

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В АРГОНЕ, ГЕЛИИ И АЗОТЕ

1. Введение

Задача о структуре фронта неподвижной ударной волны традиционно использовалась для тестирования численных моделей расчета течений разреженного газа. В расчетах профиля плотности в ударной волне неоднократно демонстрировались преимущества кинетических подходов по сравнению с уравнениями Навье–Стокса (НС) для чисел Маха больше 2. В качестве эталонных использовались результаты, полученные в эксперименте [1] и при численном моделировании на основе кинетических подходов – решения уравнения Больцмана, метода Монте-Карло (ПММК) [2] и их модификаций [3].

Квазигазодинамические (КГД) уравнения также тестировались на этой задаче. В частности, в [4] получено, что для моноатомного газа с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, числом Прандтля $Pr = 2/3$ и показателем степени в законе вязкости $\omega = 0.72$ для чисел Маха в диапазоне $1.5 \leq Ma \leq 10$ обратная ширина фронта ударной волны, рассчитанная на основе КГД уравнений, хорошо соответствует расчетам по кинетической модели [3]. В последующих работах авторов сопоставление расчетов проводилось только с результатами, полученными по кинетическим алгоритмам: уравнению Больцмана [5] и методу Монте-Карло [6, 7] для двух идеализированных сред – одноатомных газов твердых сфер и мягких максвелловских молекул. При этом было получено, что обратная ширина ударной волны, рассчитанная по КГД и НС уравнениям, имеет близкие значения, которые превосходят величины, полученные в расчетах по кинетическим моделям. Заметные отличия наблюдались для профилей температуры перед ударной волной.

В данной работе результаты расчетов по КГД модели сопоставляются с результатами, полученными на основе уравнений НС и данными экспериментов для реальных одноатомных аргона и гелия и двухатомного азота. В отличие от выполненных ранее расчетов структуры УВ, здесь использовалось выражение для параметра релаксации, включающего в себя число Шмидта Sc . Кроме того, КГД уравнения были записаны в форме, отвечающей виду законов сохранения. Соответствующий численный алгоритм был предложен в [8] и опробован в расчетах сверхзвуковых течений [9]. В расчетах молекулярные свойства газов выбираются в соответствии с данными [2] (Приложение 1).

В качестве эталона взяты данные эксперимента Альсмеера [1]. Эти результаты получены в ударной трубе, где форму ударной волны с большой точностью можно считать плоской, что позволяет решать задачу в одномерном приближении. Температура перед ударной волной в этих экспериментах порядка 300 K, что позволяет использовать степенную зависимость коэффициента вязкости от температуры. В [1] с помощью электронного зонда измерялась плотность в УВ. В частности, приведены профили плотности и зависимости обратной ширины УВ от числа Маха. Профили температуры и скорости в этих экспериментах не измерялись.

2. Математическая модель

Согласно [7, 8] КГД уравнения для одномерного плоского течения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(j_m u)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(j_m H)}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi_{xx} u)}{\partial x}. \quad (3)$$

Здесь ρ – плотность газа, u – скорость, $p = \rho RT$ – давление, T – температура, γ – показатель адиабаты, R – газовая постоянная, E и H – полная энергия единицы объема и полная удельная энтальпия, которые вычисляются по формулам: $E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$ и $H = (E + p) / \rho$. Вектор плотности потока массы j_m вычисляется по формуле

$$j_m = \rho(u - w),$$

где

$$w = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p).$$

Компонента тензора вязких напряжений, входящая в систему уравнений (1) – (3), определяется как

$$\Pi_{xx} = \Pi_{xx}^{NS} + uw^* + R^*,$$

где

$$\Pi_{xx}^{NS} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta \cdot \text{div } \vec{u}$$

– компонента тензора вязких напряжений НС,

$$w^* = \tau \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad R^* = \tau \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \cdot p \cdot \text{div } \vec{u} \right), \quad \text{div } \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вектор теплового потока \vec{q} вычисляется как

$$q = q^{NS} - \tau \cdot \rho \cdot u \left[\frac{u}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + pu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right],$$

где

$$q^{NS} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Коэффициенты динамической вязкости η , теплопроводности κ и релаксационный параметр τ связаны соотношениями:

$$\eta = \eta_{\infty} \cdot \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\omega}, \quad \kappa = \frac{\gamma \cdot R}{(\gamma - 1) \cdot \text{Pr}} \cdot \eta, \quad \tau = \frac{\eta}{p \cdot \text{Sc}},$$

где η_{∞} – известное значение η при температуре T_{∞} , Pr и Sc – числа Прандтля и Шмидта соответственно, ω – заданный показатель степенной зависимости, $0.5 \leq \omega \leq 1$. При $\tau = 0$ КГД система переходит в систему уравнений НС.

Система уравнений (1)–(3) дополняется начальными и краевыми условиями.

