Д.С. Филиппычев

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДУАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА К УРАВНЕНИЮ, ОПИСЫВАЮЩЕМУ ПОВЕДЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ *

1. Введение

Сингулярно-возмущенное интегро-дифференциальное уравнение плазма-слой с ядром Эммерта [1] описывает распределение потенциала, как в слое, так и в основном объеме плазмы. Перед старшей (второй) производной этого уравнения стоит малый параметр μ^2. В работе [2] к этому уравнению применялся метод пограничных функций [3-5], в котором решение представляется в виде регулярного и пограничного рядов по степеням μ в виде $u(\xi,\mu)=Ru(\xi,\mu)+\Pi u(\zeta,\mu)$. Здесь $\zeta\equiv(1-\xi)/\mu$ – растянутая переменная. После формальной подстановки разложения в рассматриваемое уравнение коэффициенты рядов $Ru(\xi,\mu)$ и $\Pi u(\zeta,\mu)$ определяются в результате приравнивания членов одного порядка по μ (раздельно для членов, зависящих от ξ и ζ. Пограничная функция k-го порядка определяется как коэффициент при μ^k пограничного ряда $\Pi u(\zeta)=\sum\limits_{k=0}\Pi_k u(\zeta)\mu^k$.

За вырожденное решение метода выбиралось одно из аналитических решений плазменного уравнения $(\mu=0)$ работы [1]. Были получены уравнения, описывающие поведение коэффициентов разложения до первого порядка по μ. Регулярный ряд нулевого порядка является плазменным приближением, а для коэффициента первого порядка $(R_1u(\xi))$ получено однородное сингулярное интегральное уравнение первого рода. В работе [6] было строго доказано, что однородное интегральное уравнение относительно $R_1u(\xi)$ имеет только тривиальное решение. В данной работе рассматривается применение метода дуального оператора [7,8] к дифференциальному уравнению второго порядка относительно пограничной функции нулевого порядка $(\Pi\equiv\Pi_0u(\zeta))$.

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 02-01-00299.

2. Уравнение плазменного приближения

В настоящей работе нас будет интересовать узкая область вблизи правой границы. Поэтому рассмотрим правую часть уравнения Тонкс - Ленгмюра в области $1/2 \le \xi \le 1$ [1] $\left(0 \le \zeta \le 1/2\mu\ [\,]\right)$:

$$f(u) = -e^{-u} + b\int\limits_0^{1/2} B_0(x)d\xi' = -e^{-u} + 2\mu b \int\limits_{1/2\mu}^{1/\mu} B_0(x)d\zeta' \;, \tag{1}$$

$$u = u(\xi) = u(1-\mu\zeta) \equiv u(\zeta),\; u' = u(\xi') \equiv u(\zeta'),\; x \equiv u - u',$$

$B_0(x) = \mathrm{e}^x\left\{1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{x}\right)\right\}$, $\mathrm{erf}(z)$ – функция ошибок, b, μ – параметры задачи, имеющие постоянные значения.

Положив в уравнении Тонкс-Ленгмюра формально $\mu = 0$, получим уравнение *плазменного приближения* ($0 = f(u)$), справедливое только в области вне пристеночного слоя и для которого имеется только одно краевое условие $u(0) = 0$. Процедура получения решения интегрального уравнения плазменного приближения подробно рассматривалась, как в оригинальной работе [1], так и в работах автора [2, 6, 9-12]. Решение для произвольной функции источника $h(\xi)$ было получено в неявном виде [1]: $\pi Bh(u)\sqrt{u}\dfrac{d\xi}{du} = 1 - 2\sqrt{u}D(\sqrt{u})$. Здесь $D(x) \equiv \exp(-x^2)\int\limits_0^x \exp(t^2)dt$ – функция Доусона, $\mathrm{B} \equiv \mathrm{b}/2\sqrt{\pi}$. В данной работе, как и в работах [2, 6, 9-12], используется $h(\xi)$, соответствующая одной из форм функции источника работы [1] $h(\xi) = \{2\;,\; 0 < \xi < 1/2 = \xi_S;\; 0,\; 1/2 < \xi\}$. В этом случае решение плазменного приближения дается выражением $\left\{\pi B\xi = D(\sqrt{u_0(\xi)}),\; 0 \le \xi < 1/2;\;\; \pi B = 2D(\sqrt{u_0(\xi)}),\;\;\; \xi \ge 1/2\right\}$.

