

ВЛИЯНИЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ МИКРОУСКОРЕНИЙ НА РЕЖИМЫ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЙ*

Введение

Термокапиллярная конвекция вызывает в последнее время повышенный интерес. Это связано в первую очередь с прикладным значением этого вида конвекции для ряда процессов выращивания кристаллов в условиях микрогравитации. Экспериментальное исследование термокапиллярной конвекции затруднено в земных условиях наличием сильной гравитационной конвекции, а в условиях микротяжести на борту ракет-зондов и космических аппаратов наличием остаточных ускорений массовых сил и вибраций.

Осциллирующая (турбулентная) термокапиллярная конвекция исследовалась в ряде экспериментов, проводившихся на ракетах-зондах (программа TEXUS) и на американских космических аппаратах «Спейс шаттл» [1-4]. Все эксперименты проводились с капельными жидкостями, имеющими числа Прандтля, больше 1. Например, эксперимент на TEXUS-7 [3] проводился с этиловым спиртом (число Прандтля $Pr = 6.8$), а во время полета на «Спейс шаттл» германской исследовательской лаборатории Spacelab D-1 – с силиконовым маслом ($Pr = 60$) [4]. Затем эти результаты экстраполировались на область малых чисел Прандтля, представляющую наибольший интерес для технологии получения кристаллов полупроводниковых материалов. Следует отметить, что во время этих экспериментов измерения ускорений не проводилось. Можно только отметить, что при полетах ракет-зондов остаточные ускорения массовых сил, связанные с аэродинамическим торможением при полете на высотах 100-250 км достигало $10^{-4} g_0$, где g_0 – ускорение силы тяжести на Земле.

Влияние на термокапиллярные течения постоянного ускорения силы тяжести и негладкости статической формы свободной поверхности жидкости исследовалось неоднократно [5-16].

В настоящей работе с помощью вычислительного алгоритма, построенного на основе квазигидродинамической системы уравнений [17], проведено численное исследование задачи о термокапиллярной конвекции в прямоугольной полости с учетом микрогравитации.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ N 01-01-00061 и INTAS N 2000-0617.

1. Постановка задачи

Течение вязкой несжимаемой теплопроводящей жидкости описывается квазигидродинамической системой уравнений, которая была выведена в [17] и может быть представлена в виде

$$\operatorname{div}(\bar{u} - \bar{w}) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{u} - \bar{w})\nabla T = \chi\Delta T \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} - \bar{w})\nabla \bar{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Pi - \beta\bar{g}T$$

Здесь $\rho = \text{const} > 0$ – среднее значение плотности, $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$ – гидродинамическая скорость, $p = p(x, t)$ – давление, отсчитываемое от гидростатического, $T = T(x, t)$ – отклонение температуры от ее среднего значения T_0 . Величины \bar{j} и Π , интерпретируемые как вектор плотности потока массы жидкости и тензор вязких напряжений, соответственно вычисляются следующим образом:

$$\bar{j} = \rho(\bar{u} - \bar{w})$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho(\bar{u} \otimes \bar{w}), \quad (2)$$

где Π_{NS} – навье-стоксовский тензор вязких напряжений,

$$\bar{w} = \tau \left[(\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \beta\bar{g}T \right]. \quad (3)$$

В уравнениях (1), а также в выражениях (2),(3), коэффициенты динамической вязкости η и теплопроводности χ , температурный коэффициент расширения жидкости β и характерное время τ считаются положительными постоянными, вектор \bar{g} – ускорение свободного падения. Параметр τ может быть вычислен (см.[17]) по формуле $\tau = \frac{\eta}{(\rho c_s^2)}$, где c_s – скорость звука в жидкости при температуре T_0 . Величина $\rho\bar{u}$ интерпретируется как пространственно-временной средний импульс единицы объема жидкости.

В записи системы (1) используются стандартные обозначения тензорного анализа. При вычислении дивергенции от несимметричного тензора Π свертка осуществляется по его первому индексу. В дальнейшем изложении, описанную выше систему будем называть КГД системой.