3. Численный алгоритм

Для численного решения задачи в области расчета вводится разностная сетка по пространству и по времени. Скорость, давление и плотность определяются в узлах сетки, являющихся серединами ячеек этой сетки. Значения газодинамических величин в полудельных узлах определяются как среднее арифметическое их значений в прилегающих узлах. Пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности. Производные по времени аппроксимируются разностями вперед с первым порядком. Для численного решения начально–краевой задачи (1)–(3) используется явная по времени разностная схема. Для решения задачи о структуре УВ шаг пространственной сетки выбирается существенно меньшим, чем ширина ударной волны, что обеспечивает устойчивость численного алгоритма без введения искусственной вязкости.

В качестве единиц измерения x , t , ρ , u , p , T , E , H используются величины l , l/c_{∞} , ρ_{∞} , c_{∞} , $\rho_{\infty} c_{\infty}^2$, T_{∞} , $\rho_{\infty} c_{\infty}^2$, c_{∞}^2 соответственно. Здесь l – линейный размер, c_{∞} – скорость звука, ρ_{∞} – плотность, T_{∞} – температура (три последние величины в невозмущенном потоке). Характерный размер l в данной задаче выбирается равным средней длине свободного пробега λ в невозмущенном потоке, которая вычисляется согласно [2]

$$\lambda = \mu / (\rho \sqrt{2\pi RT} \cdot \Omega / 4),$$

где $\Omega = 30 / ((7 - 2\omega)(5 - 2\omega))$.

Обезразмеривание не изменяет вида уравнений. Релаксационный параметр и коэффициенты вязкости и теплопроводности в безразмерном виде вычисляются как

$$\tau = \gamma^{\omega-0.5} \frac{15\sqrt{2\pi}}{2(7-2\omega)(5-2\omega)} \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\omega} \frac{1}{p \cdot Sc}, \quad \eta = \tau \cdot p \cdot Sc,$$

$$\kappa = \frac{\tau \cdot p \cdot Sc}{Pr(\gamma - 1)},$$

причем $p = \rho T / \gamma$. В безразмерном виде число Маха $Ma = u_{\infty}$, скорость звука $c = \sqrt{T}$. Для других математических моделей, используемых в расчетах (система НС, КГДР-система) безразмерные переменные вводятся так же.

4. Постановка задачи

Задача представляет собой моделирование структуры фронта ударной волны в газе для чисел Маха в диапазоне 1.5 ... 10.

Определим расчётную область как $-L \leq x \leq L$. Введем равномерную сетку x_i , $i = 0 \dots N_x - 1$. Безразмерные переменные вводятся на основе значений параметров при $x = -L$. Начальные условия представляют собой разрыв в точке $x = 0$. При этом слева от разрыва $\rho = \rho^{(1)} = 1$, $u = u^{(1)} = Ma$, $p = p^{(1)} = 1/\gamma$, а значения справа от разрыва определяются из условий Гюгонио, которые для применяемого метода обезразмеривания записываются так:

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)} \frac{(\gamma + 1)Ma^2}{2 + (\gamma - 1)Ma^2}, \quad u^{(2)} = u^{(1)} \frac{2 + (\gamma - 1)Ma^2}{(\gamma + 1)Ma^2},$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \frac{2\gamma Ma^2 - \gamma + 1}{\gamma + 1}.$$

Значения на границах расчётной области фиксированы. Критерий прекращения вычислений: $\max(\hat{p} - \rho) / h_t < \varepsilon = 10^{-3}$.

Для каждого значения числа Маха определяется обратная ширина фронта λ / δ , где λ – длина свободного пробега, δ – ширина фронта плотности, определяемая по максимальному значению производной $\partial \rho / \partial x$:

$$\lambda / \delta = \max_i \left(\frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2h_x} \right) \frac{1}{\rho^{(2)} - \rho^{(1)}}.$$

5. Результаты для аргона

Значения параметров для аргона (одноатомный газ) следующие: $\gamma = 5/3$, $\omega = 0.81$, $Sc = 0.752$, $Pr = 2/3$. Показатель степени в законе вязкости и число Шмидта взяты из [2]. Согласно [2] эти значения справедливы при температурах, больших 100 K.

Для расчётов использовалась КГД-система (1)–(3), а также система НС, которая получается из (1)–(3) при $\tau = 0$. Число точек сетки $N_x = 1200$, шаг сетки $h_x = 0.25$. Шаг по времени определяется как $h_t = \alpha h_x / \max(\sqrt{T} + |u|)$, $\alpha = 0.001$.

В табл. 1 показана зависимость обратной ширины фронта ударной волны от числа Маха. Также приведены экспериментальные данные для ударной волны в аргоне из [1].