После интегрирования по всей области с учетом нормировки работы [1] $\int\limits_0^1 h(\xi')d\xi' = 1$ получается соотношение $\pi B = 2D(\sqrt{u_1})$, в котором величина u_1 соответствует значению решения уравнения плазменного приближения на входе в слой $\xi = 1$. В работе [1] для нахождения u_1 было выведено трансцендентное уравнение, решение которого можно получить только численными методами. После нахождения u_1 вычисляется параметр B и, следовательно, b. При значениях $\xi \ge 1/2$ решением уравнения плазменного приближения является $u_0(\xi) = const = u_0(1) = u_1 = 0.40445$, а величина $b = 1.10421$.

3. Дифференциальное уравнение для вычисления пограничной функции нулевого порядка

В работе [2] метод пограничных функций [3-5] применялся к уравнению плазма слой. Было получено уравнение для определения пограничной функции нулевого порядка $\Pi u_0(u(\zeta))$:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_0 u(\zeta)=\Pi_0 F(u). \tag{2}$$

Сингулярная часть разложения $\Pi f(u(\zeta),\zeta;\mu)$ в нулевом приближении определяется выражением

$$\Pi_0 f(u(\zeta),\zeta)=\left[f(u_0(1-\mu\zeta)+\Pi_0 u(\zeta),\zeta)-f(u_0(1-\mu\zeta),\zeta)\right]_{\mu=0}=$$
$$=f(u_0(1)+\Pi_0 u(\zeta),\zeta)-f(u_0(1),\zeta). \tag{3}$$

Здесь было использовано определение $R_0 u(\xi)=u_0(\xi)$. Переменная разностных ядер интегралов $x=u-u'$ для первого слагаемого правой части (3) преобразуется к виду $x=\Pi_0 u(\zeta)-\Pi_0 u(\zeta')$, в то время как для второго слагаемого (3) эта разность обращается в нуль $x=0$. В дальнейшем будут использоваться обозначения: $\Pi\equiv\Pi_0 u(\zeta)$; $\Pi'\equiv\Pi_0 u(\zeta')$. Например, $x=\Pi-\Pi'$.

При переходе к интегрированию по "растянутой" координате $\zeta=(1-\xi)/\mu$ интегралы преобразуются к виду $\int[]\mathrm{d}\xi=-\mu\int[]d\zeta$ (см. (1)). На первый взгляд, из последнего соотношения следует, что вклад интегральных членов в сингулярную часть правой части уравнения начинается только с первого порядка по μ. Таким образом, в нулевом порядке сингулярная часть правой части уравнения (2) принимает вид: $\Pi_0 F(u,\zeta)=-\mathrm{e}^{-u}\Big|_{u=u_0(\xi)}^{u=u_0(\xi)+\Pi_0 u(\zeta)}=c\left(1-\mathrm{e}^{-\Pi_0 u(\zeta)}\right)$, где $c\equiv\mathrm{e}^{-u_1}=0.66734$. В этом предположении было получено уравнение для нахождения пограничной функции нулевого порядка [2]:

$$\frac{d^2U(\zeta)}{d\zeta^2}=c\left(1-e^{-U(\zeta)}\right)\equiv F(U),U\equiv\Pi_0 u(\zeta) \tag{4}$$

с краевыми условиями: $U(\zeta=0)=C_W=u_W-u_1=2.56172$, $U(\zeta\to\infty)\to 0$. Численные алгоритмы получения решения этого дифференциального уравнения, а также его асимптотические решения рассматривались в работах [2, 6, 9, 10].

