Ю.А. Еремин

ОБОБЩЕНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ НА СЛУЧАЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ МУЛЬТИПОЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Введение.

Оптическая теорема (ОТ) представляет собой фундаментальный результат теории дифракции волн, который состоит в том, что сумма сечения рассеяния плоской волны на локальном теле и сечения поглощения оказывается равной сечению экстинкции. Сечение экстинкции, в свою очередь, представляет собой функционал диаграммы рассеяния поля в одной единственной точке, в направлении распространения плоской волны.

В российской науке, относящейся к теории дифракции волн, термин ОТ впервые появляется в монографии [1]. Существенную роль ОТ играет при вычислении сечения поглощения, которое представляется в виде разности сечений экстинкции и сечения рассеяния [2]. Подобный подход представляется естественным, так как ближние поля в вычислительной дифракции, как правило, вычисляются с меньшей точностью, чем поля в дальней зоне [3].

ОТ используется в многочисленных приложениях не только теории дифракции световых волн, но и в акустике, сейсмике и даже квантовой механике [4-7]. В вычислительной дифракции она применяется также и для оценки правильности работы компьютерного модуля, в случае рассеивателя без поглощения, посредством сравнения сечений рассеяния и экстинкции [8-9]. Известны обобщения ОТ на случай дифракции поля плоской волны на локальном теле при наличии полупространства [10-12]. В работах [13-14] ОТ обобщена на случай возбуждения рассеивателя точечным источником, расположенным в свободном пространстве. В работе [15] впервые проведено обобщение ОТ на случай возбуждения локального тела осесимметричными мультиполями. В данной работе производится обобщение результатов работы [15] на случай произвольного мультиполя.

Как известно, диаграмма направленности точечного источника недостаточна для проведения направленного сканирования области расположения препятствия. Все это с большим успехом может быть осуществлено посредством использования мультиполей, которые позволяют сформировать более направленную индикатрису рассеяния. В данной работе проведено обобщение ОТ на случай возбуждения локального тела неосесимметричным мультипольным источником любого порядка. Полученное соотношение позволяет тестировать программные модули для случая рассмотрения дифракции волн на прозрачных телах.

Возбуждение локального препятствия мультипольным источником в свободном пространстве.

Рассмотрим математическую постановку задачи дифракции поля мультипольного источника, расположенного в свободном пространстве $\Re^3$ в точке M_0, на локальном проницаемом теле D_i с гладкой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\alpha)}$. Тогда математическая постановка задачи принимает вид

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + k_0^2 U_0 = -J(M, M_0),\ \ M_0 \in D_0 := \Re^3 / \overline{D_i};\\
&\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0,\ \ M \in D_i;\\
&\left[U(P)\right] = \left[\partial U(P)/\partial n\right] = 0,\ \ P \in \partial D_i;\\
&\frac{\partial U_0}{\partial r} + jk_0 U_0 = o(1/r),\ \ r := |M| \to \infty.
\end{aligned} \tag{1}$$

где $J(M, M_0)$ определяется видом и порядком мультиполя, [.] - скачок полей при переходе через ∂D_i, n - нормаль к поверхности ∂D_i, $\operatorname{Im} k_i^2 < 0$, что соответствует временной зависимости $\exp\{j\omega t\}$.

Выберем произвольно начало декартовой системы координат и направим ось Oz так, чтобы она проходила через точку расположения мультиполя $M_0 = (0, 0, z_0)$. Для мультиполей справедливо следующее фундаментальное представление [16]

$$w_n^m(M, M_0) := h_n^{(2)}(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{-jm\varphi} = D_n^m h_0^{(2)}(k_0 R_{MM_0}) \tag{2}$$

при этом

$$D_n^m = (-1)^m j^n \left[\frac{j}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3}$$

здесь $h_n^{(2)}(x)$ - сферическая функция Ханкеля, $R_{MM_0} = |M - M_0|$ - в декартовой системе координат, $P_n^{(m)}(\cos\theta) = \dfrac{d^m P_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$, $P_n(\cos\theta)$ - полином Лежандра. Зафиксируем теперь произвольные целые значения $n, m,\ m \le n$.