Таблица 1

Результаты для аргона					
Ma	Обратная ширина фронта УВ λ/δ			Число шагов по времени до сходимости N_t	
	КГД	НС	Эксп.	КГД	НС
1.5	0.134541	0.120355	0.132	$3.00 \cdot 10^5$	$1.16 \cdot 10^6$
2	0.216705	0.205138	0.206	$3.29 \cdot 10^5$	$2.89 \cdot 10^6$
3	0.289559	0.282586	0.267	$5.15 \cdot 10^5$	$4.59 \cdot 10^6$
4	0.300192	0.297951	0.272	$8.58 \cdot 10^5$	$4.73 \cdot 10^6$
5	0.291431	0.293467	0.266	$1.35 \cdot 10^6$	$5.51 \cdot 10^6$
6	0.275964	0.279835	0.260	$1.82 \cdot 10^6$	$9.51 \cdot 10^6$
7	0.259386	0.264237	0.250	$2.24 \cdot 10^6$	$1.32 \cdot 10^7$
8	0.244774	0.249919	0.240	$2.37 \cdot 10^6$	$1.41 \cdot 10^7$
9	0.231849	0.236787	0.229	$3.23 \cdot 10^6$	$1.42 \cdot 10^7$
10	0.220253	0.226382		$3.32 \cdot 10^6$	$1.84 \cdot 10^7$

Полученные значения обратной ширины фронта показаны на рис. 1. Там же изображены экспериментальные данные из [1]. Результаты, полученные автором [1], приведены в табл. 1 и обозначены знаком ∇ на рис. 1.

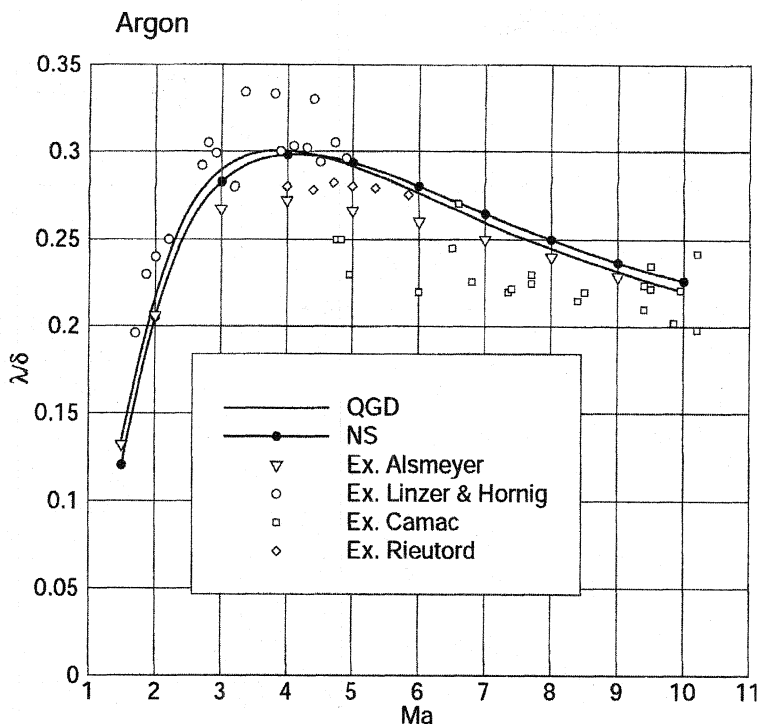


Рис. 1. Зависимость обратной ширины ударной волны от числа Маха для аргона.

Из рис. 1 видно, что во всем диапазоне чисел Маха модели КГД и НС дают очень близкие результаты для ширины УВ, вычисленной по профилю плотности. Эти результаты также хорошо соответствуют экспериментальным данным, особенно с учетом их большого разброса. Однако, как видно из табл. 1, модель НС требует в 5–10 раз больше шагов по времени для установления.

На рис. 2 изображены профили плотности, температуры и скорости в ударной волне в аргоне для $Ma=9$. Профили в ударной волне здесь и далее приведены в нормированном виде, т. е. $f_\rho = (\rho - \rho^{(1)}) / (\rho^{(2)} - \rho^{(1)})$, где f_ρ – значение плотности на рисунке, $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ – значения на границах; аналогично для остальных величин. Экспериментальные точки для профиля плотности взяты из [1]. Видно, что обе модели расчета достаточно хорошо описывают профиль плотности, причем при положительных абсциссах экспериментальные данные располагаются между данными НС и КГД, ближе к данным НС.

