

## Математическое моделирование теллурического поля в окрестности протяженных проводников

### Введение

Расширение множества технологических систем на поверхности Земли приводит, очевидно, к увеличению количества зон повышенной электропроводности, в которых концентрируются теллурические токи, возникающие в результате вариаций геомагнитного поля. Одними из наиболее крупномасштабных являются системы, образуемые протяженными металлическими нефтепроводами или газопроводами, находящимися на небольшой глубине от земной поверхности. Известно, что под влиянием теллурических токов могут существенно усиливаться электрохимические процессы в металлических трубопроводах, контактирующих с окружающей средой, приводящие к повреждениям этих объектов в результате коррозии. Это приводит к выходу в окружающую среду находящихся в них углеводородов и является причиной экологических нарушений и катастроф. Факты таких проявлений взаимодействия указанных систем с геомагнитным полем приводят к необходимости теоретического изучения, на основе математического моделирования, поведения поля в окрестности трубопроводов, которые могут рассматриваться с точки зрения электродинамики, как протяженные проводники с электропроводностью, на несколько порядков превышающей электропроводность окружающей неоднородной среды, и находящиеся в области действия внешних электромагнитных полей (геомагнитных возмущений). Расчет значений электромагнитного поля в окрестности таких проводников позволит определять расположение опасных зон и условия их возникновения. Таким образом математическое моделирование может решать практическую задачу контроля и прогнозирования ситуаций экологического риска.

Актуальность теоретического решения указанных проблем подтверждается значительным количеством работ по численному моделированию в данной области. Интерес к теоретическим расчетам электромагнитных полей для протяженных проводников проявился еще в конце XIX века, когда получили распространение телеграфные и телефонные линии и стало наблюдаться влияние на их функционирование геомагнитных возмущений. По мере развития технологических систем для передачи энергоносителей усложняются и теоретические проблемы моделирования электромагнитных полей.

Для ситуаций, когда влиянием проводимости среды вокруг трубопроводов на распределение токов в них можно пренебречь, исследователи из Канады и Финляндии [1,2,3] построили удобную для практических расчетов методику моделирования токов в технологических системах, параллельно при этом развивая теоретические исследования, связанные с учетом трехмерной структуры и изменений во времени источника (в магнитосфере и ионосфере). Как показывают наблюдения и стимулируемые ими теоретические исследования, необходим более детальный анализ и учет многих факторов. Так например, большие реальные контрасты неоднородностей проводимости приводят к сильным возмущениям теллурических токов [4,5] и, следовательно, моделирование их для подобных случаев необходимо для получения полной картины распределения поля в окрестности рассматриваемых проводников.

Основы теории и методы расчета электромагнитного поля для цилиндрических пустотелых проводников и влияние блуждающих токов

(теллурических токов искусственного происхождения) на подземные трубопроводы, рассмотренные как прямолинейные бесконечно протяженные проводники, впервые были построены в работе [6].

В настоящей работе предложена методика моделирования теллурического поля в присутствии протяженных металлических трубопроводов произвольной конечной длины, позволяющая учитывать неоднородности электропроводности как самого проводника, так и изолирующего покрытия. При этом, окружающая среда рассматривается как слоистая с имеющими место в действительности трехмерными неоднородностями, которые могут пересекать нефтепроводы и газопроводы, а внешнее теллурическое поле может быть заданным в соответствии с информацией о его реальном распределении.

### Математическая модель и методика численного моделирования

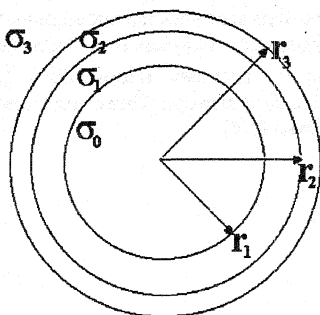


Рис. 1.

