

*Т.Г. Елизарова, Ю.В. Шертов, И.А. Широков*

## **ПОДАВЛЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОБРАЗЦЕ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ\***

### **1. Введение**

При выращивании полупроводниковых кристаллов методом плавающей зоны важную роль играет температурный режим на фронте кристаллизации. Неоднородности температуры или ее колебания часто приводят к нарушению однородности получаемого образца. Источником неравномерного распределения температуры в расплаве является конвективное течение, возникающее под действием гравитационных или термокапиллярных сил. Его интенсивность может быть уменьшена наложенным магнитным полем. Известен целый ряд экспериментов по изучению влияния постоянного и переменного магнитного поля на движение расплава и распределение примеси в нем [1]–[3].

Математическое моделирование процессов тепло–массообмена в электропроводной жидкости является важным инструментом для детального исследования механизмов выращивания кристаллов. В данной работе выписана квазигидродинамическая (КГД) модель течений квазинейтральной электропроводной жидкости во внешнем электромагнитном поле, предложенная в [4]. Построен ее упрощённый вариант, ориентированный на осесимметричные течения полупроводниковых расплавов. Приведены примеры расчетов, демонстрирующие работоспособность используемого численного алгоритма.

### **2. Математическая модель**

Для величин, характеризующих конвективные течения квазинейтральной электропроводной жидкости, будем использовать следующие обозначения:  $\rho = const > 0$  – среднее значение плотности,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  – вектор гидродинамической скорости,  $p = p(\vec{x}, t)$  – давление, отсчитываемое от гидростатического,  $T = T(\vec{x}, t)$  – отклонение температуры от ее среднего значения  $T_0 = const > 0$ ,  $\vec{H} = \vec{H}(\vec{x}, t)$  и  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$  – напряженности магнитного и электрического полей соответственно. В качестве основной математической модели будем использовать квазимагнитогидродинамическую (КМГД) систему в приближении Обербека–Буссинеска, предложенную [4]. Эта система может быть представлена в виде:

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ИНТАС № 2000–0617 и РФФИ № 01–01–00061.

$$\operatorname{div} \bar{u} = \operatorname{div} \bar{w}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p = -\beta \bar{g} T + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi_{NS} +$$

$$\operatorname{div} [(\bar{w} \otimes \bar{u}) + (\bar{u} \otimes \bar{w})] + \frac{1}{\rho c} [\bar{j}_e \times \bar{H}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{u} T) = \operatorname{div} (\bar{w} T) + \chi \Delta T, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \bar{H} = 0, \quad \bar{j}_e = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \bar{H}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Pi_{NS} = \eta [(\bar{\nabla} \otimes \bar{u}) + (\bar{\nabla} \otimes \bar{u})^T] \quad (5)$$

– навье–стоксовский тензор вязких напряжений. Плотность электрического тока вычисляется по формуле

$$\bar{j}_e = \sigma \left( \bar{E} + \frac{1}{c} [(\bar{u} - \bar{w}) \times \bar{H}] \right), \quad (6)$$

причем

$$\bar{w} = \tau \left[ (\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u} + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p + \beta \bar{g} T - \frac{1}{\rho c} [\bar{j}_e \times \bar{H}] \right]. \quad (7)$$

В уравнениях (1)–(7) температурный коэффициент расширения жидкости  $\beta$ , динамическая вязкость  $\eta = \rho \nu$ , температуропроводность  $\chi$  и электропроводность  $\sigma$  считаются заданными положительными постоянными. Вектор  $\bar{g}$  – ускорение свободного падения,  $c$  – скорость света в вакууме. Релаксационный параметр  $\tau$ , имеющий размерность времени, связан с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$  и скоростью звука при отсутствии электромагнитного поля  $c_s$  соотношением  $\tau = \nu / c_s^2$ . В записи (1)–(7) использованы стандартные обозначения из тензорного анализа.

### 3. Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричные течения полупроводникового расплава в цилиндрической полости с твёрдыми стенками. Пусть  $\Omega = \{(r, z) : 0 < r < R, -A < z < A\}$  – расчетная область, однородное внешнее магнитное поле  $\bar{H}_0$  направленно параллельно оси симметрии цилиндра, вектор  $\bar{g}$  направлен противоположно  $\bar{H}_0$  (см. рис. 1).