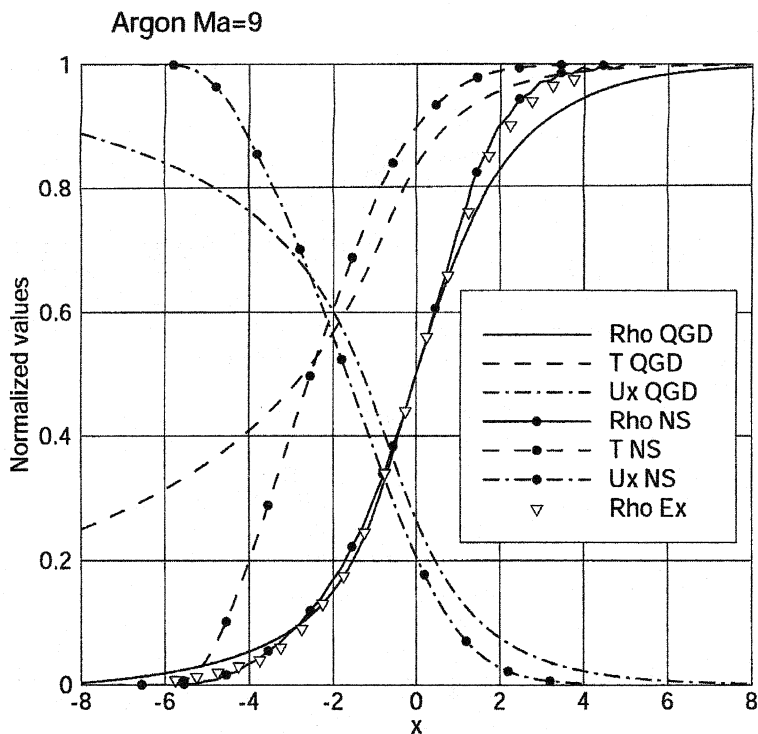


Рис. 2. Профили плотности, температуры и скорости ударной волны в аргоне для $Ma=9$.

На рис. 3 изображены профили плотности в ударной волне в аргоне для $Ma=9$ в увеличенном масштабе. Видно, что алгоритм, основанный на уравнениях НС, в зоне за ударной волной обнаруживает вычислительную неустойчивость – колебания численного решения с периодом, равным шагу пространственной сетки. В тоже время КГД-алгоритм дает гладкую кривую. Эти колебания объясняют медленную сходимость численного решения в модели НС по сравнению с КГД-алгоритмом.

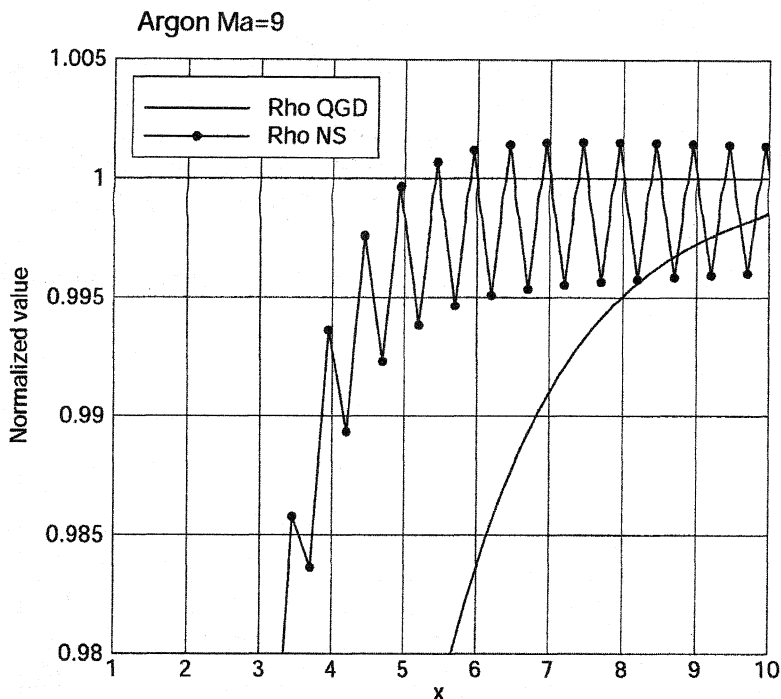


Рис. 3. Профили плотности в ударной волне в аргоне для $Ma = 9$.

Для увеличения устойчивости решения по модели НС обычно вводят искусственную диссипацию, которая может исказить профиль плотности в ударной волне и ухудшать согласие расчетов с данными эксперимента, что особенно заметно при больших числах Маха. По мнению авторов этим объясняется расхождение расчетов по модели НС и данных эксперимента, приводимое во многих публикациях (см., например, результаты [3]), где обратная толщина ударной волны в модели НС оказывается завышенной при $Ma = 4$ на 50%.

Используемый численный алгоритм был исследован на сходимость по сетке. Для этого на основе КГД системы (1)–(3) был проведен расчёт для аргона на сгущённой в 2 раза сетке для $Ma = 10$, $\alpha = 0.0001$, $N_x = 2400$, шаг сетки $h_x = 0.125$. При этом $\lambda/\delta = 0.2211561$, что мало отличается от соответствующего значения для обычной сетки (0.220253). Число шагов по времени в этом случае составило $N_t = 6.6415 \cdot 10^7$. Таким образом, можно утверждать, что в приведенных расчетах достигнута сходимость по сетке и полученные результаты не зависят от шага сетки.

6. Результаты для гелия

Значения параметров для гелия (одноатомный газ) следующие: $\gamma = 5/3$, $\omega = 0.66$, $Sc = 0.7575$, $Pr = 2/3$. Показатель степени в законе вязкости и число Шмидта взяты согласно [3]. Для расчётов использовалась КГД-система (1)–(3), а также система НС. Число точек сетки $N_x = 1200$, шаг сетки $h_x = 0.25$. Шаг по времени определяется как $h_t = \alpha h_x / \max(\sqrt{T} + |u|)$, $\alpha = 0.001$.