КГД система может быть приведена к эквивалентному дивергентному виду:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi_{NS} + \operatorname{div}[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})] - \beta g T \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} T) = \operatorname{div}(\vec{w} T) + \chi \Delta T.$$

При $\tau \rightarrow 0$ она переходит в классическую систему уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска.

При исследовании течений в замкнутых областях для КГД системы (4) используются традиционные граничные условия, дополненные условием непротекания массы в виде $(\vec{j} \cdot \vec{n})_{\Gamma} = 0$; (5) где $n = n(x, t)$ – поле внешних единичных нормалей к поверхности Γ .

Выпишем систему уравнений (4) в безразмерном виде для случая плоских нестационарных конвективных течений жидкости в прямоугольной полости высоты H и длины L , вызванных совместным действием капиллярных и гравитационных сил:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right), \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ 2\tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - GrT \right) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &+ 2\tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) \right] + \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) \right] + \\ &+ \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[v \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + GrT, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[T \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[T \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GrT \right) \right]. \quad (5.4)$$

Здесь Re, Pr, Gr – числа Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа соответственно, τ_0 – характерное время, также записанное в безразмерном виде.

Система приведена к безразмерному виду с помощью соотношений

$$x = \tilde{x}H, y = \tilde{y}H, u = \tilde{u} \frac{v}{H}, v = \tilde{v} \frac{v}{H}, t = \tilde{t} \frac{H^2}{\nu}, p = \tilde{p} \rho \left(\frac{v}{H} \right)^2, T = \tilde{T} \frac{\Delta T}{A},$$

где $A = \frac{L}{H}$, $\Delta T = T_1 - T_2$ – разность температур между левой и правой стенками полости, ν – коэффициент кинематической вязкости. При выбранном обезразмеривании имеем $Gr = \frac{\beta g \Delta T H^4}{L \nu}$, $Re = 1$, $Pr = \frac{\nu}{\chi}$. Полость имеет твердую нижнюю границу и свободную верхнюю, которая считается недеформируемой.

К системе уравнений добавим следующие граничные условия

$$\text{Нижняя стенка: } u = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = -GrT, \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Верхняя граница:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{MaA}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x}, v = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = GrT, \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\text{Левая боковая стенка: } u = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, T = 1;$$

$$\text{Правая боковая стенка: } u = 0, v = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, T = 0;$$

где $Ma = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T}{A} \frac{H}{\eta \chi}$ – безразмерное число Марангони, характеризующее зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкости σ от температуры.

2. Вычислительный алгоритм

Для численного решения выписанной выше системы уравнений используется метод конечных разностей. Пространственные производные в системе (5) аппроксимируются на неравномерной пространственной сетке центральными разностями. Производные по времени аппроксимируются разностями вперед. При этом все величины вычисляются в узлах разност-

ной сетки. На каждом временном слое поле давления определяется по полю скорости и температуры путем решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - GrT \right), \quad (6)$$

которое может быть получено из системы уравнений (5). Для решения дискретного аналога уравнения (6) применяется предобусловленный обобщенный метод сопряженных градиентов [18]. Подробно метод решения уравнений (5.2)-(5.4), (6) изложен в [21].

Полученная разностная задача может быть решена на параллельной вычислительной технике с распределенной памятью. Алгоритм параллельной реализации вычисления по явным схемам значений u , v , T на новом временном слое изложен в работе [19]. Для решения разностной краевой задачи для уравнения (6) использовался параллельный вариант метода MICCG [20]. Результаты расчетов на 32-х процессорной станции Parsytec CC и на персональном компьютере INTEL CELERON 433 MHz совпали. Однако следует отметить, что решение двумерных задач на таких грубых пространственных сетках на параллельной вычислительной технике недостаточно оправдано. В дальнейшем предполагается решение этой задачи в трехмерной постановке. В этом случае использование параллельной вычислительной техники позволит существенно сократить время счета, и расчет каждого варианта будет происходить за приемлемое время.