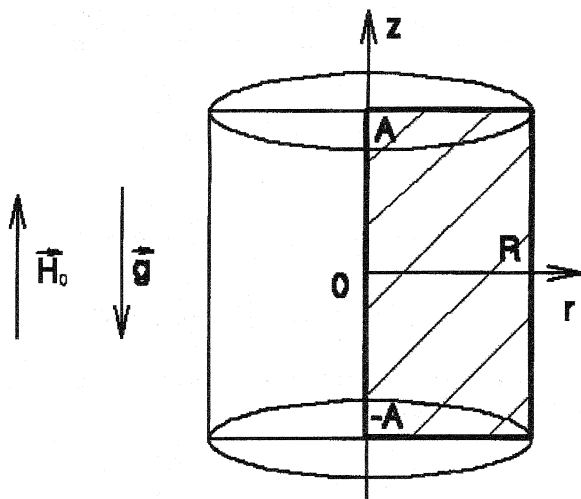


Рис. 1. Схема расчётной области

Безындукционное приближение системы (1)–(7) в цилиндрических координатах  $(r, z)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] - \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + Ha^2 u_r \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - GrT \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z u_r)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Pi_{rr}^{NS})}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{zr}^{NS}}{\partial z} - \frac{\Pi_{\varphi\varphi}^{NS}}{r} + \\ + \frac{2}{r} \frac{\partial (ru_r w_r)}{\partial r} + \frac{\partial (u_r w_z)}{\partial z} + \frac{\partial (u_z w_r)}{\partial z} - Ha^2 (u_r - w_r), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial (u_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Pi_{rz}^{NS})}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{zz}^{NS}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_z w_r)}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r w_z)}{\partial r} + 2 \frac{\partial (u_z w_z)}{\partial z} + GrT, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r T)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z T)}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r T)}{\partial r} + \frac{\partial(w_z T)}{\partial z} + \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]. \quad (11)$$

Здесь

$$w_r = \tau(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} + Ha^2 u_r), \quad (12)$$

$$w_z = \tau(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - GrT). \quad (13)$$

Компоненты навье–стоксовского тензора вязких напряжений  $\Pi^{NS}$  вычисляются по формулам

$$\Pi_{rr}^{NS} = 2 \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \Pi_{zr}^{NS} = \Pi_{rz}^{NS} = \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right),$$

$$\Pi_{\varphi\varphi}^{NS} = 2 \frac{u_r}{r}, \quad \Pi_{zz}^{NS} = 2 \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (14)$$

Система (8)–(14) представлена в безразмерной форме. Она выводится из (1)–(7) при следующих упрощающих предположениях:

- Индуцируемые токи малы. Влиянием электрического поля пренебрегаем.
- Отклонения магнитного поля от  $\vec{H}_0$  в заполняющей полости жидкости считаются малыми.

Закон сохранения массы (1) записан в форме уравнения Пуассона для давления (8).

В качестве единиц измерения  $r$ ,  $z$ ,  $t$ ,  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $w_r$ ,  $w_z$ ,  $p$ ,  $T$  выбраны величины  $R$ ,  $R$ ,  $R^2/\nu$ ,  $\nu/R$ ,  $\nu/R$ ,  $\nu/R$ ,  $\nu/R$ ,  $\rho(\nu/R)^2$ ,  $\Theta$  соответственно, где  $\Theta$  – температура в точке (1,0). Безразмерное значение  $\tau$  вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}_s^2}. \quad (15)$$

Числа Грасгофа  $Gr$ , Гартмана  $Ha$ , Прандтля  $\text{Pr}$  и звуковое число Рейнольдса  $\text{Re}_s$  определяются с помощью выражений

$$Gr = \frac{g\beta\Theta R^3}{\nu^2}, \quad Ha = \frac{RH_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Re_s = \frac{c_s R}{\nu}.$$

Будем считать, что высота цилиндра  $2A = 2R = 2$ . Жидкость прилипает к верхней и нижней крышкам цилиндра. Начальные условия следующие:

$$(u_r)|_{t=0} = (u_z)|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = 1 - |z|. \quad (16)$$

На внешней поверхности действуют силы поверхностного натяжения, обусловленные заданным температурным режимом. Граничные условия представим в виде:

- ось симметрии ( $r = 0, -1 < z < 1$ ):

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \quad (17)$$

- боковая стенка ( $r = 1, -1 < z < 1$ ):

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad T = 1 - |z|; \quad (18)$$

- нижняя ( $0 < r < 1, z = -1$ ) и верхняя ( $0 < r < 1, z = 1$ ) стенки:

$$u_r = u_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = GrT, \quad T = 0. \quad (19)$$