Применяя (3) к полной правой части (2), получаем уравнение:

$$\frac{d^2\Pi}{d\zeta^2} = c\left(1 - e^{-\Pi}\right) + b\left\{2\mu \int\limits_{1/2\mu}^{1/\mu} B_0(x)d\zeta' - 1\right\}. \tag{5}$$

В работе [13] было показано, что вклад интегрального члена в сингулярную часть правой части уравнения (5) в нулевом порядке сводится к дополнительному алгебраическому члену. Таким образом, получается снова дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\Pi}{d\zeta^2} = c\left(1 - e^{-\Pi}\right) + b\{B_0(\Pi) - 1\} \equiv F^M(\Pi). \tag{6}$$

4. Метод дуального оператора

В этом разделе рассматривается нелинейное уравнение общего вида:

$$N\big(u(x), \alpha(x),\ x\big) = 0, \tag{7}$$

где $\alpha = \alpha(\alpha_1, ..., \alpha_I)$ - вектор параметров, появляющийся при математическом описании физической задачи. Дуальный оператор [7,8] является аналогом сопряженного оператора линейной теории. Для его формирования необходимо существование производной Гатто для оператора $N(u)$:

$$\delta N(u_0; h) = \left.\frac{dN(u_0 + \varepsilon h)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = N'(u_0)h. \tag{8}$$

Дуальный оператор $[N'(u)]^*$ определяется равенством:

$$[N'(u)h, v] = \left\langle h, [N'(u)]^* v\right\rangle + \{\sigma(u)\,(h, v)\}. \tag{9}$$

Здесь скобки $[.,.]$ и $\langle .,. \rangle$ обозначают скалярные произведения, соответственно, в исходном и дуальном пространствах, а фигурная скобка $\{...\}$- бинарную форму граничных (начальных и/или краевых) условий, получающуюся в результате интегрирования. В методе дуального оператора [7] формируются интегральные операторы:

$$L(u) = \int_0^1 N'(\varepsilon u)d\varepsilon \text{ и } L^*(u) = \int_0^1 [N'(\varepsilon u)]^* d\varepsilon. \tag{10}$$

Эти интегральные операторы используются при записи уравнений для запаздывающего пропагатора (retarted propagator) $G\big(u(x); x, x'\big)$ и опережающего пропагатора (advanced propagator) $G^*\big(u(x); x, x'\big)$, которые являются аналогами функции Грина линейной теории. В оставшейся части этой работы будет использоваться только опережающий пропагатор $G^*(u(x); x, x')$, для нахождения, которого получается линейное уравнение

$$L^*(u(x))G^*(u(x); x, x') = \delta(x - x') \qquad (11)$$

с соответствующими граничными условиями. С помощью $G^*(u(x); x, x')$ решение исходного уравнения выписывается в следующем виде [7]:

$$u(x') = -\left[N(u(x)), G^*(u(x); x, x')\right] + \left\langle u(x), L^*(u(x))G^*(u(x); x, x')\right\rangle \qquad (12)$$

5. Применение метода дуального оператора к уравнению, описывающего поведение $\Pi_0 u(\zeta)$ при $b = 0$ (4)

В работе [9] метод дуального оператора [7, 8] использовался для нахождения приближенного решения уравнения (4). Решение задачи получалось в результате следующей последовательности операций.

1) Исходный нелинейный оператор (7) $N(u) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - c\left(1 - e^{-u}\right)$. где $c \equiv \mathrm{e}^{-u_0(\zeta)} = \mathrm{e}^{-u_1}$. Последнее равенство выполняется при $1/2 \le \zeta$.

2) Производная Гатто (8) $\delta N(u_0; h) = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - ce^{-u_0}\right)h = N'(u_0)h$.

3) $N'(\Pi) = \left[N'(\Pi)\right]^* = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - ce^{-\Pi}$.

4) Интегральный оператор (10) выглядит следующим образом:

- $L^*(\Pi) = L(\Pi) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - \dfrac{c}{\Pi}\left(1 - e^{-\Pi}\right)$.

5) Уравнение для пропагатора (11) $G(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta') \equiv G^*(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta')$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\zeta^2} - AG = \delta(\zeta - \zeta'), \qquad (13)$$

где

$$A = A(\Pi) \equiv \frac{c}{\Pi}\left(1 - e^{-\Pi}\right). \qquad (14)$$

Решение исходного уравнения (4) принимает следующий вид: $\Pi(\zeta') = \Pi \left.\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}^{L} - \left.\dfrac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\zeta} G\right|_{\zeta=\zeta_0}^{L}$. Здесь для общности начальная координата обозначена через ζ_0.