3. Результаты расчетов

3.1. Влияние постоянной силы тяжести на структуру термокапиллярной конвекции

Изучено стационарное течение в прямоугольной области при совместном действии термокапиллярных сил и постоянного ускорения силы тяжести ортогонального свободной поверхности.

Для исследования влияния гравитационных сил на структуру термокапиллярного течения проведена серия расчетов в прямоугольной полости $A=2$ на равномерной сетке 42×82 при различных числах Грасгофа (в диапазоне $10^2 - 10^6$). В качестве начального условия использовалось стационарное термокапиллярное течение при $Gr = 0$, $Ma = 500$ (рис.1).

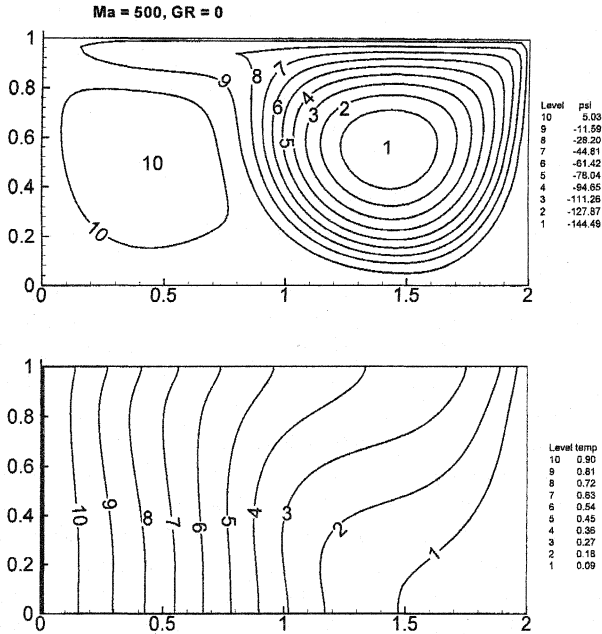


Рис.1 Линии уровня функции тока и изотермы при $Ma = 500, Gr = 0$.

В результате расчетов установлено, что слабая гравитационная конвекция ($Gr < 500$) не оказывает существенного влияния на структуру термокапиллярного течения. При увеличении числа Gr до 1000 (в режиме умеренной конвекции) наблюдаются изменения распределения скорости и температуры в приповерхностном слое (рис.2), но линии тока и изотермы не меняют своей формы. Развитая гравитационная конвекция существенно влияет на структуру начального термокапиллярного течения. Характерные для режима развитой гравитационной конвекции линии уровня функции тока и изотермы представлены на рис. 3-4.

Если действие капиллярных сил противоположно действию гравитационных (рис.3), то возникает трехвихревая структура, которая при дальнейшем увеличении числа Gr теряет свою устойчивость и в полости возникает нестационарное течение. На рис. 5. представлена зависимость скорости жидкости в средней точке поверхности от времени при $Gr = 10^6$.

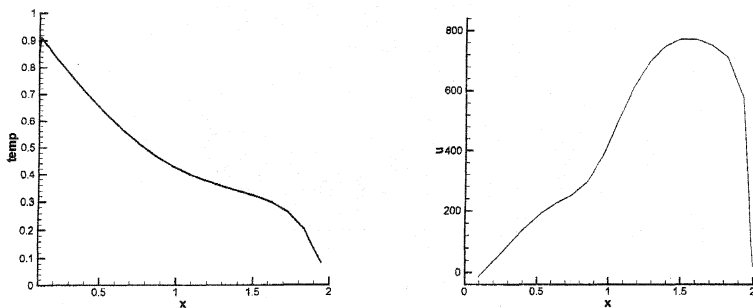


Рис.2. Распределение температуры и скорости на свободной поверхности при $Ma = 500, Gr = 0$