Здесь

$$Ma = -\frac{\Theta R}{\eta\chi} \frac{\partial \sigma_T}{\partial T}$$

– число Марангони,  $\sigma_T$  – коэффициент поверхностного натяжения. Чтобы исключить неоднозначность в определении давления, будем использовать нормировку

$$p(0,0) = 0. \quad (20)$$

#### 4. Вычислительный метод

Для построения явной разностной схемы решения начально-краевой задачи (8)–(20) введем в  $\Omega$  неравномерную сетку

$$\omega = \{(r_i, z_j); i = \overline{0, N_r - 1}; j = \overline{0, N_z - 1}\};$$

$$r_0 = -0.5(r_1 - r_0), \quad r_{N_r-1} = 1 + 0.5(r_{N_r-1} - r_{N_r-2}),$$

$$z_0 = -1 - 0.5(z_1 - z_0), \quad z_{N_z-1} = 1 + 0.5(z_{N_z-1} - z_{N_z-2}).$$

Компоненты скорости, давление и температуру будем относить к узлам  $\omega$ . Аппроксимируем пространственные производные центральными разностями, а производные по времени – разностями вперед. Величины в узлах с полуцелыми индексами определим как полусуммы их значений в соответствующих точках с целыми индексами. Макропараметры в центрах прямоугольных ячеек вычислим как среднее арифметическое их значений в прилегающих угловых точках. Для аппроксимации граничных условий узлы по границам  $\omega$  используем в качестве фиктивных.

Стационарные течения ищем методом установления при  $t \rightarrow \infty$ . Итерации прекращаются при выполнении условия

$$\frac{1}{N_r N_z} \max_{\lambda \in \{r, z\}} \sum_{(r_i, z_j) \in \omega} |(u_\lambda^{up})_{ij} - (u_\lambda)_{ij}| < \varepsilon, \quad (21)$$

где  $(u_\lambda^{up})_{ij}$  – значения компоненты скорости на верхнем временном слое в точках  $(r_i, z_j)$ ,  $\varepsilon$  – заданная точность.

Таким образом, метод конечных разностей приводит к двум вложенным итерационным алгоритмам: внешний (разностная схема для уравнений движения и переноса тепла (9)–(14)) и внутренний (определение давления путем решения дискретного аналога уравнения Пуассона (8)). Число итераций по давлению  $N_p$  считается заданным. В начальный момент времени во всех узлах  $\omega$  используем условие  $p_{ik}^{(0)} = 0$ . Далее величины  $p_{ik}^{(0)}$  считаются равными значениям  $p_{ik}$  на предыдущем слое по времени. На протяжении всего расчёта давление в точке  $(0,0)$  поддерживается постоянным и равным нулю. Для обеспечения устойчивости величина  $\tau$  вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{1}{\text{Re}_s^2} + \tau_0,$$

где  $\tau_0$  – подбираемый в процессе вычислений искусственный регуляризирующий параметр.

## 5. Алгоритм решения уравнения Пуассона в цилиндрической геометрии

На каждом шаге по времени необходимо решать краевую задачу для разностного аналога уравнения Пуассона (8), который запишем в виде

$$G_{ik} f_{ik} = A_{ik} f_{i-1,k} + B_{ik} f_{i+1,k} + E_{ik} f_{i,k-1} + F_{ik} f_{i,k+1} + H_{ik}. \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_{ik} &= [r_i + r_{i-1}] / [r_i(r_{i+1} - r_{i-1})(r_i - r_{i-1})], \\
B_{ik} &= [r_{i+1} + r_i] / [r_i(r_{i+1} - r_{i-1})(r_{i+1} - r_i)], \\
E_{ik} &= 2 / [(z_{k+1} - z_{k-1})(z_k - z_{k-1})], \\
F_{ik} &= 2 / [(z_{k+1} - z_{k-1})(z_{k+1} - z_k)], \\
G_{ik} &= A_{ik} + B_{ik} + E_{ik} + F_{ik}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Величины  $H_{ik}$  определяется правой частью (8). Пусть

$$f_{ik} = \alpha_{ik} f_{i+1,k} + \gamma_{ik} f_{i,k+1} + \delta_{ik}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22), выводим соотношения для прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ik} &= B_{ik} / K_{ik}, \quad \gamma_{ik} = F_{ik} / K_{ik}, \\
\delta_{ik} &= [A_{ik}(\gamma_{i-1,k} f_{i-1,k+1} + \delta_{i-1,k}) + \\
&+ E_{ik}(\alpha_{i,k-1} f_{i+1,k-1} + \delta_{i,k-1}) + H_{ik}] / K_{ik},
\end{aligned} \tag{25}$$

где  $K_{ik} = G_{ik} - A_{ik}\alpha_{i-1,k} - E_{ik}\gamma_{i,k-1}$ .

Формулы (23)–(25) лежат в основе быстросходящегося итерационного алгоритма, аналогичного описанному в [5]. Значения  $f_{i-1,k+1}$ ,  $f_{i+1,k-1}$  в последнем равенстве (25) берутся с нижнего итерационного слоя. На каждом шаге выполняется процедура заполнения значений  $f$  в фиктивных узлах для обеспечения аппроксимации граничных условий.