Выберем для пропагатора однородные краевые условия первого рода: $\mathrm{G}(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta')\big|_{\zeta=\zeta_0} = \mathrm{G}(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta')\big|_{\zeta=L} = 0$. Тогда выражение для решения упрощается за счет устранения производной $\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}\zeta$: $\Pi(\zeta')=\Pi\left(\mathrm{d}G/\mathrm{d}\zeta\right)_{\zeta=\zeta_0}^{L}$.

В грубом приближении постоянного коэффициента $A(\Pi)=const$ уравнение (13) становится дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом и имеет аналитическое решение:

$$G(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')=\left\{H(\zeta-\zeta')-\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\right\}\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta')\right]}{\sqrt{A}}. \tag{15}$$

При этом первая производная вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta}=\left\{H(\zeta-\zeta')-\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\right\}\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta')\right].$$

Уравнение (4) имеем решение

$$\Pi(\zeta)=\Pi(L)\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta_0)\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}+\Pi(\zeta_0)\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}. \tag{16}$$

Здесь сделана замена $\zeta'\Rightarrow\zeta$.

При условии $\Pi(L)=0$ (например, при $L=1/\mu$, или при $L\to\infty$) выражение (16) упрощается. В итоге приходим к аналитическому решению, для которого необходимо знать только краевое значение при $\zeta=\zeta_0=0$ $\left(\Pi(0)=C_W\right)$:

$$\Pi(\zeta)=\Pi(0)\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}L\right]}. \tag{17}$$

6. Применение метода дуального оператора к дифференциальному уравнению второго порядка, описывающего поведение $\Pi_0 u(\zeta)$

Здесь рассматривается уравнение (6), в правой части которого добавлен по сравнению с уравнением (4) дополнительный член. В результате получаем следующие соотношения.

1) Исходный нелинейный оператор (7) преобразуется к виду: $N(u)=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}-c\left(1-e^{-u}\right)-b\left\{e^{\Pi}\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\Pi}\right)\right]-1\right\}$.

2) Производная Гатто (8)

$$\delta N(u_0;h)=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}-ce^{-u_0}\right)h-b\left\{\mathrm{e}^{\Pi}\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\Pi}\right)\right]-1/\sqrt{\pi\Pi}\right\}h=N'(u_0)h.$$

3) $N'(\Pi)=\left[N'(\Pi)\right]^*=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}-ce^{-\Pi}-b\left\{\mathrm{e}^{\Pi}\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\Pi}\right)\right]-1/\sqrt{\pi\Pi}\right\}h.$

4) Интегральный оператор (10) выглядит следующим образом: $L^*(\Pi)=L(\Pi)=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2}-\dfrac{1}{\Pi}\left\{c\left(1-e^{-\Pi}\right)-b\left\{\mathrm{e}^{\Pi}\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\Pi}\right)\right]-1\right\}\right\}.$

5) Уравнение для нахождения пропагатора остается прежним (13) за исключением значения A. Вместо (14) теперь имеем: $A(\Pi)\equiv\left\{c\left(1-e^{-\Pi}\right)+b\left[\mathrm{e}^{\Pi}\left[1-\mathrm{erf}\left(\sqrt{\Pi}\right)\right]-1\right]\right\}/\Pi=F^M(\Pi)/\Pi.$

Как показали расчеты [13], $A(\Pi)<0$ для всех положительных значений Π. Поэтому перепишем (13) в следующем виде $\left(g\equiv\sqrt{|A|}\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\zeta^2}+g^2G=\delta(\zeta-\zeta').$$

После применения метода вариации постоянных, общее решение этого уравнения $G=C_1\cos(g\zeta)+C_1\sin(g\zeta)$ принимает следующий вид:

$$G(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')=\frac{\sin[g(\zeta-\zeta')]}{g}H(\zeta-\zeta')+C_{10}\cos(g\zeta)+C_{20}\sin(g\zeta).$$

Для пропагатора выберем однородные краевые условия первого рода: $\mathrm{G}(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')\big|_{\zeta=\zeta_0}=\mathrm{G}(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')\big|_L=0$. Тогда в грубом приближении $g=const$ получаются значения постоянных C_{10} и C_{20}. После этого находятся выражения для пропагатора

$$G=\frac{\sin[g(\zeta-\zeta')]}{g}H(\zeta-\zeta')-\frac{\sin[g(L-\zeta')]}{g\sin[g(L-\zeta_0)]}\sin[g(\zeta-\zeta_0)]$$