Остановимся на моделировании электромагнитного поля вблизи прямолинейных участков трубопроводов. Рассмотрим полый цилиндрический металлический (с электропроводностью порядка  $10^7$  См/м) проводник конечной длины  $L$  с внутренним радиусом сечения  $r_1$  и внешним радиусом -  $r_2$  (поперечное сечение трубопровода показано на рис.1), считая  $r_2 - r_1 \ll r_1$ , что будет использовано далее для перехода от цилиндрического слоя ( $\sigma_1 \sim 10^7$  См/м) конечной толщины к пленке. Снаружи (включая концы, при  $z=z_1, z=z_2$ ) проводник окружен тонким слоем материала ( $r_2 < r < r_3$ ) с очень низкой электропроводностью ( $\sigma_2 \sim 10^8$  См/м). Полость цилиндра будем считать идеальным изолятором

( $\sigma_0=0$ ) Проводник расположен на некоторой глубине в земле, т.е. - в неоднородной среде, в общем случае, с электропроводностью  $\sigma_3$ , не превышающей  $10^2$  См/м. Пренебрегая индукцией Фарадея в изучаемых проводниках от геомагнитных вариаций, вследствие их медленного изменения, будем рассматривать фоновое теллурическое поле (поле в однородно-слоистой среде без данных проводников искусственного происхождения, а также без неоднородностей самой среды) как внешнее электрическое поле, постоянное по времени. В этом случае поведение полного теллурического поля (в присутствии рассматриваемых проводников) можно описать уравнением неразрывности для плотности тока, которое естественно представлять в цилиндрических координатах (обозначим их:  $r, \varphi, z$ ):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rj_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

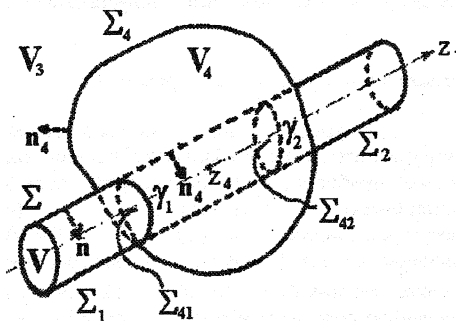
де  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla u$ ,  $u$  электрический скалярный потенциал, который, следовательно, является решением уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

и должен удовлетворять условиям на границе полости и на бесконечности соответственно:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad u \rightarrow u_e, \quad (3)$$

где  $u_e$  потенциал заданного внешнего электрического поля. Таким образом, имеем трехмерную внешнюю краевую задачу (2,3). Используя описанные геометрические особенности задачи и соотношения параметров, эту трехмерную задачу сведем к аппроксимирующей ее двумерной.



Обозначим  $u_1$  и  $u_3$  соответственно потенциал в металле (аппроксимируя его средним значением или, другими словами, - считая его постоянным по толщине стенки цилиндрического проводника) и потенциал в окружающей среде (в земле) на внешней поверхности  $\Sigma$  (см. рис.2) изолятора. Тогда получаем аналогично [7]:

Рис. 2.

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial u}{\partial r} &\approx \sigma [H(r-r_2) - H(r-r_3)] \frac{u_3 - u_1}{d}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \sigma [H(r-r_2) - H(r-r_3)] \frac{u_3 - u_1}{d} \right\} &= \\ = \sigma_2 \frac{u_3 - u_1}{d} \{ H(r-r_2) - H(r-r_3) + r [\delta(r-r_2) - \delta(r-r_3)] \}, \end{aligned}$$

где  $r_1 < r < r_3$ ,  $d = r_3 - r_1$ ,  $\sigma_2$  - электропроводность слоя изолятора,  $H(t) = \{0$  при  $t < 0$ ,  $1$  при  $t > 0\}$  - функция Хевисайда,  $\delta(t)$  -  $\delta$ -функция Дирака. Отсюда, после интегрирования уравнения (2), предварительно умноженного на  $r$ , по толщине слоя металла (т.е. в пределах  $r_1 < r < r_2$ ), получаем уравнение

$$\frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( S \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( S \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) - \frac{u_1}{R} = -\frac{u_3}{R}, \quad (4)$$

где  $S = \sigma_1(r_2 - r_1)$ , - интегральная проводимость металла,  $\sigma_1$  - электропроводность металла,  $R = d/\sigma_2$ , - интегральное сопротивление слоя изолятора.

