dxdt-\int_0^\tau F(p)\varphi\Big|_{x=0}^{x=l}dt+\iint_{Q_\tau}F'(p)p_x\varphi dxdt=$$

$$=\int_0^l p\varphi_x\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx-\int_0^\tau[p\varphi_t+F(p)\varphi]\Big|_{x=0}^{x=l}dt+\iint_{Q_\tau}p_x[\varphi_t+k(p)\varphi_{xx}+F'(p)\varphi]dxdt=$$

$$=p\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}\Big|_{x=0}^{x=l}-\int_0^l p_x\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx-p\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}\Big|_{x=0}^{x=l}+\int_0^\tau[p_t\varphi-F(p)\varphi]\Big|_{x=0}^{x=l}dt+$$

$$+\iint_{Q_\tau}p_x[\varphi_t+k(p)\varphi_{xx}+F'(p)\varphi]dxdt \quad .$$

Отсюда

$$\iint_{Q_\tau}p_x[\varphi_t+k(p)\varphi_{xx}+F'(p)\varphi]dxdt=\int_0^l p_x\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx-\int_0^\tau[(p_t-F(p))\varphi]\Big|_{x=0}^{x=l}dt \quad . \qquad (9)$$

Для доказательства леммы осталось показать, что для любой $g(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in\overline{Q_\tau}$, $g(x,t)\ne 0$, $(x,t)\in Q_\tau$, $g(x,\tau)=0$ можно выбрать $\varphi(x,t)$ таким образом, чтобы в левой части равенства (9) получился интеграл

$\iint\limits_{Q_\tau} p_x g dxdt$, а в правой части – некоторое отрицательное выражение. Пусть $\varphi(x,t)$ - решение задачи

$$\begin{aligned} &\varphi_t + k(p(x,t))\varphi_{xx} + F'(p(x,t))\varphi = g(x,t)\ ,\ 0<x<l,\ 0\le t\le \tau, \\ &\varphi(x,\tau)=0,\ \varphi(0,t)=\varphi(l,t)=0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $g(x,t)$ – произвольная, бесконечно дифференцируемая функция, $g(x,t) \ge 0$, $(x,t)\in\overline{Q_\tau}$, $g(x,t)\not\equiv 0$, $(x,t)\in Q_\tau$, $g(x,\tau)=0$.

В соответствии со строгим принципом максимума [8] $\varphi(x,t) < 0$ $(x,t)\in\overline{Q_\tau}$. Таким образом,

$$\iint\limits_{Q_\tau} p_x g dxdt = -\int\limits_0^l p_0'(x)\varphi(x,0)dx < 0,$$

так как $p_0'(x) < 0$, $x\in(0,l)$, $\varphi < 0$ в Q_τ. В силу произвольности $\tau\in(0,T]$ и $g(x,t)$ в соответствии с основной леммой вариационного исчисления получаем, что $p_x(x,t)\le 0$, $(x,t)\in Q_T$, причем $p_x(x,t)<0$ почти всюду в Q_T.

Лемма 2. При условии $(k(p_0(x))p_0'(x))' + F(p_0(x)) > 0$, $x\in[0,l]$, и условиях (7) для решения задачи (1)-(4) имеет место оценка $p_t(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in Q_T$.

Доказательство. Аналогично лемме 1 для любой $\varphi\in C^{2,1}\left(\overline{Q_\tau}\right)$ и для любого τ, $0<\tau\le \mathrm{T}$ выполнено соотношение:

$$0 = \iint\limits_{Q_\tau}[p_t - b(p)_{xx} - F(p)]\varphi_t dxdt = \iint\limits_{Q_\tau} p_t[\varphi_t + F'(p)\varphi]dxdt - k(p)p_x\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}\Big|_{x=0}^{x=l} +$$

$$+\int\limits_0^\tau (k(p)p_x)_t\varphi\Big|_{x=0}^{x=l}dt - \int\limits_0^l F(p)\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx + k(p)p_x\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l (k(p)p_x)_x\varphi\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx -$$

$$-\iint\limits_{Q_\tau} k'(p)p_t p_x\varphi_x dxdt - \int\limits_0^\tau k(p)p_t\varphi_x\Big|_{x=0}^{x=l}dt + \iint\limits_{Q_\tau} p_t(k(p)\varphi_x)_x dxdt\ .$$

Отсюда

$$\iint\limits_{Q_\tau} p_t[\varphi_t + k(p)\varphi_{xx} + F'(p)\varphi]dxdt = \int\limits_0^l (F(p)\varphi + (k(p)p_x)_x\varphi)\Big|_{t=0}^{t=\tau}dx + \tag{11}$$

$$+\int\limits_0^\tau [k(p)p_t\varphi_x]\Big|_{x=0}^{x=l}dt - \int\limits_0^\tau (k(p)p_x)_t\varphi\Big|_{x=0}^{x=l}dt\,.$$

Для доказательства леммы осталось показать, что для любой $g(x,t)\geq 0$, $(x,t)\in\overline{Q_\tau}$, $g(x,t)\neq 0$, $(x,t)\in\overline{Q_\tau}$, $g(x,\tau)=0$ можно выбрать $\varphi(x,t)$ таким образом, чтобы в левой части равенства (11) получился интеграл $\iint\limits_{Q_\tau} p_t g dxdt$, а в правой части – некоторое неотрицательное выражение.