и его первой производной

$$\frac{dG}{d\zeta}=\cos[g(\zeta-\zeta')]H(\zeta-\zeta')-\frac{\sin[g(L-\zeta')]}{\sin[g(L-\zeta_0)]}\cos[g(\zeta-\zeta_0)].$$

На границах области производная принимает следующие значения:

$$\left.\frac{dG}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=-\frac{sin[g(L-\zeta')]}{\sin[g(L-\zeta_0)]},\quad \left.\frac{dG}{d\zeta}\right|_{\zeta=L}=\frac{\cos[g(\zeta'-\zeta_0)]}{\sin[g(L-\zeta_0)]}.$$

После замены ζ' на ζ, окончательно получается выражение для решения уравнения (6):

$$\Pi(\zeta)=\frac{1}{\sin[g(L-\zeta_0)]}\{\Pi(L)\sin[g(\zeta-\zeta_0)]+\Pi(\zeta_0)\sin[g(L-\zeta)]\}. \quad (18)$$

7. Трехточечная разностная схема нахождения $\Pi_0 u(\zeta)$

Ниже будет рассматриваться задача Коши для исходного уравнения (6) когда оба граничных условия задаются в начальной точке $\zeta_1=0$: $\Pi_1=C_W$; $D_0\equiv(d\Pi/d\zeta)_1$ – первая производная в начальной точке. Сделаем следующие замены: $\zeta_0=\zeta_{i-1}$, $\zeta=\zeta_i$, $L=\zeta_{i+1}$. Тогда для равномерной сетки $h=\zeta_{i+1}-\zeta_i=\zeta_i-\zeta_{i-1}=const$ соотношение (18) упрощается:

$$\Pi_i=\frac{1}{\sin[g2h]}\{\Pi_{i+1}\sin(gh)+\Pi_{i-1}\sin(gh)\}=\frac{(\Pi_{i+1}+\Pi_{i-1})}{2\cos(gh)}.$$

Отсюда получается трехточечная схема бегущего счета:

$$\Pi_{i+1}=2\Pi_i\cos(gh)-\Pi_{i-1}. \quad (19)$$

Все вычисления проводились на равномерной сетке с шагом $h=h_0/4=3.90625\times10^{-3}$, где h_0 – первый шаг неравномерной сетки работ [2,11,12].

Для начала расчета по схеме (19) необходимо знать значения Π_i для первых двух узлов сетки. В первом узле имеем $\Pi_1=C_W$. Для вычисления значения Π_2 используется стандартная разностная схема:

$$\Pi_2=\Pi_1+h\left[D_0+\left(d^2\Pi/d\zeta^2\right)_i h/2\right]=\Pi_1+h\left[D_0+F_i^M h/2\right]. \quad (20)$$

Для нахождения D_0 можно использовать условие 'плавающего потенциала' полной задачи Тонкс-Ленгмюра, рассматриваемое в работах [6, 10-12] $du/d\xi|_{\xi=L}=Q$. Величина заряда стенки с 'плавающим потенциалом' $Q=98.3276$ была получена численным интегрированием правой части уравнения Тонкс-Ленгмюра по переменной ξ по всей области расчета $0\le\xi\le L=1$. В рассматриваемых координатах ζ это условие преобразуется к виду:

$$D_0=d\Pi/d\zeta|_{\zeta=0}=(d\xi/d\zeta)du/d\xi|_{\xi=L}=-\mu Q. \quad (21)$$

"Точное" значение $\Pi_2^C=2.55791$ было получено с помощью линейной интерполяции результатов численного решения полной задачи Тонкс-Ленгмюра [11,12] на первом шаге неравномерной сетки h_0. В расчетах по формулам (20) и (21) было получено значение $\Pi_2 = 2.55788$, $\Pi_2^C - \Pi_2 = 3.0 \times 10^{-5}$.

