

Т. Г. Елизарова, А. В. Жериков, И. С. Калачинская

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

1 Введение

В работах [1], [2] и [3] описана реализация алгоритмов численного решения квазигидродинамических (КГД) уравнений для вязкой несжимаемой жидкости. Показана эффективность и точность реализованных алгоритмов для целого ряда задач: расчет плоских и осесимметричных течений, колебательных режимов, трехмерных течений в каверне и течений за уступом. Алгоритмы были адаптированы на кластерные вычислительные системы для сокращения времени расчета течений.

Разработанные алгоритмы были реализованы на ортогональных пространственных сетках (декартовая, цилиндрическая, сферическая и др.). Это накладывало серьезные ограничения на класс решаемых задач – рассматривались внешние и внутренние течения в простых геометриях.

В данной работе предложенные ранее алгоритмы расчета течений обобщаются на случай неструктурированных пространственных сеток. Это позволяет расширить круг решаемых задач за счет уменьшения требований к геометрии расчетной области. Для построения предлагаемого алгоритма были использованы подходы, предложенные в [4] и [5] для расчета течений вязкого сжимаемого газа на неструктурированных сетках.

2 Алгоритм решения КГД уравнений на неструктурированных сетках

2.1. Сетка и построение контрольного объема

Построим в расчетной области неструктурированную треугольную сетку таким образом, чтобы граница области была аппроксимирована прямоугольными треугольниками (обоснование выбранного вида аппроксимации приведено в разделе Аппроксимация граничных условий).

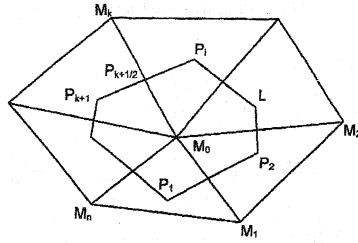


Рис. 2.1

Обозначим совокупность узлов сетки через $M = \{M_i \in R^2, i = 1 \dots n\}$. Таким образом, сетку можно представить как систему треугольников с вершинами M_i . Пусть величины \bar{y}, p, T заданы в узлах сетки M_i . Для построения разностной схемы будем использовать метод конечного объема, при этом разностная аппроксимация уравнений строится на основе приближенного интегрирования уравнений по некоторому объему, который называется контрольным.

Для каждого узла M_i треугольной сетки строится контур L (см. рис. 2.1), состоящий из точек P_k – точек пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам граней соседних треугольников, содержащих данный узел. Обозначим число узлов контура L через K (т.к. расчетная сетка является нерегулярной, то число K не фиксировано). Область, ограниченная этим контуром, представляет собой расчетную ячейку – контрольный объем. А соседние узлы образуют шаблон точки M_0 , на котором производится аппроксимация уравнений.

Для построения контрольного объема оказывается удобным использовать сетки, удовлетворяющие принципу триангуляции Делоне (исключением является аппроксимация границы, где этот принцип не удовлетворяется). В таких сетках треугольники построены так, что в круг, описанный около треугольника, не попадает ни одного узла, отличного от вершин указанного треугольника.

Значение величины f в точках P_k вычисляется по формуле:

$$f_{P_k} = \alpha_1 f_{M_0} + \alpha_2 f_{M_k} + \alpha_3 f_{M_{k+1}}, \quad (2.1.1)$$

где коэффициенты α_1, α_2 и α_3 удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x_{P_k} = \alpha_1 x_{M_0} + \alpha_2 x_{M_k} + \alpha_3 x_{M_{k+1}} \\ y_{P_k} = \alpha_1 y_{M_0} + \alpha_2 y_{M_k} + \alpha_3 y_{M_{k+1}} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

2.2. Аппроксимация КГД уравнений

Запишем систему КГД уравнений в декартовых координатах (x, y) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y}, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi_{xx}^{NS})}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi_{yx}^{NS})}{\partial y} + \\ + 2 \frac{\partial(u_x \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_y \omega_x)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial(u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial(\Pi_{yy}^{NS})}{\partial y} + \frac{\partial(\Pi_{xy}^{NS})}{\partial x} + \\ + \frac{\partial(u_y \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x \omega_y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(u_y \omega_y)}{\partial y} + Gr T, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y T)}{\partial y} = \frac{\partial(\omega_x T)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_y T)}{\partial y} + \\ + \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$\omega_x = \tau \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (2.2.5)$$

$$\omega_y = \tau \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - Gr T \right). \quad (2.2.6)$$

Компоненты навье-стоксовского тензора вязких напряжений Π^{NS} имеют вид $\Pi_{xx}^{NS} = \frac{2}{Re} \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\Pi_{yx}^{NS} = \Pi_{xy}^{NS} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$, $\Pi_{yy}^{NS} = \frac{2}{Re} \frac{\partial u_y}{\partial y}$.

(2.2.7)

Уравнение (2.2.1) преобразуется в уравнение для давления в виде

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{1}{\tau} u_x \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - Gr T - \frac{1}{\tau} u_y \right) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Запишем уравнения (2.2.2)-(2.2.4) в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \text{div} \vec{W} = \vec{F}, \quad (2.2.9)$$

где введено обозначение

$$\operatorname{div} \vec{W} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} W_1 \\ \operatorname{div} W_2 \\ \operatorname{div} W_3 \end{pmatrix}.$$

Далее все операции с \vec{W} также осуществляются покомпонентно.