Пусть $\varphi(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (10) *и условиям* $\varphi_x(0,t)=\varphi_x(l,t)=\varphi(x,\tau)=0$, $x\in[0,l]$, $t\in[0,\tau]$. Учитывая граничные и начальные условия для функции $\varphi(x,t)$, получаем

$$\iint\limits_{Q_\tau} p_t[\varphi_t+k(p)\varphi_{xx}+F'(p)\varphi]dxdt=$$

$$=-\int_0^l [F(p_0(x))+(k(p_0(x))(p_0(x))_x)_x]\varphi(x,0)dx>0.$$

По принципу максимума $\varphi(x,0)<0$. Таким образом, учитывая, что $\varphi(x,0)<0$,

$F(p_0(x))+(k(p_0(x))(p_0)_x)_x\geq 0$, получаем, что $p_t(x,t)\geq 0$, $(x,t)\in Q_T$.

Единственность решения обратной задачи.

Докажем, что обратная задача имеет единственное решение. Сначала докажем лемму.

Лемма 3. Пусть $\varphi(x,t)$ решение задачи

$$\begin{aligned}&\varphi_t+q(x,t)\varphi_{xx}+r(x,t)\varphi=0,\ (x,t)\in Q_\tau,\\ &\varphi_x(l,t)=0,\ \varphi_x(0,t)=\chi(t),\ \chi(t)>0,\ t\in[0,\tau),\ \chi(\tau)=0,\\ &\varphi(x,\tau)=0,\ x\in[0,l],\end{aligned}\qquad(12)$$

где $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция, $q>0$, q удовлетворяет условию Липшица по x и по t, r ограничена, $r_x\leq 0$. Тогда $\varphi_x>0$ почти всюду в $\overline{Q_\tau}$, $\varphi<0$ в Q_τ.

Доказательство. Рассмотрим задачу при $q=q_j$ $r=r_j$, где $\{q_j(x,t)\}$, $\{r_j(x,t)\}$ последовательности бесконечно дифференцируемых функций, сходящихся соответственно к $q(x,t)$ и $r(x,t)$ в $H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q_\tau})$, $0<\min\limits_{Q_\tau} q\leq q_j\leq\max\limits_{Q_\tau} q$, $\min\limits_{Q_\tau} r\leq r_j\leq\max\limits_{Q_\tau} r$.

Таким образом, пусть $\varphi^j(x,t)$ решение задачи:

$$\varphi_t^j + q_j(x,t)\varphi_{xx}^j + r_j(x,t)\varphi^j = 0,\ (x,t)\in Q_\tau,$$
$$\varphi_x^j(l,t)=0,\ \varphi_x^j(0,t)=\chi(t),\ \chi(t)>0,\ t\in[0,\tau),\ \chi(\tau)=0, \qquad (13)$$
$$\varphi^j(x,\tau)=0,\ x\in[0,l]\ .$$

Так как выполнен принцип максимума (коэффициенты ограничены *и* $q^j>0$), то, следовательно, если $\varphi^j|_{x=0}\le 0$, $\varphi^j|_{x=l}\le 0$, то и $\varphi^j\le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

При $x = l$ возможны два случая: $\varphi^j > 0$ и $\varphi^j \le 0$. Если $\varphi^j > 0$, то можно продолжить задачу четным образом на отрезок $[0,2l]$, и тогда точка $x = l$ станет внутренней точкой, и в ней будет достигаться экстремальное значение, что противоречит принципу максимума. Если $\varphi^j \le 0$, то в точке $x = 0$ возможны два случая: либо φ^j в точке $x = 0$ больше, чем φ^j в точке $x = l$, либо меньше. Если больше, то максимум модуля φ^j достигается внутри $[\,0,\ \tau\,]$x$[\,0,\ 2l\,]$, и это противоречит принципу максимума. Если меньше, то, следовательно, $\varphi^j \le 0$ в Q_τ. Таким образом, $\varphi^j(x,t)\le 0$ в $\overline{Q_\tau}$.