Можно также задать приближенное значение D_0, полученное при условии $b = 0$ [6,10] $D_0 = -\sqrt{2c\left(\Pi(0) + e^{-\Pi(0)} - 1\right)}$, $\Pi_1 = C_W$. В этом случае $\Pi_2 = 2.55594$, $\Pi_2^C - \Pi_2 \approx 2.0 \times 10^{-3}$. Использование асимптотической формулы работы [9] $D_0 = -\sqrt{A(b=0)}C_W \exp\left(-\sqrt{A}C_W\right)$ Приводит к значению $\Pi_2 = 2.55683$ $\left(\Pi_2^C - \Pi_2 = 1.08 \times 10^{-3}\right)$.

8. Перенормировка координаты ζ

Ниже приводятся результаты численных расчетов при задании D_0 по формуле (21). Область расчета $L = 5.0$ содержала 1281 узел равномерной сетки с шагом $h = h_0/4$. Иррегулярная сетка для сравнения результатов заканчивалась 241- ым узлом.

Также как и в работе [13], функция $\Pi(\zeta)$ монотонно уменьшается вплоть до отрицательных значений. Учитывая, что $\Pi(\zeta)$ является подкоренным выражением аргумента интеграла ошибок, расчет заканчивался при появлении первого отрицательного значения $\Pi_{668} = -9.40567 \times 10^{-4}$ в точке $\zeta_{668} = 2.60547$. Линейная интерполяция по значениям $\Pi(\zeta)$ на последних двух шагах расчёта дает точку $\zeta_0 = 2.60451247$, в которой $\Pi(\zeta)$ обращается в нуль.

В постановке задачи предполагалось, что функция $\Pi(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$. Решение задачи Коши вовсе не обязано удовлетворять этому условию. Так в рассмотренном расчете нулевое значение функции $\Pi(\zeta)$, и соответственно обращение в нуль ее первой и второй производной, достигается на конечном интервале (а именно в точке ζ_0). Поэтому вполне разумно провести преобразование координаты ζ, с таким расчетом, чтобы при $\zeta = \zeta_0$ значение новой координаты $x(\zeta)$ обращалось в бесконечность. Семейство таких преобразований зададим формулой:

$$x(\zeta) = C\zeta^n / (\zeta_0 - \zeta)^m : \; x(0) = 0, x(\zeta_0) = \infty . \qquad (22)$$

В работе [13] эта формула использовалась при значениях $C = 1.0; n = m = 1$.

Используя перенормировку (22), преобразуем координаты равномерной сетки. Численное решение полной задачи Тонкс-Ленгмюра нам известно на неравномерной сетке растянутой переменной ζ_j [11,12]. Определяем номера новых (перенормированных) координат $x(\zeta_k)$, между которыми помещается ζ_j: $x(\zeta_k) \le \zeta_j < x(\zeta_{k+1})$. Значениями функции

Π_k являются, вычисленные по трехточечной схеме (19) величины. Решение задачи ζ_j можно получить с использованием линейной интерполяции по значениям Π_k и Π_{k+1}, соответствующим точкам x_k и x_{k+1}.

Таблица 1

		δ %					
n	m	2(0.0156)	33 (0.5)	177 (3.0)	241 (5.0)	ζ_{Max}	*Max*
1	1	0.9492	18.9363	11.1044	- 39.1653	1.34375	26.458
2	1	6.8971	21.2733	-27.2697	-129.048	0.56250	21.3397
1	2	3.1927	30.3535	- 6.4736	-101.533	0.82823	32.2844
1	1/2	0.3709	10.6906	32.4709	27.4661	3.21875	32.5583

В таблице 1 представлены значения относительных ошибок $\delta = 100 \times \left(1 - \Pi(\zeta)/\Pi_0^P(\zeta)\right)\%$, полученные для некоторых значений n и m формулы (22) при $g = g_0 = const = 0.242482$ и $C = 1.0$. При этом в расчете получается $\zeta_0 = 2.6045$. Через Π_0^P обозначена разность между численным решением уравнения Тонкс-Ленгмюра [11,12] и плазменным приближением $\Pi_0^P = u(\zeta) - u_1$. Целые числа во второй строке таблицы соответствуют номерам узлов неравномерной сетки, в которых известно “точное” решение [11,12]. В скобках указано значение ζ, соответствующее этому узлу. В последних двух столбцах таблицы показаны максимальное положительное значение относительной ошибки и значение координаты, при котором оно достигается ζ_{Max}. Что касается минимальных (отрицательных) значений, то для первых трех вариантов оно достигается на правой границе области расчета (см. 5-ый столбец с номером 241). Для последнего варианта знак относительной ошибки не меняется и минимальное (нулевое) значение достигается в начале координат.