Для распараллеливания алгоритма решения разностного уравнения Пуассона расчетную область  $\Omega$  разобьем на  $N$  приблизительно одинаковых подобластей  $\Omega_l$  прямыми, перпендикулярными оси  $r$ , таким образом, чтобы  $\Omega_l$  и  $\Omega_{l+1}$  перекрывались. Длины перекрывающихся частей составляют примерно 10–20% от длины любой из пересекающихся областей. Задействуем  $N$  процессоров. Каждый процессор реализует вычисления в одной из подобластей, а алгоритм вычислений идентичен описанному выше. В качестве условий на внутренней границе подобласти используются значения, найденные соседним процессором. При этом результат вычислений слабо зависит как от количества используемых подобластей (процессоров), так и от размеров перекрывающихся частей. Измерения времени работы программ показали, что эффективность распараллеливания алгоритмов такого типа близка к единице, т.е. производительность ЭВМ увеличивается линейно с ростом числа процессоров [6].

## 6. Примеры расчётов

Моделирование течения в цилиндрической полости проводилось для следующих значений параметров:  $Ma = 1000$ ,  $Pr = 0.018$ ,  $Ha = 0, 50, 100$ ,

$Gr = 0$ ,  $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Использовалась равномерная сетка с квадратными ячейками. Шаг по времени:  $\Delta t = 10^{-7}$ . Для ускорения сходимости величина  $N_p$  полагалась равной единице. Вычисления проводились на ЭВМ МВС-1000М с использованием стандарта MPI. Число шагов по времени до сходимости заметно уменьшалось с ростом числа Гартмана (см. табл. 1). Это объясняется уменьшением скоростей конвекции в магнитном поле.

Таблица 1. Параметры расчётов

№ расчёта	Число Гартмана $Ha$	Сетка $N_r \times N_z$	Число шагов по времени до сходимости $N_t$	Минимум функции тока $\psi$	Максимум функции тока $\psi$	Результаты представлены на рисунках
1	0	$82 \times 162$	569477	-249.6	249.6	2-5, 18-19
2	50	$82 \times 162$	84326	-52.2	52.2	6-9, 18-19
3	100	$82 \times 162$	45400	-37.1	37.1	10-13, 18-19
4	100	$162 \times 322$	45574	-37.0	37.0	14-17, 18-19

На рис. 2-17 показаны векторы скорости, линии тока (касательные к скоростям) и линии уровня функции тока, давления и температуры. Функция тока  $\psi$  вычисляется на основе выражений

$$u_r - w_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z - w_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (26)$$

(см. [7], с. 279), с нормировкой  $\psi = 0$  на границе  $\Omega$ . Поскольку добавки к скоростям  $-w_r$  и  $-w_z$  в (26) невелики, касательные к скоростям ведут себя приблизительно так же, как и линии уровня  $\psi$ . Полученное течение практически симметрично относительно плоскости  $z = 0$ , что обусловлено симметричным заданием распределения температуры на боковой стенке и отсутствием гравитации ( $Gr = 0$ ). На рис. 18 показаны одномерные профили  $U_r$  в сечении  $r = 0.85$ , а на рис. 19 – профили  $U_z$  в сечении  $z = 0.85$  для всех расчётов.

Расчёт № 4 (см. табл. 1) был выполнен для таких же значений параметров, как и расчёт № 3, но на сетке, сгущённой в два раза. Полученный результат практически идентичен результату расчёта № 3: на рис. 18 и 19 соответствующие кривые почти совпадают, также ср. значения функции



тока в табл. 1. Это демонстрирует сходимость вычислительного метода по сетке.

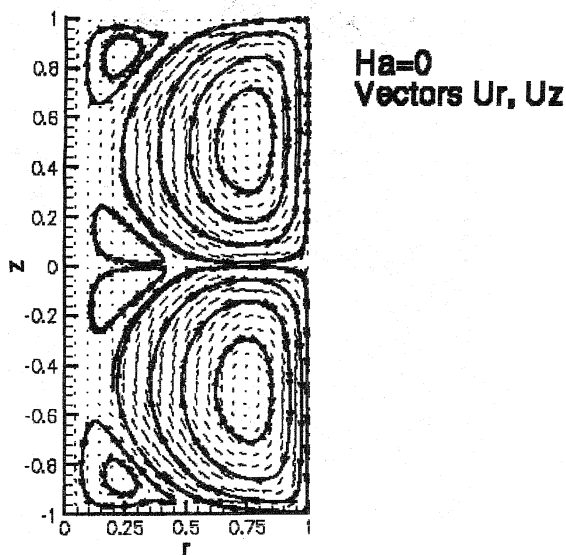


Рис. 2. Векторы скорости и линии тока для  $Ha = 0$ .