Аналогично [5] $\varphi^j\to\varphi$ при $j\to\infty$ *в* $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ и, таким образом, $\varphi(x,t)\le 0$в $\overline{Q_\tau}$.

Продифференцируем уравнение (13) по x:

$$(\varphi_x^j)_t + q_j(\varphi_x^j)_{xx} + (q_j)_x(\varphi_x^j)_x + r_j\varphi_x^j = -(r_j)_x\varphi \equiv f,\ (x,t)\in Q_\tau,$$
$$\varphi_x^j(l,t)=0,\ \varphi_x^j(0,t)=\chi(t),\ \chi(t)>0,\ t\in[0,\tau),\ \chi(\tau)=0,$$
$$\varphi_x^j(x,\tau)=0\ ,\ x\in[0,l].$$

Так как $\chi(t)>0$ и $f\le 0$, то по принципу максимума (если коэффициенты и правая часть ограничены, $q_j>0$ и $\varphi_x^j|_{x=0}\ge 0$, $\varphi_x^j|_{x=l}\ge 0$, то $\varphi_x^j\ge 0$ *в* $\overline{Q_\tau}$) $\varphi_x^j(x,t)\ge 0$ *в* $\overline{Q_\tau}$.

Также, как и раньше, доказывается, что $\varphi_x^j\to\varphi_x$.Таким образом, $\varphi_x\ge 0$ *в* $\overline{Q_\tau}$.

Пусть существует область G $\in\overline{Q_\tau}$: $\varphi_x\equiv 0$.Следовательно, φ = c = const в G. Из этого следует, что существует область П = $\{(x,\ t)$: $0\le x_1\le x\le x_2\le l,\ 0\le t_1\le t\le t_2\le\tau\}$, П $\subset$ G и $\varphi(x,\ t)$ является решением задачи:

$$\varphi_t + q\varphi_{xx} + r\varphi = 0\ ,\ 0<x<x_2\ ,\ t_1\le t\le t_2\ ,$$
$$\varphi(x_2,t)=c\ ,\ \varphi_x(x_2,t)=0\ .$$

Следовательно, $\varphi(x,t) \equiv c$ при $0 \le x \le x_2$, $t_1 \le t \le t_2$.

Получим, что $\varphi_x(0,t) = 0$. Это противоречит условиям леммы. То есть $\varphi_x > 0$ почти всюду в $\overline{Q_\tau}$.

Пусть существует точка $(x_0,t_0) \in \overline{Q_\tau}$: $\varphi(x_0,t_0) = 0$. Так как $\varphi_x \ge 0$, то $\varphi(0,t_0) \le 0$ *и так как* $\varphi_t(0,t) \ge 0$ (аналогично решению задачи с прямым направлением времени по лемме 2), то $\varphi(0,t) = 0$, $t_0 \le t \le \tau$. Тогда из того, что $\varphi_x(l,t) = 0$, $\varphi(l,t) = 0$ следует, что $\varphi(x,t) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, $t_0 \le t \le \tau$.

Получили противоречие с условиями леммы. Следовательно, $\varphi < 0$ в $\overline{Q_\tau}$. Лемма 3 доказана.

<u>Теорема.</u> Если *F(p)* удовлетворяет условиям (7) и соотношениям $[k(p_0(x))p_0'(x)]' + F(p_0(x)) > 0$, $x \in [0,l]$, $F''(p) \ge 0$, $p \in [0,s]$, $\forall s > 0$, то решение обратной задачи (1) – (5) единственно.

<u>Доказательство</u>. Для любой $\varphi \in C^{2,1}(\overline{Q_\tau})$ и для любого τ, $0 < \tau \le T$, выполнено соотношение:

$$\iint_{Q_\tau} F(p)\varphi dxdt = \iint_{Q_\tau} \left[p_t - b(p)_{xx}\right]\varphi dxdt = \int_0^l \left[p(x,\tau)\varphi(x,\tau) - p_0\varphi(x,0)\right]dx -$$

$$-\int_0^\tau [b(p(0,t))\varphi_x(0,t) - b(f(t))\varphi_x(l,t)]dt - \iint_{Q_\tau} \left[p\varphi_t + b(p)\varphi_{xx}\right]dxdt \quad .$$

Предположим, что существуют два решения:

$\{k_1(p_1), p_1\}$ *и* $\{k_2(p_2), p_2\}$.