Учитывая, что фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид $\Psi(M,M_0)=e^{-jk_0R_{MM_0}}\Big/4\pi R_{MM_0}$ и $h_0^{(2)}(k_0R_{MM_0})=j\dfrac{4\pi}{k_0}\Psi(M,M_0)$, тогда

$$\Delta h_0^{(2)}(k_0R_{MM_0})+k_0^2h_0^{(2)}(k_0R_{MM_0})=-j\frac{4\pi}{k_0}\delta(M-M_0)$$

здесь δ - дельта функция Дирака. В силу определения мультиполей (2), получаем, что

$$\Delta w_n^m+k_0^2w_n^m=\left(\Delta+k_0^2\right)D_n^mh_0^{(2)}(k_0R_{MM_0})=-j\frac{4\pi}{k_0}D_n^m\delta(M-M_0) \qquad (4)$$

Сравнивая (1) и (4) легко видеть, что $J(M,M_0)=j\dfrac{4\pi}{k_0}D_n^m\delta(M-M_0)$. Отметим, что краевая задача (1) в подобной постановке имеет единственное решение [17].

Перейдем к использованию энергетических соотношений применительно к решению граничной задачи (1). Окружим локальный рассеиватель сферой Σ_R радиуса R, содержащей M_0 и D_i внутри себя. Будем обозначать D_R область пространства, ограниченную сферой Σ_R. Применяя в D_R/D_i вторую формулу Грина к решению задачи (1) U_0 и U_0^*, имеем

$$\int\limits_{D_R/D_i}(\Delta U_0\cdot U_0^*-\Delta U_0^*\cdot U_0)d\tau=\int\limits_{\Sigma_R\cup\partial D_i}\left\{\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^*-\frac{\partial U_0^*}{\partial n}U_0\right\}d\sigma \qquad (5)$$

здесь $\dfrac{\partial}{\partial n}$ - нормальная производная к соответствующей поверхности, направленная во вне области D_R/D_i, а звездочка означает комплексное сопряжение. Левую часть (5) преобразуем следующим образом

$$\int\limits_{D_R/D_i}(\Delta U_0\cdot U_0^*-\Delta U_0^*\cdot U_0)d\tau=2j\,\mathrm{Im}\int\limits_{D_R/D_i}J^*(P,M_0)U_0(P)d\tau_P \qquad (6)$$

Тогда соотношение (5) может быть представлено как

$$\mathrm{Im}\int\limits_{D_R/D_i}J^*(P,M_0)U_0(P)d\tau_P=\mathrm{Im}\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U_0}{\partial n}U_0^*d\sigma-\mathrm{Im}\int\limits_{\partial D_i}\frac{\partial U_0}{\partial n^+}U_0^*d\sigma \qquad (7)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n^+}$ нормальная производная по внешней нормали к области D_i. Используя свойства δ - функции [18], интеграл в левой части (7) можно переписать, в виде

$$\operatorname{Im}\int\limits_{D_R/D_i} J^*(P,M_0)U_0(P)d\tau_P = \operatorname{Im}\left\{-j\frac{4\pi}{k_0}\int\limits_{D_R/D_i}\left[D_n^{m*}\delta(P-M_0)\right]U_0(P)d\tau_P\right\}$$
$$=\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Re}\int\limits_{D_R/D_i}\left[\left(D_n^{m*}\right)^T U_0(P)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P \qquad (8)$$

здесь $\left(D_n^{m*}\right)^T$ - транспонированный оператор [19]. Покажем, что $\left(D_n^{m*}\right)^T = (-1)^n D_n^{m*}$, действительно

$$D_n^{m*} = (-1)^m j^n\left[\frac{j}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

тогда, в силу свойств $P_n^{(m)}$ [20], получим

$$\left(D_n^{m*}\right)^T = (-1)^m j^n\left[-\frac{j}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(-\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$=(-1)^m(-j)^n\left[\frac{j}{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^m P_n^{(m)}\left(\frac{j}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Рассмотрим первый интеграл в правой части (7). В силу условий излучения имеем

$$\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U_0}{\partial r}U_0^* d\sigma = -k_0\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}\left|U_0\right|^2 d\sigma_r$$

Используя определение диаграммы направленности $F(\theta,\varphi)$ [17] поля U_0, удовлетворяющего условиям излучения

$$U_0(M) = \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r}F(\theta,\varphi) + o(1/r),\quad r\to\infty$$

Получаем

$$\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial U_0}{\partial r}U_0^* d\sigma = -\frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega}\left|F\right|^2 d\omega \qquad (9)$$

здесь $\Omega=\{0\le\theta\le\pi;\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ - единичная сфера.