В табл. 2 показана зависимость обратной ширины фронта ударной волны от числа Маха.

Таблица 2

Результаты для гелия				
Ма	Обратная ширина фронта УВ λ/δ		Число шагов по времени до сходимости N_t	
	КГД	НС	КГД	НС
1.5	0.130735	0.116774	$3.03 \cdot 10^5$	$1.17 \cdot 10^6$
2	0.218496	0.209097	$3.40 \cdot 10^5$	$2.89 \cdot 10^6$
3	0.317201	0.313207	$5.87 \cdot 10^5$	$4.59 \cdot 10^6$
4	0.351439	0.356489	$1.13 \cdot 10^6$	$5.37 \cdot 10^6$
5	0.356244	0.369419	$1.92 \cdot 10^6$	$5.43 \cdot 10^6$
6	0.357943	0.367763	$2.38 \cdot 10^6$	$9.54 \cdot 10^6$
7	0.352989	0.365042	$3.18 \cdot 10^6$	$1.33 \cdot 10^7$
8	0.345359	0.358542	$3.27 \cdot 10^6$	$1.41 \cdot 10^7$
9	0.336692	0.351158	$3.35 \cdot 10^6$	$1.42 \cdot 10^7$
10	0.327958	0.344274	$3.40 \cdot 10^6$	$1.86 \cdot 10^7$

Эти результаты графически представлены на рис. 4. Также изображены экспериментальные данные из [1].

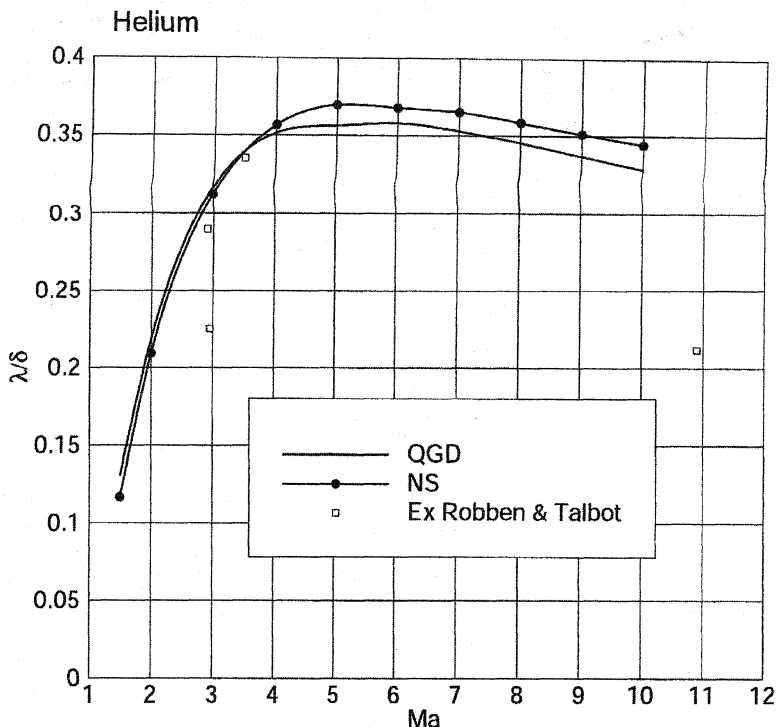


Рис. 4. Зависимость обратной ширины ударной волны от числа Маха для гелия.

Как и случае аргона, модели КГД и НС дают очень близкие результаты для ширины УВ. Данные для $Ma = 3$ и $Ma = 4$ хорошо соответствуют эксперименту. Аналогично предыдущему расчету, НС алгоритм требует в 5–10 раз больше шагов по времени до установления. К сожалению, экспериментальных данных для ширины фронта ударной волны в гелии очень мало.

7. Результаты для азота

Для азота, который является двухатомным газом, значения молекулярных параметров составляли: $\gamma = 7/5$, $\omega = 0.74$, $Pr = 14/19$, $Sc = 0.746$ [2].

Вычисления проводились на основе КГД-уравнений (1)–(3) и на основе системы НС. Кроме того, для учета возможной неравновесности по поступательным и вращательным степеням свободы использовалась КГДР-система для двухатомного газа с учётом двух вращательных степе-

ней свободы [10]. Ранее КГДР уравнения успешно использовались для расчета структуры УВ в азоте, где получено хорошее соответствие с данными кинетических расчетов [10] и экспериментов при моделировании недорасширенных струй [11].