В соответствии с методом конечного объема, проинтегрируем (2.2.9) по контрольному объему и воспользуемся формулой Грина:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{KO}} \vec{V} dS - \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \int_{S_{KO}} \vec{F} dS, \quad (2.2.10)$$

здесь S_{KO} – площадь контрольного объема, L – ограничивающий его контур, \vec{n} – внешняя нормаль к контуру L . Далее к первому слагаемому в (2.2.10) применим формулу среднего значения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} - \frac{1}{S_{KO}} \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \vec{F}.$$

Аппроксимируем контурный интеграл следующим образом:

$$\oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \sum_k (W_x n_x + W_y n_y)_{|_{P_{k+1/2}}} L_k,$$

здесь значения W_x, W_y, n_x, n_y вычисляются в серединах $P_{k+1/2}$ отрезков $L_k = \operatorname{dist}(P_k, P_{k+1})$, составляющих контур L . Итак, заменяя производную по времени соответствующей разностной аппроксимацией, получим разностную формулу для метода конечного объема:

$$\hat{V}_i = V_i + \frac{\Delta t}{S_{KO}} \sum_k (W_x n_x + W_y n_y)_{|_{P_{k+1/2}}} L_k + \Delta t F_i. \quad (2.2.11)$$

При расчете по формуле (2.2.11) потребуются значения частных производных по x и y от скорости, давления и температуры в точках $P_{k+1/2}$. Значения газодинамических величин в этих точках определяются как средние между значениями на концах. Также при расчете по данной формуле понадобятся значения газодинамических величин в точках P_k . Эти значения определяются по формуле (2.1.1).

2.3. Аппроксимация частных производных

Рассмотрим аппроксимацию частных производных в точках $P_{k+1/2}$:

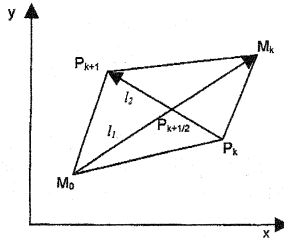


Рис. 2.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial l_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2} \cos \alpha_2 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial l_1} \sin \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial l_2} \sin \alpha_1 = \frac{f_{M_k} - f_{M_0}}{|l_1|} \sin \alpha_2 - \frac{f_{P_{k+1}} - f_{P_k}}{|l_2|} \sin \alpha_1, \end{aligned}$$

Перепишем это выражение в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (f_{M_k} - f_{M_0}) a_x - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) b_x, \quad (2.3.1)$$

где

$$a_x = \frac{|l_2| \sin \alpha_2}{|l_1| |l_2|} = \frac{l_{2y}}{|l_1| |l_2|}, \quad (2.3.2)$$

$$b_x = \frac{|l_1| \sin \alpha_1}{|l_1| |l_2|} = \frac{l_{1y}}{|l_1| |l_2|}, \quad (2.3.3)$$

здесь α_1 – угол между вектором l_1 и положительным направлением оси Ox .

Аналогично получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (f_{M_k} - f_{M_0}) a_y - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) b_y, \quad (2.3.4)$$

где

$$a_y = -\frac{l_{2x}}{|l_1| |l_2|}, \quad (2.3.5)$$

$$b_y = -\frac{l_{1x}}{|l_1| |l_2|}. \quad (2.3.6)$$

Такой же результат получается и при использовании формулы Грина в [4].

2.4. Аппроксимация граничных условий

Граница расчетной области должна аппроксимироваться контурами контрольных объемов граничных точек расчетной сетки таким образом, чтобы граница области проходила не более чем по одному отрезку из каждого контура граничной точки. Под контуром контрольного объема граничной точки подразумевается контур области, построенной аналогично контрольному объему внутренней точки. В этом случае граничные точки сетки будут находиться вне расчетной области, т.е. они будут фиктивными. Это позволяет повысить порядок аппроксимации граничных условий.

В случае, когда граница области проходит более чем по одному отрезку из каждого контура граничной точки, появляется неоднозначность в определении значения функции в фиктивном узле, что приводит к снижению точности аппроксимации граничного условия.

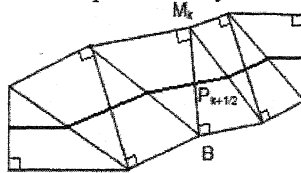


Рис. 2.3

Для того чтобы условие аппроксимации было выполнено достаточно, чтобы граница аппроксимировалась прямоугольными треугольниками как показано на рис. 2.3.

Теперь рассмотрим различные типы граничных условий.

Граничное условие I рода

Запишем граничное условие:

$$f|_{\Gamma} = f_0,$$

где Γ – граница области.

Аппроксимацию запишем в виде:

$$\frac{f_B + f_{M_k}}{2} = f_0,$$

или же

$$f_B = 2f_0 - f_{M_k}.$$

Граничное условие II рода

Запишем граничное условие:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f_0.$$

Аппроксимирuem это условие:

$$\frac{f_B - f_{M_k}}{L} = f_0,$$

или же

$$f_B = f_0 L + f_{M_k},$$

где $L = \text{dist}(B, M_k)$ - расстояние между B и M_k .

Граничное условие III рода

Запишем граничное условие:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial n} + \beta f \right]_{\Gamma} = f_0.$$

Аппроксимацию запишем в виде:

$$\frac{f_B - f_{M_k}}{L} + \beta \frac{f_B + f_{M_k}}{2} = f_0$$

или же

$$f_B = \frac{2f_0 L + f_{M_k}(2 - \beta L)}{2 + \beta L}.$$

2.5. Аппроксимация уравнения Пуассона

Для аппроксимации частных производных в узлах сетки будем использовать формулу Грина для контрольного объема (см. рис 2.1):

$$\iint_{KO} \text{div } \vec{A} \, dx dy = \int_L (\vec{A}, \vec{n}) \, dl,$$

где \vec{n} - внешняя нормаль к контуру L , $\vec{A} = \{P, Q\}$ - некий вектор.