Тогда справедливо:

$$\iint_{Q_\tau} \{(p_1 - p_2)\varphi_t + [b_1(p_1) - b_2(p_2)]\varphi_{xx}\} dxdt = \int_0^l [p_1(x,\tau) - p_2(x,\tau)]\varphi(x,\tau)dx +$$

$$+\int_0^\tau \{[b_1(f(t)) - b_2(f(t))]\varphi_x(l,t) - [b_1(p_1(0,t)) - b_2(p_2(0,t))]\varphi_x(0,t)\} dt +$$

$$+\iint_{Q_\tau} [F(p_2) - F(p_1)]\varphi dxdt \quad .$$

Следовательно, для функции *φ(x, t)*, удовлетворяющей условиям

$\varphi(x,\tau) = 0$, $\varphi_x(l,t) = 0$, $\varphi_x(0,t) = \chi(t)$, $\chi(t) > 0$, $t < \tau$, $\chi(\tau) = 0$,

получим

$$\iint\limits_{Q_\tau}\left\{(p_1-p_2)\varphi_t+\left[b_1(p_1)-b_1(p_2)\right]\varphi_{xx}+\left[F(p_1)-F(p_2)\right]\varphi\right\}dxdt=$$

$$=\iint\limits_{Q_\tau}\left[k_1(p_2)-k_2(p_2)\right](p_2)_x\varphi_x dxdt\ .$$

Введем функции:

$$q(x,t)=\int\limits_0^1 k_1(p_2(x,t)+\theta(p_1(x,t)-p_2(x,t)))d\theta>0\ ,$$

$$r(x,t)=\int\limits_0^1 F'(p_2(x,t)+\theta(p_1(x,t)-p_2(x,t)))d\theta\ .$$

Получим

$$\iint\limits_{Q_\tau}\{\varphi_t+q\varphi_{xx}+r\varphi\}(p_1-p_2)dxdt=\iint\limits_{Q_\tau}\left[k_1(p_2)-k_2(p_2)\right](p_2)_x\varphi_x dxdt\ .$$

Покажем, что $q(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x и по t. Для любых точек (x_1,t) и (x_2,t) имеем равенство

$$|q(x_2,t)-q(x_1,t)|\le\|k_1'\|_{C[a_0,b]}\max\{\|(p_1)_x\|_{C(\overline{Q_T})}\ ,\ \|(p_2)_x\|_{C(\overline{Q_T})}\}\,|x_2-x_1|\,,$$

где $a_0=p_0(0)$, $b=\max\{p_1(0,T),p_2(0,T)\}$.

Аналогично проводится доказательство в отношении условия Липшица по переменной t.

Функция r ограничена, так как F удовлетворяет условию Липшица. Покажем что функция $r_x\le 0$:

$$r_x=\int\limits_0^1 F''(p_2+\theta(p_1-p_2))[\theta(p_1)_x+(1-\theta)(p_2)_x]d\theta\le 0\ ,$$

так как $F''(s)\ge 0$ и $(p_1)_x\le 0$, $(p_2)_x\le 0$.

Поэтому можем выбирать $\varphi(x,t)$, удовлетворяющую условиям леммы 3. Таким образом, получим

$$I_\tau\equiv\iint\limits_{Q_\tau}[k_1(p_2)-k_2(p_2)](p_2)_x\varphi_x dxdt=0\,. \qquad (14)$$

Так как $k_1(p)\not\equiv k_2(p)$, то предположим, для определенности, что $k_1(p)\ge k_2(p)$при $p\in[a_0,p_1]$, и тогда в соответствии с леммой 2 существуют ε, $\varepsilon_1>0$ такие, что $k_1(p)-k_2(p)>\varepsilon_1$ при $p_1\le p\le p_1-\varepsilon$. Если взять τ как решение уравнения $p(x,\tau)=p_1-\varepsilon$, то $k_1(p)-k_2(p)>\varepsilon_1$ в $\overline{Q_\tau}$, а так как

$\varphi_x > 0$, $(p_2)_x < 0$, то $I_\tau < 0$. Получили противоречие с (14). Следовательно, $k_1(p) = k_2(p)$ и $p_1 = p_2$. Теорема доказана.

Литература

1. Михайлов А. П. Математическое моделирование динамики распределения власти в иерархических структурах // Математическое моделирование. 1994. т.6, №6. С. 108-138.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.
3. Muzylev N. V. Uniqueness theorems for some converse problems of heat conduction // J. Comput. Math. Phys. 1980. Vol. 20, no. 2. P. 120-134.
4. Lorenzi A. An inverse problem for a semilinear parabolic equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1982. Ser. 4, V. 131, P. 145-166.
5. Shcheglov A. Yu. On the inverse problem for the quasilinear equation of thermal conductivity // Moscow University Comput. Math. and Cybern. 1987. №2. P. 8-11.
6. Cannon J.R., DuChateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation // J. Inv. problem. 1998. Vol.14, no.3. P.535-551.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
8. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.