Для одномерного течения КГДР система имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p_t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p_t) = \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3 p_t u), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_t + \frac{\partial}{\partial x} u(E_t + p_t) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} (E_t + \frac{5}{2} p_t) u^2 + \\ &+ \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p_t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p_t + \frac{5}{2 \text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_t}{\rho} + S_t, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_r + \frac{\partial}{\partial x} u E_r &= \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{\partial}{\partial x} E_r u^2 + \frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{p_r}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p_t + \\ &+ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_t \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_r}{\rho} + S_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь E_t , p_t , T_t – трансляционные энергия, давление и температура, E_r , p_r , T_r – вращательные энергия, давление и температура соответственно. При этом $p_t = \rho T_t / \gamma$, $p_r = \rho T_r / \gamma$, $E_t = \rho u^2 / 2 + 3 p_t / 2$, $E_r = p_r$. Эта система уравнений получена для $Sc = 1$.

Обменные члены вычисляются как

$$S_t = -S_r = \frac{3}{5 \tau_r} (p_r - p_t),$$

где τ_r – время вращательной релаксации, $\tau_r = Z \tau_c$,

$$\tau_c = \tau(7 - 2\omega)(5 - 2\omega)/30,$$

$$Z = Z^\infty / [1 + (\pi^{3/2} / 2)(T^* / T_t)^{1/2} + (\pi + \pi^2 / 4)(T^* / T_t)],$$

где $Z^\infty = 23$, $T^* = 91.5 \text{ K}$, при этом температура в невозмущенном потоке $T^{(1)} = 273 \text{ K}$ [2, Приложение]. Для КГДР системы безразмерные параметры вводятся аналогично КГД системе, при этом роль E , p , T играют E_t , p_t , T_t соответственно.

Численный алгоритм расчетов по КГДР модели аналогичен алгоритму для КГД и НС моделей. Параметры расчетов для азота следующие: число точек сетки $N_x = 1200$, шаг сетки $h_x = 0.25$, шаг по времени определяется как $h_t = \alpha h_x / \max(\sqrt{T} + |u|)$ для КГД и НС систем и $h_t = \alpha h_x / \max(\max(\sqrt{T}_t, \sqrt{T}_r) + |u|)$ для КГДР системы, $\alpha = 0.001$. В табл. 3 показана зависимость обратной ширины фронта ударной волны от числа Маха. Там же приведены экспериментальные данные для ударной волны в азоте из [1].

Таблица 3

Результаты для азота							
Ma	Обратная ширина фронта УВ λ/δ				Число шагов по времени до сходимости N_t		
	КГД	КГДР	НС	Эксп.	КГД	КГДР	НС
1.5	0.183010	0.113008	0.168132	0.130	$2.63 \cdot 10^5$	$4.05 \cdot 10^5$	$2.34 \cdot 10^6$
2	0.331473	0.196369	0.325988	0.213	$2.65 \cdot 10^5$	$6.41 \cdot 10^5$	$4.76 \cdot 10^6$
3	0.515218	0.282338	0.537813	0.310	$9.22 \cdot 10^5$	$1.21 \cdot 10^6$	$6.00 \cdot 10^6$
4	0.570161	0.298962	0.626092	0.340	$1.44 \cdot 10^6$	$2.17 \cdot 10^6$	$6.50 \cdot 10^6$
5	0.601312	0.296869	0.680125	0.348	$2.11 \cdot 10^6$	$2.65 \cdot 10^6$	$1.22 \cdot 10^7$
6	0.597862	0.283458	0.679980	0.349	$4.15 \cdot 10^6$	$4.04 \cdot 10^6$	$2.46 \cdot 10^7$
7	0.578844	0.272465		0.335	$4.42 \cdot 10^6$	$4.53 \cdot 10^6$	
8	0.550399	0.259426		0.326	$4.57 \cdot 10^6$	$4.75 \cdot 10^6$	
9	0.544019	0.248212		0.310	$4.67 \cdot 10^6$	$4.91 \cdot 10^6$	
10	0.532717	0.237781			$4.76 \cdot 10^6$	$5.04 \cdot 10^6$	