Далее из этой формулы получим:

$$\iint_{KO} \frac{\partial f}{\partial x} \, dx dy = \int_L f n_x \, dl = \sum_k f_{P_{k+1/2}} n_{x_{P_{k+1/2}}} L_k, \quad (2.5.1)$$

$$\iint_{KO} \frac{\partial f}{\partial y} \, dx dy = \int_L f n_y \, dl = \sum_k f_{P_{k+1/2}} n_{y_{P_{k+1/2}}} L_k. \quad (2.5.2)$$

где $P_{k+1/2}$ - середины отрезков $L_k = \text{dist}(P_k, P_{k+1})$, составляющих контур L .

Теперь рассмотрим уравнение Пуассона $-\Delta f = \varphi$. Запишем его в виде:

$$-\Delta f = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y}. \quad (2.5.3)$$

Проинтегрируем это уравнение по контрольному объему и вычислим значение левой части, используя (2.5.1)-(2.5.2):

$$-\iint_{KO} \Delta f \, dx dy = -\sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y \right]_{P_{k+1/2}} L_k,$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к границе контрольного объема. Далее имеем (см. рис 2.2):

$$\begin{aligned} & - \iint_{KO} \Delta f \, dx dy = - \sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial x} n_x |l_2| + \frac{\partial f}{\partial y} n_y |l_2| \right] \Bigg|_{P_{k+1/2}} = \\ & = - \sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial x} |l_2| \sin \alpha_2 - \frac{\partial f}{\partial y} |l_2| \cos \alpha_2 \right] \Bigg|_{P_{k+1/2}} = \sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial y} l_{2x} - \frac{\partial f}{\partial x} l_{2y} \right] \Bigg|_{P_{k+1/2}} = \\ & = \sum_k \left[(f_{M_k} - f_{M_0}) a_y - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) b_y \right] l_{2x} - \left[(f_{M_k} - f_{M_0}) a_x - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) b_x \right] l_{2y} \Bigg|_{P_{k+1/2}} = \\ & = \sum_k \left[(f_{M_k} - f_{M_0}) (a_y l_{2x} - a_x l_{2y}) - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) (b_y l_{2x} - b_x l_{2y}) \right] \Bigg|_{P_{k+1/2}} . \end{aligned}$$

Вычислим отдельно коэффициенты, используя (2.3.2)-(2.3.3), (2.3.5)- (2.3.6):

$$\begin{aligned} a_y l_{2x} - a_x l_{2y} &= - \frac{l_{2x}^2 + l_{2y}^2}{|l_1| |l_2|} = - \frac{|l_2|^2}{|l_1| |l_2|} = - \frac{|l_2|}{|l_1|} , \\ b_y l_{2x} - b_x l_{2y} &= - \frac{l_{1x} l_{2x} + l_{1y} l_{2y}}{|l_1| |l_2|} = - \frac{(l_1, l_2)}{|l_1| |l_2|} = 0, \text{ т.к. } l_1 \perp l_2 . \end{aligned}$$

В результате преобразований левая часть уравнения Пуассона выглядит так:

$$- \iint_{KO} \Delta f \, dx dy = \sum_k (f_{M_0} - f_{M_k}) \frac{|l_2|}{|l_1|} \Bigg|_{P_{k+1/2}} .$$

К правой части уравнения (2.5.3) применим (2.5.1) и (2.5.2). Таким образом уравнение (2.5.3) преобразовывается к системе линейных уравнений:

$$\sum_k (f_{M_0} - f_{M_k}) \frac{|l_2|}{|l_1|} \Bigg|_{P_{k+1/2}} = \sum_k [\varphi^1 n_x + \varphi^2 n_y] \Bigg|_{P_{k+1/2}} L_k . \quad (2.5.4)$$

2.6. Вычислительный алгоритм КГД уравнений

Расчетная область покрывается неструктурированной сеткой, удовлетворяющей условиям, указанным в разделах 2.1 и 2.4. Гидродинамические величины \dot{y}, p, T будем относить к узлам сетки, их значения в точках P_k (см. рис. 2.1) будем вычислять по формуле (2.1.1), а в точках $P_{k+1/2}$ определим как полусумму значений в точках M_k и M_0 .

Используя (2.5.4) получим из (2.2.8) систему линейных уравнений для давления:

$$\sum_k (P_{M_0} - P_{M_k}) \left| \frac{l_2}{l_1} \right|_{P_{k+1/2}} = \sum_k \left[\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{1}{\tau} u_x \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{xP_{k+1/2}} L_k + \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - GrT - \frac{1}{\tau} u_y \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{yP_{k+1/2}} L_k \right]. \quad (2.6.1)$$

Теперь проинтегрируем (2.2.2) по контрольному объему и, воспользовавшись (2.2.3) получим:

$$\hat{u}_x = u_x + \frac{\Delta t}{S_{KO}} \sum_k \left[\left(\frac{2}{Re} \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x (2\omega_x - u_x) - p \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{xP_{k+1/2}} L_k + \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_x (\omega_y - u_y) + u_y \omega_x \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{yP_{k+1/2}} L_k \right]. \quad (2.6.2)$$