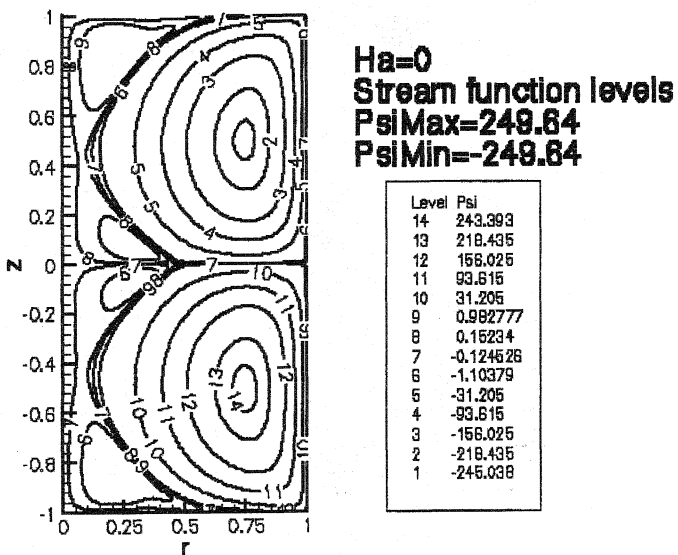
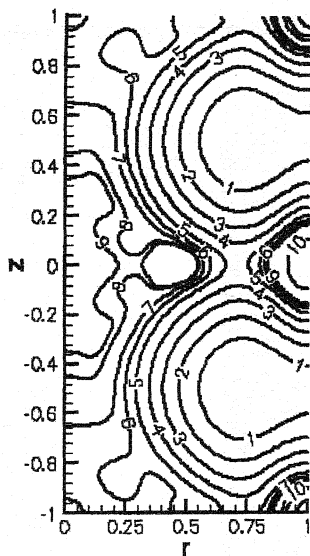


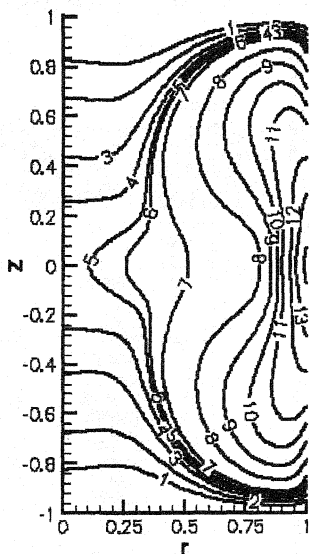
Рис. 3. Линии уровня функции тока для  $Ha = 0$ .



### Ha=0 Pressure levels

Level P	Value
12	1.38662E+06
11	542480
10	304960
9	-8877.6
8	-12108
7	-59260.6
6	-136389
5	-281666
4	-568236
3	-830914
2	-1.10559E+06
1	-1.38027E+06

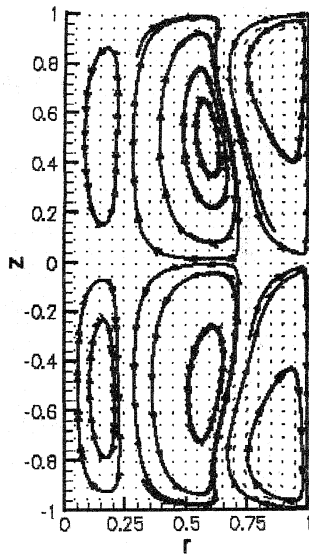
Рис. 4. Линии уровня давления для  $Ha = 0$ .



### Ha=0 Temperature levels

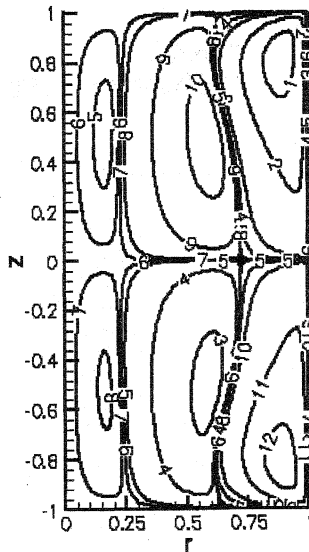
Level T	Value
14	0.928571
13	0.714286
12	0.571429
11	0.428571
10	0.357143
9	0.285714
8	0.214286
7	0.142857
6	0.126389
5	0.122068
4	0.111233
3	0.0969437
2	0.0714286
1	0.0486026

Рис. 5. Линии уровня температуры для  $Ha = 0$ .