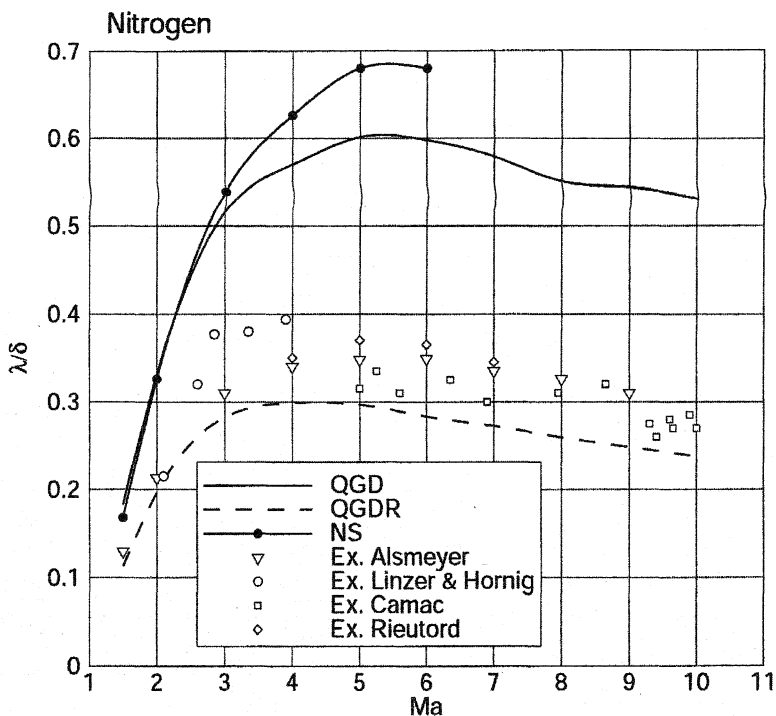


Рис. 5. Зависимость обратной ширины ударной волны от числа Маха для азота

Эти результаты представлены в графическом виде на рис. 5. Также изображены экспериментальные данные из [1], при этом результаты из табл. 3, полученные автором [1], обозначены знаком ∇ .

Из приведенных данных видно, что для чисел Маха 1.5, 2 и 3 результаты для КГД и НС моделей различаются мало. При увеличении числа Маха значения обратной ширины фронта в модели НС становятся больше, чем в КГД модели. Как и в предыдущих расчетах, число шагов по времени до установления для модели НС почти на порядок больше, чем для КГД, а для $Ma \geq 7$ в модели НС не удается получить устойчивое численное решение. КГД алгоритм остается устойчивым и при $Ma \geq 7$.

В отличие от одноатомного аргона, двухатомный азот обладает неравновесностью между вращательными и поступательными степенями свободы. Поэтому КГДР модель, которая приближенно учитывает такую

неравновесность, лучше соответствует эксперименту, чем КГД уравнения, где предполагается энергетическое равновесие.

На рис. 6 и 7 изображены профили плотности, температуры и скорости ударной волны в азоте для $Ma = 6.1$ (для КГДР модели приведено среднее значение температуры $T = (3T_t + 2T_r)/5$, [10]). Экспериментальные точки для плотности на рис. 6 взяты из [1].

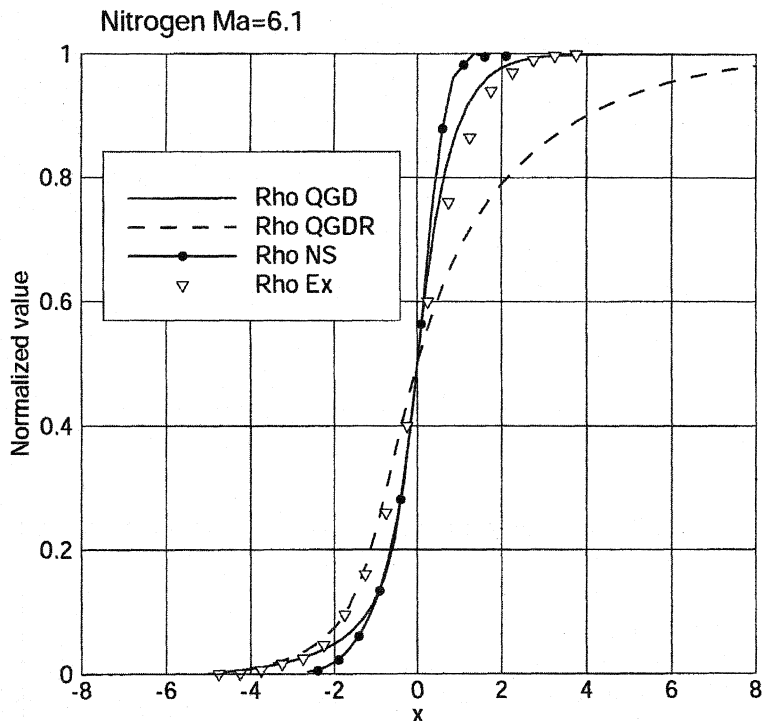


Рис. 6. Профили плотности ударной волны в азоте для $Ma = 6.1$.

Из рис. 6 следует, что профиль плотности лучше всего описывается моделью КГД.