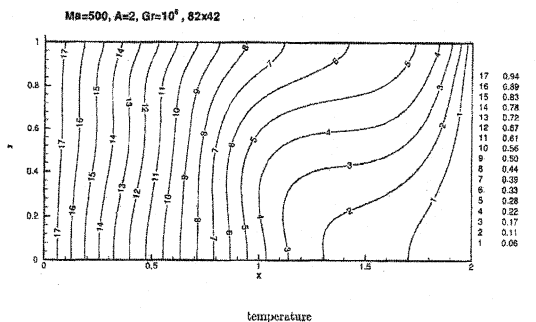
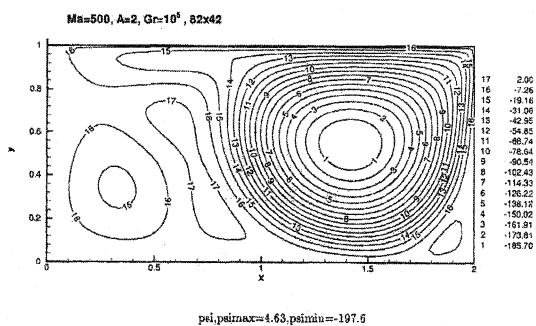
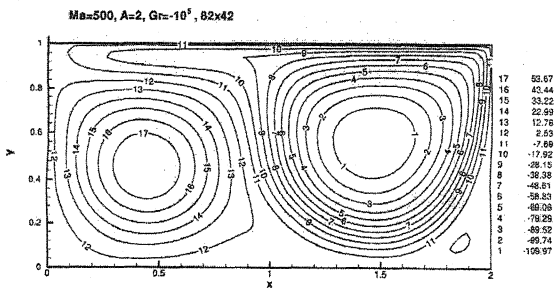


Рис.3. Линии уровня функции тока и изотермы при $Ma=500, GR = 10^5$.



psi,psimax=63.90,psimin=-120.17

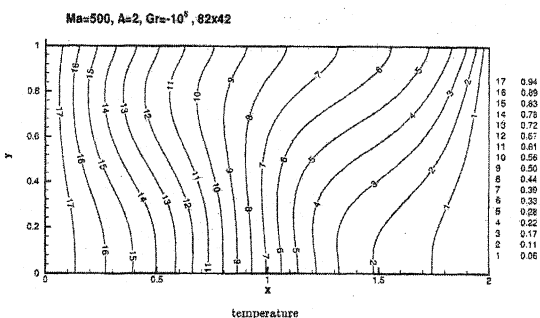


Рис.4. Линии уровня функции тока и изотермы при Ma=500, GR = 10⁵.

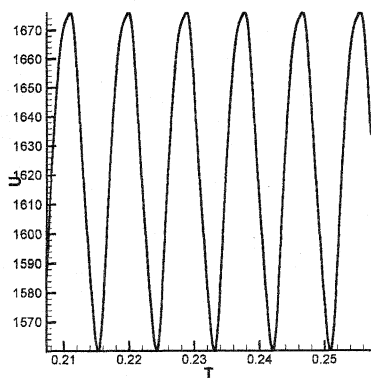


Рис.5. Зависимость скорости жидкости в средней точке поверхности от времени при Gr = 10⁶.

3.2. Влияние переменной силы тяжести на структуру термокапиллярной конвекции

Для практических приложений очень важно выяснить влияние микроускорений на конвективное движение. Квазистатическая составляющая микроускорения обусловлена движением спутника относительно центра масс как твердого тела, градиентом гравитационного поля земли и сопротивлением атмосферы. Эта составляющая может быть весьма точно рассчитана по информации о движении спутника. [22]. Для учета микроускорения при моделировании конвективных течений в систему уравнений (5) вводятся дополнительные члены в виде трех векторных функций, из которых существенное влияние может оказывать только член, входящий в выражении для подъемной силы. Поэтому, для модификации описанной выше системы уравнений, необходимо вместо постоянного числа Грасгофа $-Gr$ вводятся две функции $Grx(t)$ и $Gry(t)$. В настоящей работе эти функции имеют вид $Grx = Gr_0 \cos(\omega t)$, $Gry = Gr_0 \sin(\omega t)$. Вместо уравнений (5.2)-(5.4), (6) решались уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) - GryT \right] + GrxT, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + 2\tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GryT \right) \right] &+ \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GryT \right) \right] + \\ \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[v \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - GrxT \right) \right] &+ GryT, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - GrxT \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - GryT \right). \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) &= \\ = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \tau_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[T \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - GrxT \right) \right] &+ \\ + \tau_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[T \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - GryT \right) \right]. \end{aligned}$$

В граничных условиях вносились изменения: на левой боковой

стенке $\partial p/\partial x = -Gr_x T$, на правой боковой стенке $\partial p/\partial x = Gr_x T$. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $Gr_0 = 1000$, $\omega = 10$, $Pr = 0.018$, $Re = 1$, $Ma = 500$ и $Ma = 1000$.