Аналогично получаем формулы для второй проекции скорости и температуры:

$$\hat{u}_y = u_y + \frac{\Delta t}{S_{KO}} \sum_k \left[\left(\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_x (\omega_y - u_y) + u_y \omega_x \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{xP_{k+1/2}} L_k + \left(\frac{2}{Re} \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_y (2\omega_y - u_y) - p \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{yP_{k+1/2}} L_k \right] + \Delta t GrT \quad (2.6.3)$$

$$\hat{T} = T + \frac{\Delta t}{S_{KO}} \sum_k \left[\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} + T(\omega_x - u_x) \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{xP_{k+1/2}} L_k + \left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} + T(\omega_y - u_y) \right) \Big|_{P_{k+1/2}} n_{yP_{k+1/2}} L_k \right], \quad (2.6.4)$$

где

$$\omega_x \Big|_{P_{k+1/2}} = \tau \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{P_{k+1/2}}, \quad (2.6.5)$$

$$\omega_y \Big|_{P_{k+1/2}} = \tau \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) \Big|_{P_{k+1/2}}. \quad (2.6.6)$$

Для интерпретации результатов использовалась функция тока Ψ , удовлетворяющая соотношениям:

$$u_x - \omega_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y - \omega_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Продифференцируем первое соотношение по y , а второе по x и сложим их:

$$-\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(u_y - \omega_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x - u_x),$$

и, используя (2.5.4), получим следующую систему линейных уравнений для функции тока:

$$\sum_k (\Psi_{M_0} - \Psi_{M_k}) \frac{|l_2|}{|l_1|} \Big|_{P_{k+1/2}} = \sum_k [(u_y - \omega_y)n_x + (\omega_x - u_x)n_y] \Big|_{P_{k+1/2}} L_k \quad (2.6.7)$$

В начальный момент времени $t = 0$ во внутренних узлах сетки положим

$$\vec{u} = 0, T = 0 \quad (2.6.8)$$

Таким образом, алгоритм расчета течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных сетках включает следующие этапы:

- 1). Вычисление полей скорости и температуры в начальный момент времени по формуле (2.6.8);
- 2). Вычисление полей скорости и температуры в фиктивных узлах, используя граничные условия;
- 3). Определение поля давления путем решения методом Холецкого системы линейных алгебраических уравнений (2.6.1), дополненных граничными условиями;
- 4). Нахождение полей скорости и температуры на следующем слое по времени с помощью (2.6.2)-(2.6.6);
- 5). Переброска массивов и возврат к п. 2).

Течение считается установившимся, если

$$\frac{\max_{\substack{(x_i, y_j) \in \omega_h \\ (u_x)_{ij}^{n+1} \neq 0}} \left\{ \frac{|(u_x)_{ij}^{n+1} - (u_x)_{ij}^n|}{\Delta t} \right\}}{\max_{\substack{(x_j, y_j) \in \omega_h \\ (u_y)_{ij}^{n+1} \neq 0}} \left\{ |(u_x)_{ij}^{n+1}| \right\}} + \frac{\max_{\substack{(x_i, y_j) \in \omega_h \\ (u_y)_{ij}^{n+1} \neq 0}} \left\{ \frac{|(u_y)_{ij}^{n+1} - (u_y)_{ij}^n|}{\Delta t} \right\}}{\max_{\substack{(x_j, y_j) \in \omega_h \\ (u_y)_{ij}^{n+1} \neq 0}} \left\{ |(u_y)_{ij}^{n+1}| \right\}} < \varepsilon_u.$$

3 Течение в каверне с подвижной крышкой

3.1. Постановка задачи

Рассматривается течение изотермической жидкости в квадратной каверне с ребром H . Верхняя крышка каверны движется с постоянной скоростью U_0 .

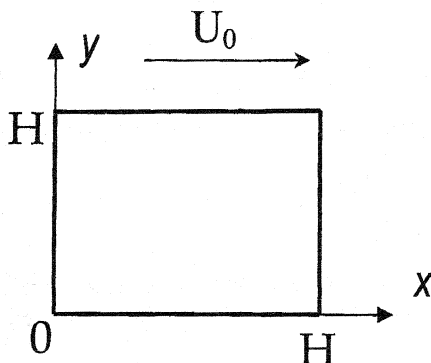


Рис. 3.1

Для невысоких чисел Рейнольдса $Re < 1000$ течение является стационарным и представляет собой один большой вихрь близи центра области. В качестве единиц измерения $x, y, t, u_x, u_y, \omega_x, \omega_y, p$ соответственно выбраны величины $H, H, H/U_0, U_0, U_0, U_0, U_0, \rho U_0^2$. Система уравнений для данной задачи выглядит как система (2.2.1)-(2.2.3), (2.2.5)-(2.2.7) при $Gr=0$ со следующими граничными условиями:

- левая и правая стенки ($x=0, x=1; 0 < y < H$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad (3.1.1)$$

- нижняя стенка ($0 < x < H, y=0$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (3.1.2)$$

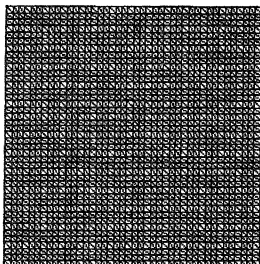
- верхняя стенка ($0 < x < H, y=H$):

$$u_x = U_0, \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (3.1.3)$$

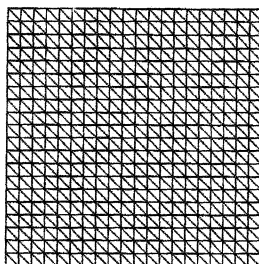
В качестве начального условия выбиралось состояние покоя $\vec{u} = 0$. Давление в начальный момент времени считалось равным $p = 0$. Чтобы устранить неоднозначность в определении давления, будем использовать нормировку

$$p(0, 0, t) = 0.$$

3.2. Результаты



Сетка 1 (1764 узла)