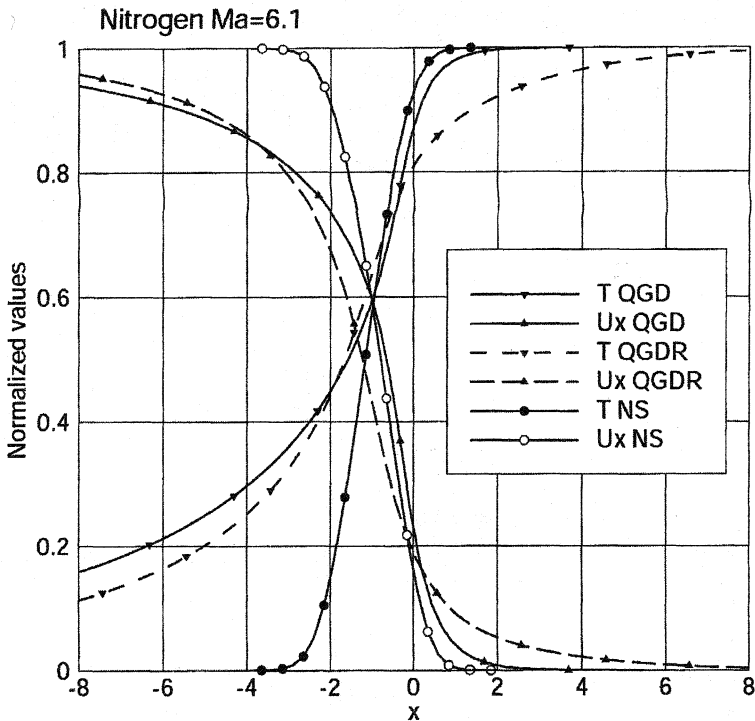


Рис. 7. Профили температуры и скорости ударной волны в азоте для $Ma = 6.1$.

8. Выводы

В работе проведены расчеты структуры ударной волны по моделям НС и КГД, которые сопоставлены с данными экспериментальных измерений профилей плотности для аргона, гелия и азота.

Для КГД уравнений получено, что профили плотности и обратная ширина ударной волны хорошо соответствуют данным эксперимента [1] для одноатомных аргона и гелия для чисел Маха от 1.5 до 10. Для двухатомного азота оценка соответствия КГД расчета и эксперимента оказывается неоднозначной. Профиль плотности в ударной волне хорошо описывается КГД уравнениями, а обратная толщина ударной волны в диапазоне чисел Маха от 1.5 до 10 лучше описывается КГДР моделью, которая приближенно учитывает неравновесность газа по поступательным и вращательным степеням свободы.

Вопреки сложившемуся мнению, уравнения НС достаточно точно описывают профиль плотности в ударной волне для одноатомных аргона и гелия в диапазоне чисел Маха от 1.5 до 10. Для азота обратная толщина ударной волны оказывается завышенной.

Расчеты по КГД и НС уравнениям при условии их идентичной алгоритмической реализации, а именно, использовании аппроксимации второго порядка точности по пространству на равномерной пространственной сетке без дополнительных регуляризаторов, дают близкие результаты. Однако с ростом числа Маха численный алгоритм решения уравнений НС сходится значительно медленнее, чем алгоритм для КГД уравнений. Для увеличения устойчивости решения обычно вводят искусственную диссипацию, которая может исказить решение и ухудшать согласие расчетов с данными эксперимента, что особенно заметно при больших числах Маха.

По мнению авторов этим объясняется расхождение расчетов по модели НС и данных эксперимента, приводимое во многих публикациях (см, например, результаты [3]), где отличия результатов при $Ma = 4$ достигают 50%.

Число шагов по времени до сходимости для всех расчётов меняется в диапазоне $10^5 - 10^7$, что требует до суток работы процессора Pentium 4 1600 МГц.

Литература

1. Alsmeyer H. Density Profiles in Argon and Nitrogen Shock Waves Measured by the Absorption of an Electron Beam. J. Fluid. Mech. (1976), vol. 74, part 3, pp. 479–513.
2. Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Clarendon press, Oxford, 1998.
3. Honma H., Xu D., Oguchi H. Kinetic model approach to shock structure problem revisited. 17th int. Symp. On rarefied Gas Dynamics, 1990, Aachen.
4. Elizarova T.G., Chetverushkin B.N., Sheretov Yu.V. Quasi-gasdynamics equations and computer simulation of viscous gas flows. Lecture Notes in Phys., No 414. Proc. 13th Intern. Conf. on Numer. Meth. in Fluid Dynamics. Roma, Springer-Verlag, 1992, p. 421–425.
5. Elizarova T.G., Graur I.A., Sheretov Yu.V. Quasi-gas dynamic equations and computer simulation of rarefied gas flows. Proceedings of the 19th

International Symposium on Shock Waves, Marseille, France, July 26–30, 1993, Springer v. 4, p. 45–50.

6. Graur I.A., Elizarova T.G., Lengrand J.C. (1997) Quasigasdynamic equations with multiple translational temperatures, Laboratoire d'Aerothermique du CNRS, Meudon (Fr), R-97-1.

7. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. ЖВМиМФ, 2001, т. 41, № 2. с. 239–255.

8. Шеретов Ю.В. О разностных аппроксимациях квазигазодинамических уравнений для осесимметричных течений. В сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2001. С. 191–207.

9. Елизарова Т.Г., Соколова М.Е. Численный алгоритм расчета сверхзвуковых течений, основанный на квазигазодинамических уравнениях. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2004, № 1, с. 10–15.

10. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Макроскопическая модель газа с поступательно-вращательной неравновесностью. ЖВМиМФ, 1999, т. 39, № 1, с. 141–153.

11. Graur I.A., Elizarova T.G., Ramos A., Tejada G., Fernandez J.M., Montero S. Study of shock waves in expanding flows on the basis of spectroscopic experiments and quasigasdynamic equations. Journal of Fluid Mechanics, 2004, v. 504, pp. 239–270.