Из непрерывности нормальной компоненты плотности тока на внешней стороне слоя изолятора (поверхность  $\Sigma$  на рис. 2) имеем:

$$\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \approx \sigma_2 \frac{(u_1 - u_3)}{d} = \frac{u_1 - u_3}{R},$$

где  $u_2$  - потенциал в слое изолятора,  $\mathbf{n}$  - внешняя нормаль по отношению к области вне цилиндра (рис. 2). Отсюда получаем граничное условие

$$u_1 = u_3 + R\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial n}, \quad (5)$$

где в левой части равенства - значения потенциала  $u_1$  на пленке ( $r=r_2$  при  $z_1 < z < z_2$  или  $z = z_1, z_2$  при  $0 \leq r \leq r_2$ ), в правой же части значения потенциала в окружающей среде ( $u_3$ ) берутся на поверхности слоя изолятора ( $r=r_3$  при  $z_1 - d < z < z_2 + d$  или  $z = z_1 - d, z_2 + d$  при  $0 \leq r \leq r_2$ ).

Обозначим:  $V$  - цилиндрическую область, ограниченную внешней поверхностью слоя изолятора  $\Sigma$  (рис.2);  $V_3$  - внешнюю область (где электропроводность равна  $\sigma_3$ ) относительно  $V$ ;  $V_4$  - область трехмерной неоднородности ( $V_4 - V_4 \cap V \subset V_3$ ) с поверхностью  $\Sigma_4$  (электропроводность в области  $V_4 - V_4 \cap V$   $\sigma_4 \neq \sigma_3$ );  $z_4$  - некоторая точка внутри области  $V_4 \cap V$ ;  $\Sigma_1$  - часть поверхности  $\Sigma - \Sigma \cap V_4$  при  $z < z_4$ ;  $\Sigma_2$  - часть поверхности  $\Sigma - \Sigma \cap V_4$  при  $z > z_4$ ;  $\Sigma_{41} = -\Sigma_4 \cap V$  при  $z < z_4$ ;  $\gamma_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma_4$ ;  $\gamma_2 = \Sigma_2 \cap \Sigma_4$ ;  $\mathbf{n}$  - внешняя нормаль на поверхности  $\Sigma$  для области  $V_3$ ;  $\mathbf{n}_4$  - внешняя нормаль для области  $V_4 - V_4 \cap V$  на ее поверхности. Поскольку в области  $V_3$  потенциал является решением уравнения  $\text{div}(\sigma \text{ grad } u) = 0$ , для аномальной части потенциала  $u_{3a} = u_3 - u_e$  имеет место следующее интегральное представление [8]

$$u_{3a}(M) = \gamma \iint_{\Sigma_\lambda} \left[ G(M, P) \frac{\partial u_{3a}(P)}{\partial n} - u_{3a}(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} \right] d\Sigma \quad (6)$$

где  $\gamma=1$  соответствует ситуации, когда точка  $M$  расположена вне границы  $\Sigma_\lambda$  области внешней среды,  $\gamma=2$  соответствует ситуации, когда  $M$  и  $P$  принадлежат поверхности  $\Sigma_\lambda$ , по которой производится интегрирование;  $\lambda=\alpha$  соответствует случаю отсутствия трехмерной неоднородности (область  $V_4$ ), т.е.  $\sigma_4 = \sigma_3$ , и  $\Sigma_\lambda = \Sigma$ ,  $\lambda=\beta$  соответствует случаю наличия неоднородности, т.е. в области  $V_4 - V_4 \cap V$   $\sigma_4 \neq \sigma_3$ , и  $\Sigma_\lambda = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_4 - \Sigma_{41} - \Sigma_{42}$ ;  $G(M, P)$  функция Грина, которая равна  $1/4\pi R_{MP}$  в случае однородного пространства (вне поверхности  $\Sigma_\lambda$ ) и  $1/4\pi(1/R_{MP} - 1/R_{QP})$  для нижнего проводящего полупространства (земля), когда верхнее полупространство (воздух) имеет нулевую электропроводность,

$$R_{MP} = [(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2]^{1/2},$$

$$R_{QP} = [(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2]^{1/2}, \quad x_Q = x_M, \quad y_Q = y_M, \quad z_Q = -z_M.$$