Сетка 2 (529 узла)

Задача решалась при числах Рейнольдса $Re = 100, 1000$ на сетке 1. При $Re = 400$ на сетках 1 и 2. Значения τ выбирались исходя из условия $\tau = 1/Re$. Такой выбор параметра регуляризации обеспечивает достаточную устойчивость и точность вычислительного алгоритма. Во всех вариантах шаг интегрирования по времени выбирался равным $\Delta t = 10^{-3}$.

Таблица 3.1.

Расчетная сетка	Re	τ	Время окончания расчета	Ψ_{\min}
1	100	0.01	17.013	-0.098
1	400	0.0025	39.532	-0.104
2	400	0.0025	42.352	-0.103
1	1000	0.001	74.89	-0.104

На рис. 3.2-3.4 изображены линии тока и изобары в установившихся течениях для чисел $Re = 100, 400, 1000$, полученные на сетке 1. Для сравнения на рис. 3.5 изображены распределения компонент скорости в центральных сечениях каверны. При увеличении числа Рейнольдса вихрь смещается в центр области. А для $Re = 1000$ наблюдаются вторичные вихри

в нижних углах области. Сетка 2, как видно на рис 3.6, в целом является удовлетворительной для описания структуры течения при $Re=400$. На рис. 3.7 видно, что компоненты скорости на крупной сетке несильно отличаются от соответствующих компонент на более подробной сетке. В целом же линии тока и распределение давления соответствуют данным, полученным при численном моделировании рассматриваемых течений на основе системы Навье-Стокса. Некоторые параметры расчета приведены в сводной таблице 3.1.

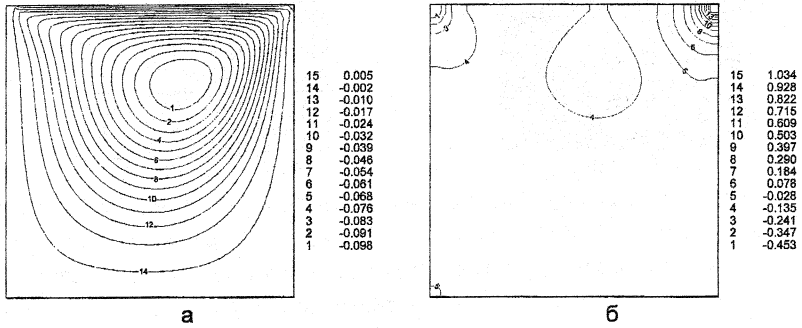


Рис. 3.2: $Re=100$, сетка 1, функция тока (а), изобары (б)

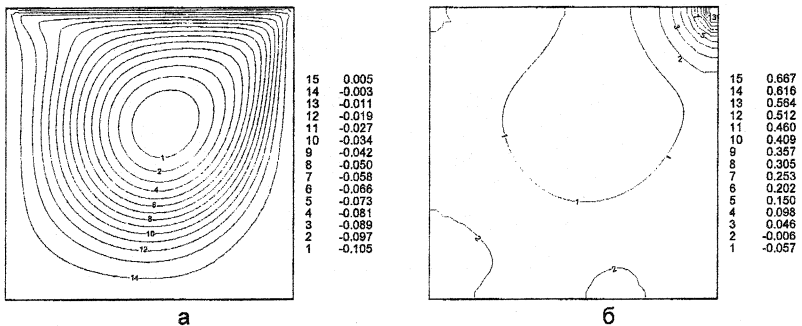


Рис. 3.3: $Re=400$, сетка 1, функция тока (а), изобары (б)

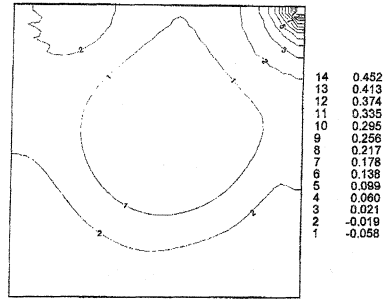
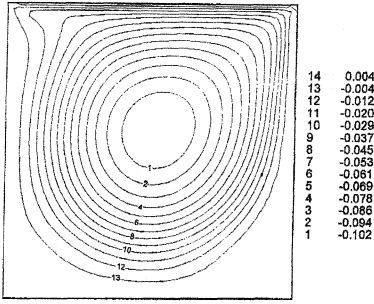


Рис. 3.4: $Re=1000$, сетка 1, функция тока (а), изобары (б)

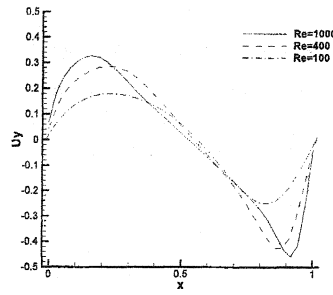
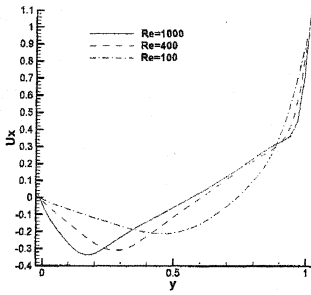