**Ha=50**  
**Vectors  $U_r, U_z$**

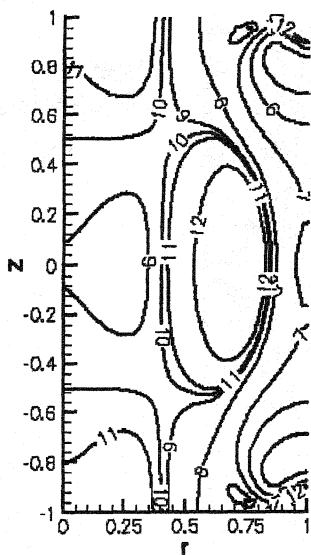
Рис. 6. Векторы скорости и линии тока для  $Ha = 50$ .



**Ha=50**  
**Stream function levels**  
**PsiMax=52.2277**  
**PsiMin=-52.2277**

Level	Psi
12	46.6992
11	19.6954
10	1.52493
9	0.310652
8	0.0150652
7	0.00224492
6	-0.00336507
5	-0.013189
4	-0.278948
3	-1.67713
2	-19.6954
1	-46.6992

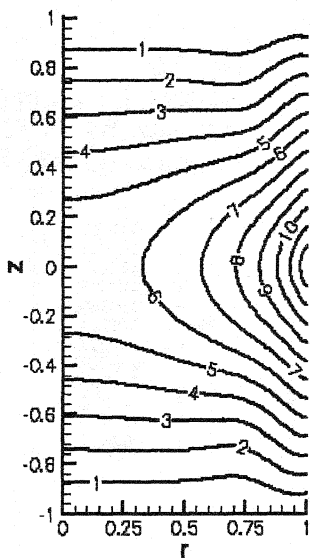
Рис. 7. Линии уровня функции тока для  $Ha = 50$ .



### Ha=50 Pressure levels

Level P	Value
12	2809.02
11	674.65
10	388.052
9	18.734
8	-3237.8
7	-23232.6
6	-52504
5	-95743.1
4	-189236
3	-351538
2	-513841
1	-676143

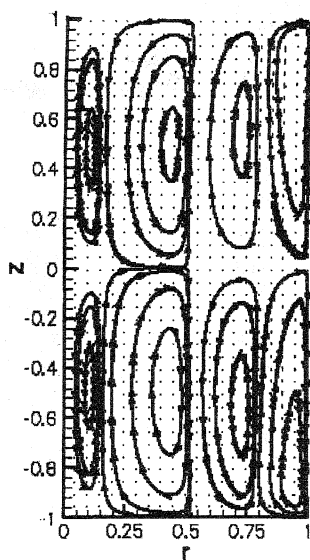
Рис. 8. Линии уровня давления для  $Ha = 50$ .



### Ha=50 Temperature levels

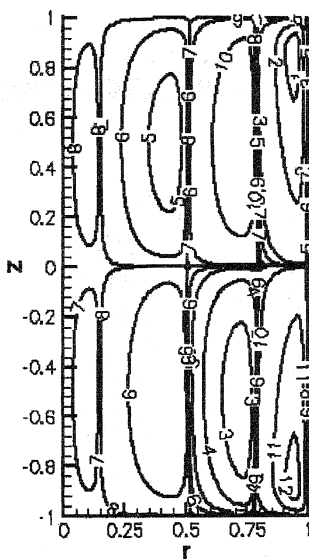
Level T	Value
12	0.923077
11	0.846154
10	0.769231
9	0.692308
8	0.615385
7	0.538462
6	0.461538
5	0.384615
4	0.307692
3	0.230769
2	0.153846
1	0.0769231

Рис. 9. Линии уровня температуры для  $Ha = 50$ .



**Ha=100**  
**Vectors  $U_r, U_z$**

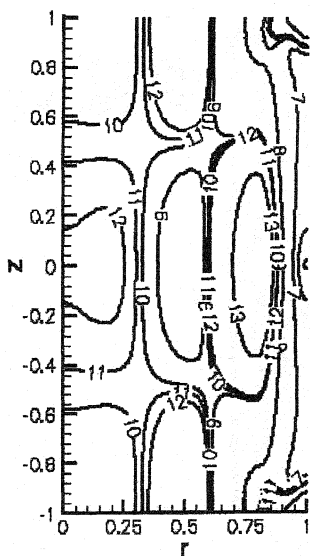
Рис. 10. Векторы скорости и линии тока для  $Ha = 100$ .