Для случая произвольного конечного числа однородных горизонтальных слоев вывод представления функции Грина приведен, например, в работе [9].

Используя условие (5), подстановкой выражения для нормальной производной в интегральное представление (6), получаем интегральное уравнение на поверхности  $\Sigma_\lambda$  рассматриваемого цилиндрического тела, которое вместе с двумерным эллиптическим уравнением (4) дает систему для описания поля на поверхности изолирующего слоя и внутри проводника. Для численного решения этой системы предлагается алгоритм на основе метода разделения области [10] (метод альтернирования по подобластям [11]), который можно рассматривать как частный случай решения в неограниченной области общей системы уравнений Максвелла с использованием сходного альтернирующего метода Шварца [12]. Алгоритм численного решения данной системы складывается из двух частей: решение дифференциального уравнения на цилиндрической пленке (например, методом конечных элементов) и альтернирующий итерационный процесс, дающий согласованное решение дифференциального и интегрального уравнений.

Рассмотрим сначала первый вариант, когда окружающая среда регулярна ( $\lambda = \alpha$ ), т.е. не содержит трехмерных неоднородностей электропроводности. Строится следующий итерационный процесс:

$$\frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( S \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( S \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial z} \right) - \frac{u_1^{(k)}}{R} = -\frac{u_3^{(k)}}{R},$$

$$u_3^{(k)} = u_e + u_{3a}^{(k)}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_{3a}^{(k+1/2)}}{\partial n} = \frac{\partial u_{3a}^{(k)}}{\partial n} + \tau \left( \frac{u_1^{(k)} - u_{3a}^{(k)}}{R\sigma_3} - \frac{\partial u_{3a}^{(k)}}{\partial n} \right), \quad \text{на } \Sigma\alpha,$$

$$u_{3a}^{(k+1)}(M) = 2 \iint_{\Sigma\alpha} \left[ G(M,P) \frac{\partial u_{3a}^{(k+1/2)}(P)}{\partial n} - u_{3a}^{(k)}(P) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n} \right] d\Sigma$$

где  $k=1,2,\dots$ ,  $0 < \tau \leq 1$  - параметр, определяющий сходимость итерационного процесса и его скорость [10,11].

Для случая присутствия трехмерной неоднородности, занимающей область  $V_4$  (рис. 2), используя условия сопряжения на поверхности  $\Sigma_4 - \Sigma_{41} - \Sigma_{42}$ , можно построить итерационный процесс решения системы и в данной более общей ситуации следующим образом

$$\frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( S \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( S \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial z} \right) - \frac{u_1^{(k)}}{R} = -\frac{u_3^{(k)}}{R},$$

$$u_3^{(k)} = u_e + u_{3a}^{(k)},$$

$$\frac{\partial u_{3a}^{(k+1/2)}}{\partial n} = \frac{\partial u_{3a}^{(k)}}{\partial n} + \tau_1 \left( \frac{u_1^{(k)} - u_{3a}^{(k)}}{R\sigma_3} - \frac{\partial u_{3a}^{(k)}}{\partial n} \right) \quad \text{на } \Sigma_1 \text{ и } \Sigma_2.$$

$$u_{3a}^{(k+1)}(M) = 2 \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_1} [G(M,P) \frac{\partial u_{3a}^{(k+1/2)}(P)}{\partial n} - u_{3a}^{(k)}(P) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n}] d\Sigma +$$