Рис. 3.5: сетка 1, $U_x(0.5, y)$ (а), $U_y(x, 0.5)$ (б)

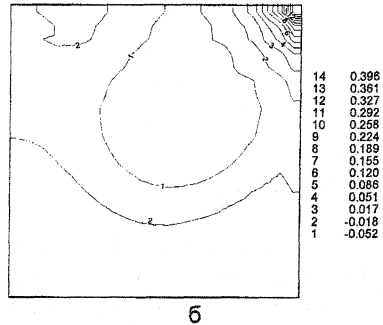
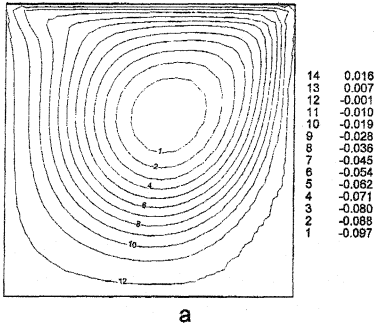


Рис. 3.6: $Re=400$, сетка 2, функция тока (а), изобары (б)

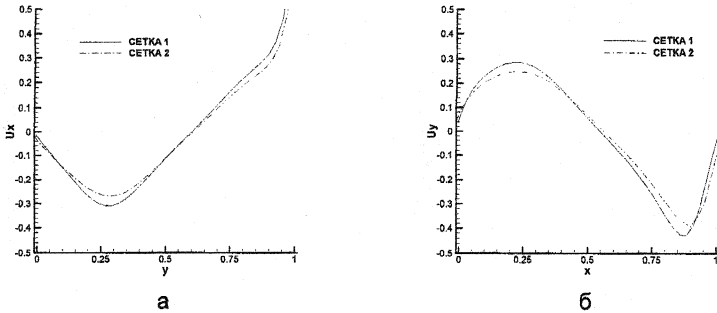


Рис. 3.7: $Re=400$, $U_x(0.5, y)$ (а), $U_y(x, 0.5)$ (б)

4 Исследование сходимости

Теоретический интерес представляет следующий вопрос: как влияет выбор параметра τ и шага по времени Δt на сходимость численного метода. Рассмотрим этот вопрос на примере течения, описанного в главе 3 при $Re=100$.

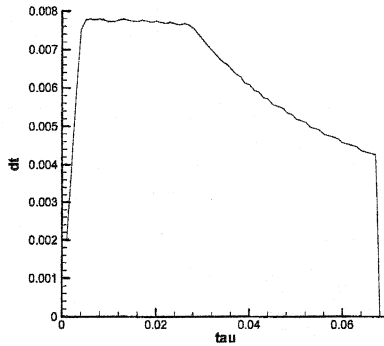


Рис. 4.1: Максимальный шаг по времени в зависимости от τ .

При расчетах значения параметра τ менялись от 0.001 до 0.068 с шагом 0.001 . Для каждого τ находился максимальный шаг по времени $\max \Delta t$, при котором алгоритм решения сходился. Значение $\max \Delta t$ определялось методом бисекций с точностью 10^{-4} .

На рис 4.1 показан график максимального шага по времени, при котором алгоритм сходится. Стоит заметить, что резкое падение графика Δt при $\tau = 0.068$ обусловлено тем, что при этом значении параметра

τ алгоритм расходился вплоть до $\Delta t = 8.4 \cdot 10^{-6}$ и дальнейшие расчеты были остановлены.

На рис 4.2 показаны линии тока и распределение давления при $\tau = 0.03$. Как видно, решение очень хорошо совпадает с решением из главы 3 (см. рис 3.2).

Как видно на рис 4.3, при $\tau = 0.05$ и $\tau = 0.067$ линии тока достаточно хорошо совпадают с «эталонным» решением из главы 3, за исключением левого верхнего угла, где наблюдается некоторая нерегулярность, имеющая размер, сопоставимый с контрольным объемом. Однако при увеличении параметра τ распределение давления сильно меняется по абсолютному значению.

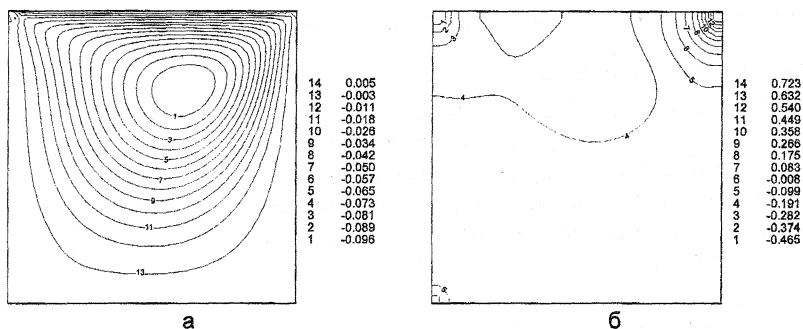


Рис. 4.2: $\tau = 0.03$, функция тока (а), изобары (б)

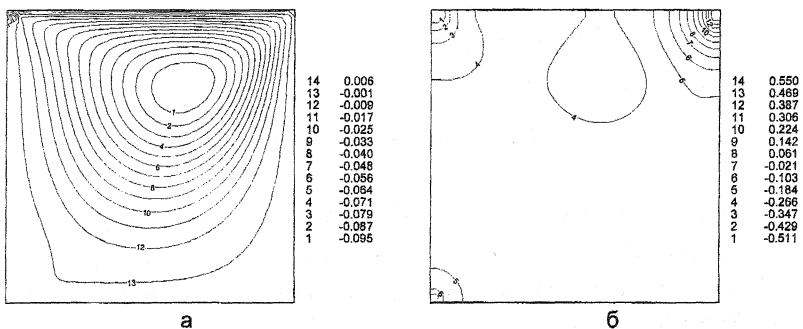


Рис. 4.3: $\tau = 0.05$, функция тока (а), изобары (б)