Таблица 1 показывает, что наилучшее приближение (в смысле наименьшего значения относительной ошибки) достигается в случае $n = 1, m = 1/2$ (последняя строка таблицы). Для этих значений в таблице 2 представлены результаты расчетов, проведенных при различных значениях коэффициента C. При $C \le 1.2$ минимальное (нулевое) значение δ находится в начале координат $(\zeta = 0)$, а в остальных случаях достигается на правой границе рассматриваемой области.

Таблица 2

	δ %					
C	2	33 (0.5)	177 (3.0)	241 (5.0)	ζ_{Max}	Max
1.00	0.370865	10.6906	32.4709	27.4661	3.21875	32.5583
1.10	0.283150	8.16720	23.3711	15.0672	2.81250	23.4513
1.20	0.209973	6.00612	14.5078	2.32635	2.35938	15.4366
1.25	0.177776	5.03818	10.1825	-4.13403	2.12500	11.9595
1.27	0.165606	4.66958	8.47395	-6.73052	2.03125	10.6808
1.28	0.159664	4.48905	7.62403	-8.03100	1.96875	10.0668
1.29	0.153811	4.31096	6.77795	-9.33283	1.92188	9.47003
1.30	0.148043	4.13526	5.93430	-10.6356	1.87500	8.89058
1.40	0.094889	2.50024	-2.31743	-23.7610	1.32813	4.10136

Наилучший результат получается при $C=1.29$. В этом случае относительная ошибка $\delta<10\%$ во всей рассматриваемой области, а в областях $\zeta\le 0.103912$ и $3.90151\le\zeta\le 4.14353$ $\delta\le 1\%$. Для значений C близких к этому значению результаты также оказываются вполне удовлетворительными. Так для $C=1.25$ ошибка лежит в диапазоне $-4.13\%\le\delta\le 11.96\%$, а для $C=1.30$ она составляет $-10.64\%\le\delta\le 8.89\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma. //Phys.Fluids.1980. **Vol. 23**, № 4. P. 803-812.
2. Филиппычев Д.С. Метод пограничных функций для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 19: Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2004 , С. 21-40.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: *Наука*, 1973. 272 с.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: *Изд-во Моск. Ун-та*, 1978. 106с.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: *Высшая Школа*, 1990. 208 с.

6. Филиппычев Д.С. Численное решение дифференциального уравнения, описывающего поведение пограничной функции нулевого порядка. //Прикладная математика и информатика № 23, М.: *МАКС Пресс*. 2006. с. 24-35.
7. Cacuci D.G., Perez R.B., Protopopescu V. Duals and propagators: A canonical formalism for nonlinear equations. //J.Math.Phys. 1988. **Vol. 29**. № 2. P. 335-361.
8. Cacuci D.G., Karakashian O.A. Benchmarking the propagator method for nonlinear systems: A Burgers-Korteweg-de Vries equation. //J.Comput.Phys. 1990. **Vol. 89**. № 1. P. 63-79.
9. Филиппычев Д.С. Применение формализма дуального оператора для получения пограничной функции нулевого порядка уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 22 : Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2005 , С. 76 - 90.
10. Филиппычев Д.С. Численное решение дифференциального уравнения пограничной функции. //Вестн. Моск.ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. 2006. № 1. С. 10-14.
11. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой с использованием сгущающейся сетки. // Прикладная математика и информатика № 14: Сб. /*Под ред*. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: *МАКС Пресс*, 2003, С 35-54.
12. Филиппычев Д.С.Численное моделирование уравнения плазма-слой //Вестн. Моск.ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. 2004. № 4. С. 32-39.
13. Филиппычев Д.С. Уравнение пограничной функции и его численное решение. //Прикладная математика и информатика № 24, М.: *МАКС Пресс*. 2007. С. 24 – 34.