$$+ 2 \iint_{\Sigma_4 - \Sigma_{41} - \Sigma_{42}} [G(M,P) \frac{\partial u_{3a}^{(k)}(P)}{\partial n} - u_{3a}^{(k)}(P) \frac{\partial G(M,P)}{\partial n}] d\Sigma \quad (8)$$

$$u_4^{(k)} = u_e + u_{4a}^{(k)}.$$

$$\frac{\partial u_{4a}^{(k+1/2)}}{\partial n} = \frac{\partial u_{4a}^{(k)}}{\partial n} + \tau_2 \left( \frac{u_1^{(k)} - u_{4a}^{(k)}}{R\sigma_4} - \frac{\partial u_{4a}^{(k)}}{\partial n} \right) \quad \text{на } \Sigma - \Sigma_1 - \Sigma_2,$$

$$u_{4a}^{(k+1)}(M) =$$

$$= 2 \iint_{\Sigma - \Sigma_1 - \Sigma_2} [G_4(M,P) \frac{\partial u_{4a}^{(k+1/2)}(P)}{\partial n_4} - u_{4a}^{(k)}(P) \frac{\partial G_4(M,P)}{\partial n_4}] d\Sigma +$$

$$+ 2 \iint_{\Sigma_4 - \Sigma_{41} - \Sigma_{42}} [G_4(M,P) \frac{\sigma_3}{\sigma_4} \frac{\partial u_{3a}^{(k)}(P)}{\partial n_4} - u_{3a}^{(k)}(P) \frac{\partial G_4(M,P)}{\partial n_4}] d\Sigma,$$

где  $G_4 = 1/4\pi R_{MP}$  - в области  $V_4 - V_4 \cap V$ , которую для начальных практических расчетов можно считать однородной; значения нормальной производной  $\partial u_{3a} / \partial n_4$  получаются при помощи интегрального представления (6) при  $\gamma=1$ .

Очевидно, алгоритм (8) позволяет осуществлять численное моделирование электрического поля, учитывая все факторы, указанные выше, за счет того, что параметры ( $S$ ,  $R$ ,  $\sigma$  и  $u_e$ ) модели являются переменными величинами, т.е.  $S=S(\varphi, z)$ ,  $R=R(\varphi, z)$ ,  $\sigma=\sigma(r, \varphi, z)$ ,  $u_e = u_e(r, \varphi, z)$ . Большая протяженность реального трубопровода, - проводника с электропроводностью в миллиарды раз превышающей электропроводность окружающей среды, создает определенные проблемы при практических расчетах, с другой стороны эти особенности позволяют упростить расчеты без потери точности при компьютерной реализации. Так например, в случаях когда задача ставится без учета неоднородности внешнего поля, такая возможность реализуется за счет соответствующего разбиения области решения на конечные элементы (имея ввиду, что для решения двумерного дифференциального уравнения (4) используется метод конечных элементов), используя протяженные участки, где параметры модели не меняются. Также можно использовать слабую или пренебрежимо малую зависимость от  $\varphi$  в определенных ситуациях.

Естественным представляется развитие описанной методики с целью рассмотрения влияния реальных вариантов конфигурации как одного трубопровода, так и системы трубопроводов. В предложенной методике прослеживаются возможности для моделирования и таких ситуаций.

### Пример численного моделирования

С целью проиллюстрировать численное моделирование посредством описанного выше алгоритма, а также для сравнения с результатами, полученными с помощью упомянутой во введении методики [1-3], рассмотрим простейший случай модели трубопровода, окружающей среды и внешнего поля.

Пусть  $R = \text{const}$ ,  $S = \text{const}$ ,  $\sigma_3 = \text{const}$  и внешнее однородное электрическое поле  $E_0$  направлено вдоль проводника, так что можно положить  $u_e = -E_0 z$ . Поскольку в [1-3] на концах (при  $z = z_1, z_2$ ) трубопровода электрическое поле полагается нулевым, зададим такое же условие.