**Ha=100**  
**Stream function levels**  
**Psi Max=37.0791**  
**Psi Min=-37.0791**

Level	Psi
12	31.6005
11	13.8832
10	0.606197
9	0.0160166
8	0.000176002
7	-0.000176826
6	-0.00930614
5	-0.0487932
4	-0.289979
3	-1.09246
2	-16.6547
1	-31.6005

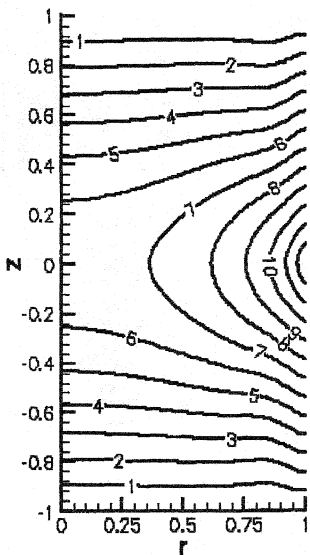
Рис. 11. Линии уровня функции тока для  $Ha = 100$ .



### Ha=100 Pressure levels

Level P	Value
14	135360
13	4769.86
12	-15.4846
11	-113.829
10	-192.506
9	-474.366
8	-10480.4
7	-40502.1
6	-82604
5	-105403
4	-189236
3	-351638
2	-513841
1	-676143

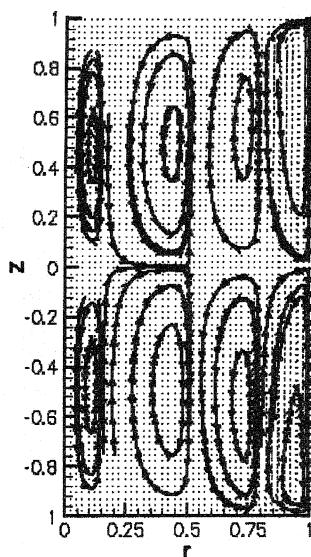
Рис. 12. Линии уровня давления для  $Ha = 100$ .



### Ha=100 Temperature levels

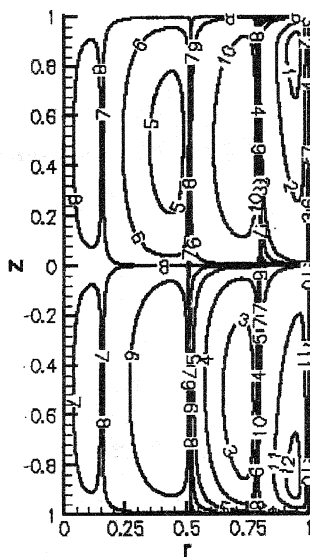
Level T	Value
12	0.923077
11	0.846154
10	0.769231
9	0.692308
8	0.615385
7	0.538462
6	0.461539
5	0.384615
4	0.307692
3	0.230769
2	0.153846
1	0.0769231

Рис. 13. Линии уровня температуры для  $Ha = 100$ .



Ha=100  
Fine grid  
Vectors  $U_r, U_z$

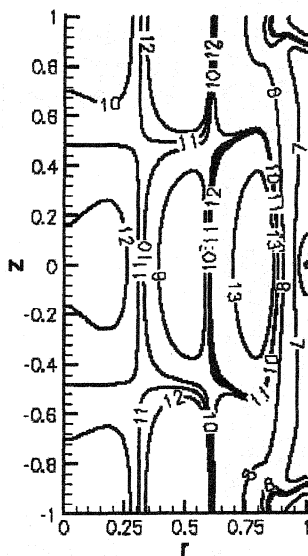
Рис. 14. Векторы скорости и линии тока для  $Ha = 100$  при расчёте на подробной сетке.



Ha=100, fine grid  
Stream function levels  
PsiMax=36.9567  
PsiMin=-36.9567

Level	Psi
12	31.6005
11	13.8632
10	0.606197
9	0.0180188
8	0.000178002
7	-0.000176826
6	-0.00930814
5	-0.0487932
4	-0.289979
3	-1.09246
2	-16.8547
1	-31.6005

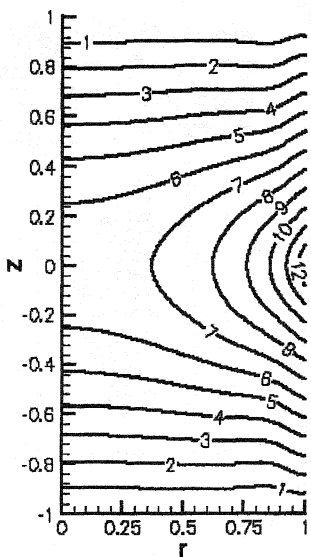
Рис. 15. Линии уровня функции тока для  $Ha = 100$  при расчёте на подробной сетке.