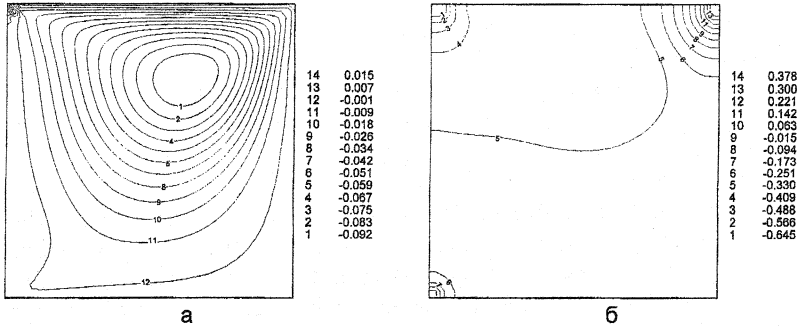


Рис. 4.4: $\tau = 0.067$, функция тока (а), изобары (б)

5 Тепловая конвекция в квадратной области

5.1. Постановка задачи

Рассматривается задача о течении теплопроводной вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области с двумя вертикальными изотермическими стенками. Течение возникает благодаря разности температур этих стенок. Горизонтальные стенки являются адиабатическими. Течение описывается системой уравнений (2.2.1)-(2.2.7) со следующими граничными условиями:

- нижняя и верхняя стенки ($0 < x < 1, y = 0, y = 1$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = GrT, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad (5.1.1)$$

- левая стенка ($x = 0; 0 < y < 1$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad T = 1; \quad (5.1.2)$$

- правая стенка ($x = 1; 0 < y < 1$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad T = 0; \quad (5.1.3)$$

В качестве начального условия выбиралось состояние покоя $\vec{u} = 0, T = 0$. Давление в начальный момент времени считалось равным $p = 0$. Чтобы устранить неоднозначность в определении давления, будем использовать нормировку

$$p(0, 0, t) = 0.$$

5.2. Результаты

Задача решалась для умеренных чисел Грасгофа $Gr=10^4$ и 10^5 , числа Прандтля $Pr=1$ и параметра $\tau=10^{-4}$ на сетке 1 из главы 3. Шаг по времени брался $\Delta t=10^{-5}$. Результаты расчетов представлены в таблице 5.1

Таблица 5.1.

Gr	Время окончания расчета	Ψ_{\min}
10^4	0.834	-4,91
10^5	0.545	-9.50

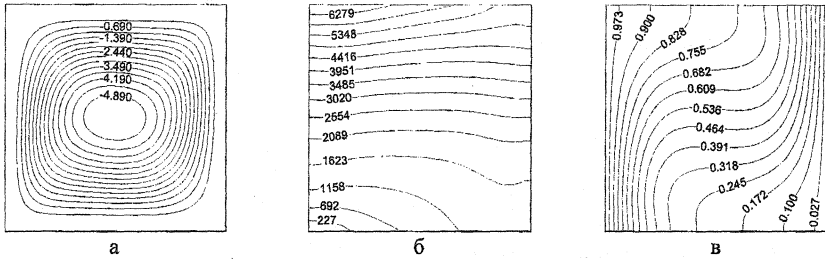


Рис. 5.1: $Gr=10^4$, функция тока (а), изобары (б), изотермы(в)

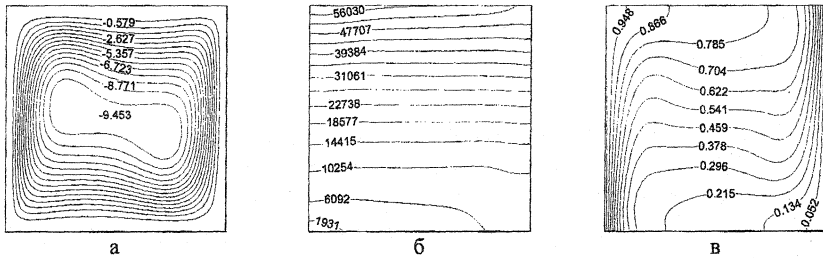


Рис. 5.2: $Gr=10^5$, функция тока (а), изобары (б), изотермы(в)

6 Тепловая конвекция при низких числах Прандтля

6.1. Постановка задачи

Рассматривается задача о тепловой гравитационной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной области высоты H и длины AH при низких числах Прандтля. Эта задача представляет собой известный тест, предложенный в 1987 году для анализа численный методик расчета конвективных течений в расплавах. Практическая необходимость таких расчетов связана с тем, что периодические колебания температуры в металлических расплавах (жидкостях с малым числом Прандтля) создают серьезные проблемы при выращивании полупроводниковых кристаллов. Течение описывается системой уравнений (2.2.1)-(2.2.7) со следующими граничными условиями:

- нижняя и верхняя стенки ($0 < x < 1, y = 0, y = 1$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = GrT, \quad T = A - x; \quad (6.1.1)$$

- левая стенка ($x = 0; 0 < y < 1$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad T = A; \quad (6.1.2)$$