При этих условиях система (4 - 5) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dz^2} &= \kappa^2 u_1 - \kappa^2 u_3, \\ u_1|_{r=r_2} &= (u_3 - R\sigma_3 \frac{\partial u_3}{\partial r})|_{r=r_3}, \quad z_1 < z < z_2, \\ u_{3a} &= u_3 - u_e, \\ \frac{du_1}{dz}|_{z_1} &= \frac{du_1}{dz}|_{z_2} = 0, \\ u_{3a}(M) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u_{3a}(P)}{\partial n} - u_{3a}(P) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{MP}} \right] d\Sigma \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\kappa^2 = 1/RS$  и  $z_1 = 0, z_2 = L$ .

Решение дифференциального уравнения системы (9) представляется в виде:

$$u_1(z) = \frac{\kappa e^{-\kappa z}}{2} \int_0^z u_3(\zeta) e^{\kappa \zeta} d\zeta - \frac{\kappa e^{\kappa z}}{2} \int_0^z u_3(\zeta) e^{-\kappa \zeta} d\zeta + C(e^{\kappa z} + e^{-\kappa z}), \quad (10)$$

где

$$C = -E_0 \frac{e^{\kappa L} + e^{-\kappa L} - 2}{2\kappa(e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})}. \quad (11)$$

Согласно [1-3]  $u_3 = u_e$ , отсюда и из (10,11) получаем для потенциала и электрического поля в трубопроводе по этой методике:

$$\begin{aligned} u_1 &= E_0 \left( \frac{e^{\kappa z} - e^{-\kappa z}}{2\kappa} - z \right) - E_0 \frac{e^{\kappa L} + e^{-\kappa L} - 2}{2\kappa(e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})} (e^{\kappa z} + e^{-\kappa z}), \\ E &= E_0 \left[ 1 - \frac{e^{\kappa z} + e^{-\kappa z}}{2} + \frac{e^{\kappa L} + e^{-\kappa L} - 2}{2\kappa(e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})} (e^{\kappa z} - e^{-\kappa z}) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

Для проводника длиной 300 км рассчитанное по формуле (12) электрическое поле при  $E_0=1$  показано на рис. 3 пунктирной кривой.

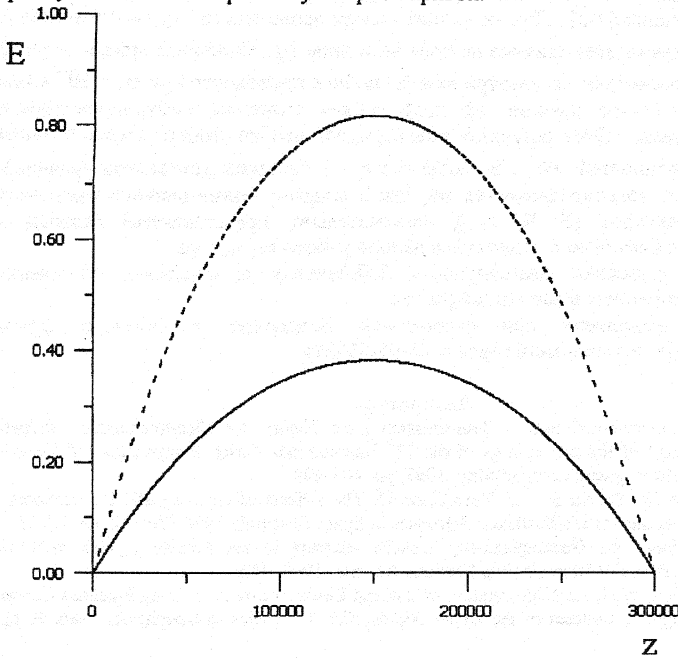


Рис. 3. По вертикали отложены значения электрического поля в В/м, по горизонтали - расстояние в метрах. Кривая, изображенная пунктиром - для  $\sigma_3 > 10^{-2}$  С/м, сплошная кривая -  $\sigma_3 = 10^{-4}$  С/м.