**Ha=100**  
**Fine grid**  
**Pressure levels**

Level P	Value
14	135368
13	4789.86
12	-15.4846
11	-113.829
10	-192.506
9	-474.385
8	-10480.4
7	-40502.1
6	-82804
5	-105403
4	-189238
3	-351538
2	-513841
1	-678143

Рис. 16. Линии уровня давления для  $Ha = 100$  при расчёте на под-  
 робной сетке.



**Ha=100**  
**Fine grid**  
**Temperature levels**

Level T	Value
12	0.923077
11	0.848154
10	0.789231
9	0.592308
8	0.515385
7	0.538482
6	0.481538
5	0.384815
4	0.307692
3	0.230769
2	0.153848
1	0.0769231

Рис. 17. Линии уровня температуры для  $Ha = 100$  при расчёте на  
 подробной сетке.



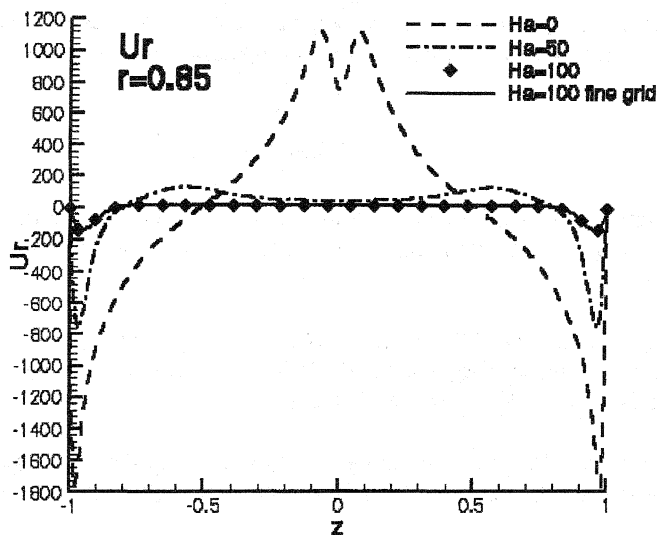


Рис. 18. Профили  $U_r$  в сечении  $r = 0.85$ .

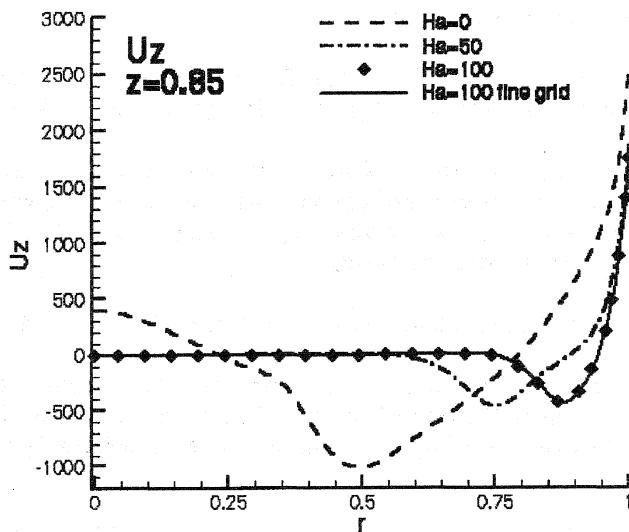


Рис. 19. Профили  $U_z$  в сечении  $z = 0.85$ .

Подобные расчеты проводились ранее на основе двумерных КГД моделей в декартовой геометрии [8], [9]. При этом имеется определенная

аналогия с полученными здесь результатами. В частности, присутствие магнитного поля уменьшает скорости конвекции и расслаивает течение.

## Литература

[1] Dold P., Croll A., Benz K.W. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. I. Weak static axial fields // *Journal of Crystal Growth*. 1998. V. 183. P. 545–553.

[2] Croll A., Szofran F.R., Dold P., Benz K.W., Lehoczky S.L. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. II. Strong static axial fields // *Journal of Crystal Growth*. 1998. V. 183. P. 554–563.

[3] Kaiser Th., Benz K.W. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. III. Numerical simulation // *Journal of Crystal Growth*. 1998. V. 183. P. 564–572.

[4] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.

[5] Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчёта отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989.

[6] Широков И.А. Итерационный метод решения уравнения Пуассона и его реализация на многопроцессорной вычислительной системе // *Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (принято к печати)*.

[7] Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Наука, 1978.

[8] Yelizarova T.G., Zherikov A.V., Kalatchinskaja I.S., Sheretov Yu.V. Numerical Modeling of Convective Flows of the Electrically Conducting Fluid: Abstr. of V International Congress on Mathematical Modeling. Dubna, 2002. V. 1. P. 256.

[9] Елизарова Т.Г., Жериков А.В., Калачинская И.С., Шеретов Ю.В. Численное моделирование конвективных течений электропроводной жидкости в камере // *Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (принято к печати)*.