Применим теперь 2ю формулу Грина к U_i и U_i^* внутри D_i

$$\int\limits_{D_i}(\Delta U_i\cdot U_i^* - \Delta U_i^*\cdot U_i)d\tau = \int\limits_{\partial D_i}\left\{\frac{\partial U_i}{\partial n^+}U_i^* - \frac{\partial U_i^*}{\partial n^+}U_i\right\}d\sigma$$

Преобразуя последнее соотношение, используя условия сопряжения для полей на ∂D_i, имеем

$$\operatorname{Im}\int_{\partial D_i}\frac{\partial U_0}{\partial n^+}U_0^* d\sigma = -\operatorname{Im}k_i^2\int_{D_i}\left|U_i\right|^2 d\tau \tag{10}$$

Учитывая (8)-(10), соотношение (7) приобретает следующий вид

$$\begin{gathered}(-1)^n\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Re}\int_{D_R/D_i}\left[D_n^{m*}U_0(P)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P = -\frac{1}{k_0}\int_{\Omega}\left|F\right|^2 d\omega \\ -\left|\operatorname{Im}k_i^2\right|\int_{D_i}\left|U_i\right|^2 d\tau\end{gathered} \tag{11}$$

Представим полное поле в D_0 / D_i в виде суммы $U_0(M) = U_0^s(M) + w_n^m(M, M_0)$. Здесь U_0^s - рассеянное поле, а w_n^m - поле источника внешнего возбуждения. Тогда (11) можно переписать следующим образом

$$\begin{gathered}(-1)^{n-1}\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Re}\int_{D_R/D_i}\left[D_n^{m*}w_n^m(P,M_0)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P \\ +(-1)^{n-1}\frac{4\pi}{k_0}\operatorname{Re}\left\{D_n^{m*}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0} = \frac{1}{k_0}\int_{\Omega}\left|F\right|^2 d\omega + \left|\operatorname{Im}k_i^2\right|\int_{D_i}\left|U_i\right|^2 d\tau\end{gathered} \tag{12}$$

Заметим, что выражение в фигурных скобках существует при любых $n, m,\ m \le n$, так как $U_0^s(M)$ является аналитической функцией всюду вне области, занятой препятствием D_i [17].

Вместо того, чтобы вычислять оставшийся интеграл по объему заметим, что он равен полному сечению излучения мультиполя $w_n^m(M, M_0)$. В этом легко убедиться, "убрав" рассеиватель. Тогда в правой части останется лишь слагаемое $\frac{1}{k_0}\int_{\Omega}\left|F_w\right|^2 d\omega$, где F_w- диаграмма направленности излучения мультиполя. Учитывая определение мультиполей (2), для диаграммы имеет место представление [20]

$$F_w(\theta,\varphi) = (j)^{n+1}\exp\left\{-jk_0 z_0\cos\theta\right\}P_n^m(\cos\theta)e^{-jm\varphi}$$

Тогда

$$\int_{\Omega}\left|F_w\right|^2 d\omega = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}P_n^{m2}(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Таким образом, получаем что

$$(-1)^{n-1}\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Re}\int\limits_{D_R/D_i}\left[D_n^{m*}w_n^m(P,M_0)\right]\delta(P-M_0)d\tau_P=\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \qquad (13)$$

Собирая вместе (12)-(13), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}+(-1)^{n-1}\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Re}\left\{D_n^{m*}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0}=\frac{1}{k_0}\int\limits_{\Omega}|F|^2d\omega \\ +\left|\mathrm{Im}\,k_i^2\right|\int\limits_{D_i}|U_i|^2d\tau\end{gathered} \qquad (14)$$