- правая стенка ($x = 1; 0 < y < 1$):

$$u_x = u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad T = 0; \quad (6.1.3)$$

В качестве единиц измерения $x, y, t, u_x, u_y, \omega_x, \omega_y, p, T$ соответственно выбраны величины $H, H, H^2/\nu, \nu/H, \nu/H, \nu/H, \nu/H, \rho(\nu/H)^2, \Delta T/A$. Для устранения неоднозначности в определении давления, будем использовать нормировку

$$p(0, 0, t) = 0.$$

6.2. Результаты

Расчеты проводились для умеренных чисел Грасгофа $Gr = 2 \cdot 10^4$ и $4 \cdot 10^4$ и при низком числе Прандтля $Pr = 0.015$ в прямоугольной камере ($A=4$). Во всех вариантах шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$. Для случая $Gr = 2 \cdot 10^4$ в качестве начальных условий использовались невозмущенные поля скорости и температуры, а для $Gr = 4 \cdot 10^4$ – поля скорости и температуры, полученные в расчете с $Gr = 2 \cdot 10^4$. Некоторые данные расчетов представлены в таблице 6.1

Таблица 6.1.

Gr	τ	Время оконча- ния расчета	Ψ_{\min}
$2 \cdot 10^4$	$0.5 \cdot 10^{-4}$	0.5585	-45.48
$4 \cdot 10^4$	$0.25 \cdot 10^{-4}$	1	-79.44

При $Gr = 2 \cdot 10^4$ получен стационарный режим течения (рис. 6.1). Линии тока представляют собой один вытянутый в длину вихрь. На рис 6.3 показаны графики компонент скорости внутри области.

При $Gr = 4 \cdot 10^4$ получен колебательный режим течения (рис 6.2, 6.4), период колебаний которого можно приблизительно оценить как 0.05. Течение в этой задаче представляет собой структуру, аналогичную предыдущему варианту, причем процесс колебаний заключается в изменении интенсивности вихревых образований.

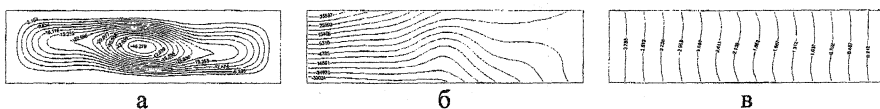


Рис. 6.1: $Gr = 2 \cdot 10^4$, функция тока (а), изобары (б), изотермы(в)

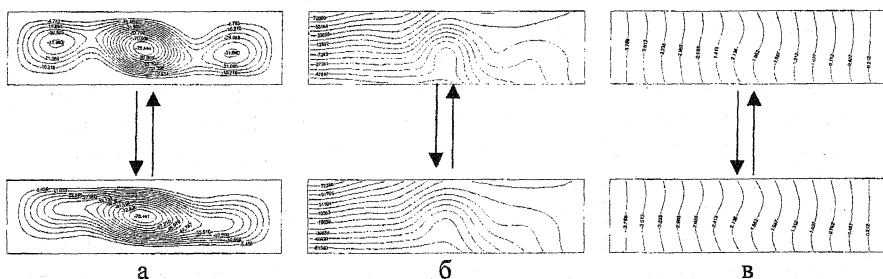


Рис. 6.2: $Gr = 4 \cdot 10^4$, функция тока (а), изобары (б), изотермы(в)

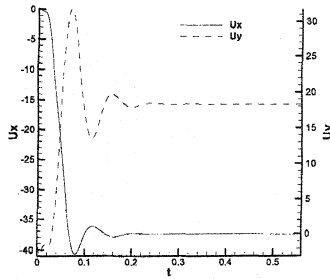


Рис. 6.3: $Gr = 2 \cdot 10^4$, график компонент скорости в точке (1.2; 0.5)

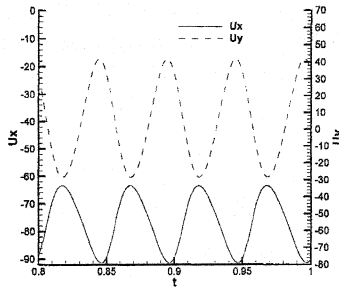


Рис. 6.4: $Gr = 4 \cdot 10^4$, график компонент скорости в точке (1.2; 0.5)

7 Заключение

Из представленных результатов следует, что предложенный алгоритм решения системы квазигидродинамических уравнений на неструктурированных сетках позволяет находить решения, которые достаточно хорошо совпадают с соответствующими решениями системы на регулярных прямоугольных сетках. Таким образом, предложенная аппроксимация КГД системы может использоваться для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости на нерегулярных треугольных сетках. В дальнейшем планируется провести расчеты течений жидкости в произвольной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизарова Т. Г., Шеретов Ю. В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, N 2, с. 239-255.
2. Гуров Д. Б., Елизарова Т. Г., Шеретов Ю. В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квазигидродинамической системы уравнений. Математическое моделирование. 1996. Т. 8, N 7, с. 33-44.
3. Семенов М. В., Шеретов Ю. В. Численное моделирование течений жидкости в окрестности шара. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь:Тверской гос. ун., 2005, с. 107-123.
4. Елизарова Т. Г. Лекции Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. Ч. 1, с.120, Ч. 2, с. 108. – М.: Физический факультет МГУ, 2005.
5. Елизарова Т.Г., Серегин В. В. Численное решение квазигазодинамических уравнений на треугольных сетках. Вестник Московского университета, серия 3. Физ. Астрономия, 2005, № 4, с. 15-18.