Установлено, что несмотря на то, что структура конвективного движения в данном диапазоне параметров определяется термокапиллярной конвекцией, колебания вектора микроускорений приводят к колебаниям температуры и теплового потока в расплаве, что вызывает колебания скорости роста кристалла. На рис. 6-7 изображены зависимости скорости течения и теплового потока от времени.

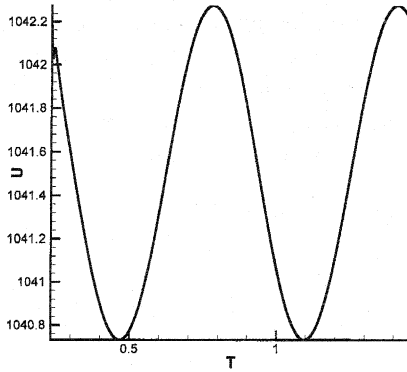


Рис. 6. Зависимость скорости жидкости от времени при $Gr_0 = 1000$, $\omega = 10$, $Pr = 0.018$, $Re = 1$, $Ma = 500$

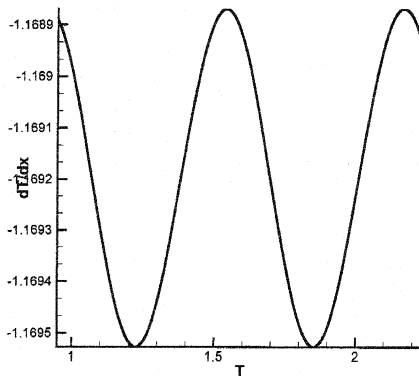


Рис. 7. Зависимость теплового потока на холодной стенке полости от времени при $Gr_0 = 1000$, $\omega = 10$, $Pr = 0.018$, $Re = 1$, $Ma = 500$

Заклучение

Результаты математического моделирования термокапиллярной конвекции в условиях пониженной гравитации продемонстрировали зависимость тепломассообмена от колебаний вектора остаточного ускорения. Эта зависимость может вызывать неравномерный рост кристаллов даже в режиме ламинарного конвективного движения. Полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Литература

1. H. Hamacher, U. Blumel, R. Jild. Spacelab's Microgravity Environment – A Characterization Based on D-1 and D-2 Data. *Ninth European Symposium "Gravity-Dependent Phenomena in Physical Sciences*. Berlin, Germany, 2 – 5 May 1995. Abstracts.
2. K. Hrovat. Synopsis of Acceleration Environment during the Mir-16 Mission as Measured by the Space Acceleration Measurement System (SAMS). *14th Meeting of Microgravity Measurements Group*. March 21-32 1996. NASA JSFC, Houston, USA; K. Hrovat. Mir Microgravity Environment as Measured by SAMS. *16th Meeting of Microgravity Measurements Group*. May 14-16 1997. Gainesville, Flo. USA.
3. Ch.-H. Chun. Verification of Turbulence Developing from the Oscillatory Marangoni Convection in a Liquid Column. *Proceedings of the 5th European Symposium on Material Sciences Under Microgravity* (Schloss Elmau, Germany). Paper ESA SP-222, Paris, Nov. 1984, pp. 271-280.
4. L.G. Napolitano, R. Monti, G. Russo. Marangoni Convection in One and Two Liquid Floating Zones. *Naturwissenschaften*. 1986, vol. 73, pp. 352-355.
5. G. Chen, B. Roux. Analytical solution and numerical simulation of thermocapillary convection in floating zones. *Adv. Space Res.* 1991, vol. 11, No 7, pp. 151-162.
6. Z.H. Cao, J.C. Xie, Z. M.Tang, W.R. Hu. The influence of buoyancy of the onset of oscillatory convection in a half floating zone. *Adv. Space Res.* 1991, vol. 11, No 7, pp. 163-166.
7. V.M. Shevtsova, H.C. Kuhlmann, H.J. Rath. Thermocapillary Convection in Liquid Bridges with a Deformed Free Surface. *Materials and Fluids Under Low Gravity*. L. Ratke, H. Walter, B. Feuerbacher (Eds). Lecture Notes in Physics, vol. 464. Springer-Verlag. Berlin. 1996, pp. 323-330.