Алгоритм решения системы (9), предложенный в данной работе, для данных параметров модели выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial u_{3a}^{(k+1/2)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3} = \frac{\partial u_{3a}^{(k)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3} + \tau \left( \frac{u_{3a}^{(k)} \Big|_{r=r_3} - u_1^{(k)} \Big|_{r=r_2}}{R\sigma_3} - \frac{\partial u_{3a}^{(k)}}{\partial r} \Big|_{r=r_3} \right)$$

при  $z_1 < z < z_2$ ,

$$u_{3a}^{(k)} = u_3^{(k)} - u_e^{(k)},$$

$$u_{3a}^{(k+1)}(M) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u_{3a}^{(k+1/2)}(P)}{\partial r} - u_{3a}^{(k)}(P) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R_{MP}} \right] d\Sigma,$$

где  $z_1 < z < z_2$ ,  $u^{(k)}_1$  вычисляется по формуле (10);  $M, P \in \Sigma$ . Результаты



моделирования с помощью данного алгоритма показывают, что при  $\sigma_3 \geq 10^{-2}$  См/м электрическое поле (пунктирная кривая по данным результатам сливается с пунктирной кривой, посчитанной по формуле (12)) практически совпадает с тем, что получено по методике [1-3]. При значениях электропроводности окружающей среды, меньших  $10^{-2}$ , начинается влияние на поле величины  $\sigma_3$ . Сплошная кривая на рис.3 соответствует рассчитанному электрическому полю в проводнике при  $\sigma_3 = 10^{-4}$  См/м и показывает сильное влияние на поле уровня значений электропроводности окружающей среды. Этот результат подтверждает необходимость моделирования случаев неоднородностей  $\sigma_3$ , в особенности, - с большим контрастом значений. Такое численное моделирование так же, как и моделирование влияния изменений остальных параметров ( $S$ ,  $R$ ,  $u_e$ ), следовательно, представляется важным и осуществимым с помощью описанного в данной работе алгоритма.

Авторы выражают благодарность Л.Л.Ваньяну за полезные обсуждения проблем, рассмотренных в настоящей работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-05-65022).

### Литература

1. Boteler D. Distributed Source Transmission Line Theory for Electromagnetic Induction Studies // Supplement of the proceedings of the 12<sup>th</sup> International Zurich Symposium and Technical Exhibition on Electromagnetic Compatibility, 1997, pp. 401-408.
2. Boteler D., Pirjola R. and Nevanlinna H. The Effects of Geomagnetic Disturbances on Electrical Systems at the Earth's Surface // Advances in Space Research. 1998, Vol. 22, pp. 17-27.
3. Pulkkinen, A., Geomagnetically induced currents in the Finnish pipeline network // Publications of the Finnish Meteorological Institute. Reports, 1999, 46 p.
4. Campbell, W.H. An Interpretation of Induced Electric currents in Long Pipelines Caused by Natural Geomagnetic Sources of the Upper Atmosphere // Surveys in Geophysics, 1986, 8, pp. 239-259
5. Osella, A., Favetto, A. Effects of soil resistivity on currents induced on pipelines // J. Appl. Geophys. 2000, 44, 303-312.
6. Стрижевский И.В., Дмитриев В.И. Теория и расчет влияния электрифицированной железной дороги на подземные металлические сооружения // М., Стройиздат, 1967, 248 с.
7. Егоров И.В. Численное моделирование теллурических полей в многослойной сферической модели Земли // Физика Земли, 1998, № 3, с. 62-68.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 724 с.
9. Хмельской В.К. Электроразведка // М.: Изд-во МГУ, 1984, 422 с.
10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики // М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1989. 608 с.
11. Мацокин А.М. Связь метода окаймления с методом фиктивных компонент и методом альтернирования по подобластям // Сб. Дифференциальные уравнения с частными производными, Новосибирск: Наука, 1986, с. 138-142.
12. Yegorov I.V. Modeling the Electromagnetic Field in a Neighbourhood of an Arbitrary Inhomogeneous 3D Body // The Second International Symposium on Three-Dimensional Electromagnetics. USA, 1999, pp. 37-40.