Или, вводя в рассмотрение обозначения для полного сечения рассеяния $C_{sc}:=1/k_0\int\limits_{\Omega}|F|^2d\omega$ и сечения поглощения $C_{abs}=\left|\mathrm{Im}\,k_i^2\right|\int\limits_{D_i}|U_i|^2d\tau$, перепишем (14), как

$$\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}+(-1)^{n-1}\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Re}\left\{D_n^{m*}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0}=C_{sc}+C_{abs} \qquad (15)$$

В правой части (15) стоят соответственно сечение рассеяния σ_{sc}, включающее в себя энергию излучения мультиполя, и сечение поглощения σ_{abs}. В силу определения [2], левая часть представляет собой сечение экстинкции σ_{ext}, то есть

$$C_{ext}=\frac{4\pi}{k_0}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}+(-1)^{n-1}\frac{4\pi}{k_0}\mathrm{Re}\left\{D_n^{m*}U_0^s(M)\right\}_{M=M_0} \qquad (16)$$

Полученное соотношение (16) и представляет собой формулировку обобщенной оптической теоремы для возбуждения локального рассеивателя мультипольным источником единичной амплитуды.

Заключение.

В настоящей работе впервые получено обобщение оптической теоремы на случай возбуждения локального препятствия неосесимметричным мультипольным источником $(m\neq 0)$. Полученное соотношение позволяет тестировать программные модули для случая рассмотрения дифракции волн на прозрачных телах.

Список литературы.

1. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции М. Мир, 1964.
2. *Mishchenko, M. I.* The electromagnetic optical theorem revisited//J. Quantitat. Spectr. Radiat. Trans. 2006. V.101. P.404-410.
3. *Фарафонов В.Г., Ильин В.Б., Винокуров А.А.* Рассеяние света несферическими частицами в ближней и дальней зонах: применимость методов со сферическим базисом//Оптика и спектроскопия. 2010. Т.109. С.476-487.
4. *Newton, R. G.* Scattering Theory of Waves and Particles. New York: Springer, 1982.
5. *Ström S.* The scattered field/Field representation and introduction to scattering. Ed.: V.V. Varadan, A. Lakhtakia, V.K. Varadan. Elsevier Science Publisher, 1991. P.143-149.
6. *Berg M.J., Sorensen C.M., Chakrabarti A.* Extinction and the optical theorem. Part I, Single particles//J. Opt. Soc. Am. A. 2008. V.25. N7. P.1504-1513.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Издание 4-е. М.: Наука, 1989.
8. *Фарафонов В.Г., Ильин В.Б.* Рассеяние света неоднородными несферическими частицами. СПбГУ: ВВМ, 2009.
9. *Mackowski D. W.* Calculation of total cross sections of multiple-sphere clusters//J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V.11. P.2851-2861.
10. *Carney P. S., Schotland J. C., Wolf E.* Generalized optical theorem for reflection, transmission, and extinction of power for scalar fields//Phys. Rev. E. 2004. V.70. N3. 036611.
11. *Еремин Ю.А.* Обобщение оптической теоремы на основе интегро-функциональных соотношений//Дифференц. уравнения. 2007. Т.43. №9. С.1168-1172.
12. *Small A., Fung J., Manoharan V.N.* Generalization of the optical theorem for light scattering from a particle at a planar interface//J. Opt. Soc. Am. A. 2013. V.30. N.12. P.2519-2525.
13. *Athanasiadis C., Martin P. A., Spyropoulos AStratis., I. G.* Scattering relations for point sources. Acoustic and electromagnetic waves//J. Math. Phys. 2002. V.43, N11. P.5683-5697.
14. *Venkatapathi M.* Emitter near an arbitrary body: Purcell effect, optical theorem and the Wheeler–Feynman absorber//J. Quantitat. Spectr. Radiat. Transfer. 2012. V.113. P.1705–1711.
15. *Еремин Ю. А., Свешников А. Г.* Оптическая теорема для мультипольных источников в теории дифракции волн//Акустический журнал. 2016. Т.62. №3. С.271-276.

16. *Devaney A.J.*, *Wolf E.* Multipole expansions and plane wave representations of the electromagnetic field//*J.* Math. Phys. 1974. V.15, P.234–244.
17. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир, 1987.
18. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
19. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
20. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973.