8. N. Ramachandran, C.A. Winter. Effects of g-Jitter and Marangoni Convection on Float Zones. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1992, vol. 29, N 4, pp. 514-522.
9. H.F. Bauer. Stability and vibrational behaviour of cylindrical liquid layers in microgravity. *Hydromechanics and heat/mass transfer in microgravity*. Gordon and Breach Sci. Publ. 1992, pp. 197-201.
10. J. Meseguer, J.M. Perales. Non-steady Phenomena in the Vibration of Viscous Cylindrical Long Liquid Bridges. *Microgravity Sci. and Technology*. 1992, vol. 5, pp. 69-72.
11. A.I. Feonychev, I.S. Kalachinskaya, V.I. Pokhilko. Deformation of fluid column by action of axial vibration and some aspects of high-rate thermocapillary convection. *Proceedings of Third Microgravity Fluid Physics Conference*. Cleveland, Ohio, USA. June 13-15, 1996. NASA Conference Publication 3338, pp. 493-498.
12. A.I. Feonychev, V.I. Pokhilko, I.S. Kalachinskaya. Heat and mass transfer during crystal growth by the floating zone method with free liquid surface deformable by axial vibration. *Vibrational Effects in Fluid Dynamics*. Papers Collection Edited by G.Z. Gershuni, D.V. Lubimov, T.P. Lubimova, J.I.D. Alexander. Perm: Perm State University. (в печати).
13. В.И. Похилко. О решении уравнений Навье-Стокса в кубической каверне. М.: Инст. Математ. Моделир. РАН, 1994, № 11, 22 с.
14. А.И. Феонычев, В.И. Похилко, И.С. Калачинская, А.В. Ключникова, Т.Г. Елизарова. Использование эффекта резонанса и осцилляционных режимов конвекции для идентификации собственных частот жидких объемов. *Сборник докладов Третьей международной конференции «Идентификация динамических систем и обратные задачи»*. Москва - Санкт-Петербург, Россия. 30 мая - 5 июня 1998г., 219-235.
15. A.A. Golovin, A.A. Nepomnyashchy, L.M. Pismen. Interaction between short-scale Marangoni convection and long-scale deformational instability. *Physics Fluids*, 1994, vol. 6, No 1, pp. 34-48.
16. D. Kajdan, L. Shtilman, A.A. Golovin, L.M. Pismen. Nonlinear Waves and Turbulence in Marangoni Convection. *Ninth European Symposium "Gravity-Dependent Phenomena in Physical Sciences*. Berlin, Germany, 2 - 5 May 1995. Abstracts.
17. Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
18. Библиотека программ для решения сеточных уравнений / Под ред. Е.С. Николаева / М.: Изд-во МГУ, 1984.

19. Т.Г. Елизарова, Б.Н. Четверушкин. Применение многопроцессорных транспьютерных систем для решения задач математической физики // Математическое моделирование, 1992, Т.4, N 11, с.75-100.
20. О.Ю. Милукова. Параллельный итерационный метод с факторизованной матрицей обусловливания для решения эллиптических уравнений. // Дифференциальные уравнения, 2000, Т36, N7, с.953-962.
21. Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В. Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, N 10. С. 1732-1742.
22. Сазонов В.В., Беляев М.Ю. и др. Определение квазистатической составляющей микроускорения на станции Мир. // Космические исследования, 2001, Т.39, №2, с.136-147.