Д.С.Филиппычев

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМАЛИЗМА ДУАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ ПЛАЗМА-СЛОЙ*

1. Введение

При аналитическом исследовании поведения плазмы вблизи ограничивающей стенки с учетом полной кинетики ионов рассмотрение проводится во всем объеме (как в области плазмы, так и в узком пристеночном (ленгмюровском) слое). Для описания поведение потенциала $\varphi(z)$ во всей области рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, которое было названо *уравнением плазма-слой.*

Кинетический анализ формирования потенциала вблизи стенки был проведен Тонксом и Ленгмюром [1]. Рассматривался случай холодных ионов и горячих (максвелловских) электронов и было получено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее распределение потенциала $\varphi(z)$, как в слое, так и в основном объеме плазмы. Вне слоя плазма считалась квазинейтральной. Для тепловых ионов уравнение плазма-слой было выведено в работе [2].

Интегро-дифференциальное уравнение плазма-слой является сингулярно-возмущенным уравнением, поскольку перед старшей (второй) производной стоит малый параметр μ^2 $(\mu \equiv \lambda_D/L)$, где λ_D – дебаевская длина, L – длина системы. В пределе $\mu \to 0$ интегро-дифференциальное уравнение переходит в интегральное уравнение, которое описывает поведение потенциала только в основном объеме плазмы и носит название *плазменное уравнение.* Поэтому вполне логично было попытаться применить к этому уравнению асимптотическую теорию сингулярно-возмущенных уравнений. Такая попытка было сделана в работе [3], в которой для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой с ядром Эммерта [2] использовался

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 02-01-00299.

метод пограничных функций [4-6]. В качестве вырожденного решения этого метода выбиралось одно из аналитических решений плазменного уравнения работы [2]. В работе [3] было получено дифференциальное уравнение второго порядка для погранфункции нулевого порядка и приведено его асимптотическое решение. В данной работе для этого уравнения применяется формализм дуального оператора [7,8].

2. Уравнение плазма-слой Эммерта

В работе [2] было выведено интегро-дифференциальное уравнение (уравнение плазма-слой), описывающее поведение потенциала как, в основном объеме плазмы, так и в области пристеночного слоя. В безразмерных переменных (ξ – пространственная переменная; $u(\xi)$ – безразмерный потенциал) уравнение плазма-слой выглядит следующим образом:

$$\mu^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} = -e^{-u} + be^{\chi u}\left\{J^1 - J^\xi(u)\right\} \equiv f(u,\xi) \qquad (1)$$

$$J^1 = \int_0^1 h(\xi')K^1(u')d\xi',\ J^\xi(u,\xi) = \int_0^\xi h(\xi')K^\xi(u,u')d\xi',$$

$$K^1(u') = e^{-\chi u'},\ K^\xi(u,u') = e^{-\chi u'} erf(\sqrt{\chi(u-u')}).$$

Здесь $\mu \equiv \lambda_D / L_F$ – отношение дебаевской длины λ_D к длине свободного пробега L_F, $h(\xi)$ – функция формы источника ионов, $u = u(\xi)$, $u' = u(\xi'), \mathrm{erf}(x)$ – функция ошибок (интеграл вероятностей), $\chi \equiv Z\tau, \tau = T_e/T_i, Z = q/e$ (q – заряд иона), а точное выражение параметра b для целей данной работы не имеет существенного значения. В работе [2] уравнение (1) дополнялось краевыми условиями: $u(0) = 0$ в медианой плоскости и условием на стенке $u(1) = u_w$.

В газоразрядной плазме, как правило, выполняется неравенство $\lambda_D << L_F$, которое приводит к появлению в уравнении (1) малого параметра $(\mu^2; \mu << 1)$ перед старшей производной. Поэтому, (1) является сингулярно возмущенным интегро-дифференциальным уравнением. Если положить формально $\mu = 0$, то получается, так называемое, *плазменное приближение*, которое справедливо только в области вне пристеночного слоя:

$$0 = f(u,\xi) = -e^{-u} + be^{\chi u}\left\{\int_0^1 e^{-\chi u'} h(\xi')d\xi' - \int_0^\xi e^{-\chi u'} erf(\sqrt{\chi(u-u')})h(\xi')d\xi'\right\} \qquad (2)$$

Для этого уравнения ставится только одно краевое условие $u(0)=0$. Дифференцирование (2) по ξ и замена переменной интегрирования $d\xi' \to (d\xi'/du')du'$ приводит к интегральному уравнению [2]

$$e^{-u(\xi)} = B\int\limits_0^{u(\xi)} \frac{d\xi'}{du'} h(u') \frac{du'}{\sqrt{u-u'}}, \quad \mathrm{B} \equiv \mathrm{b}\sqrt{\frac{\chi}{\pi}}\frac{1}{1+\chi}, \tag{3}$$

которое сводится к интегральному уравнению Шлемильха. Решение последнего было получено в [2] с использованием преобразования Шлемильха [9]:

$$\pi B h(u)\sqrt{u}\frac{d\xi}{du} = 1 - 2\sqrt{u}D(\sqrt{u}). \tag{4}$$

Здесь $D(x) \equiv \exp(-x^2)\int\limits_0^x \exp(t^2)dt$ – функция Доусона, а $B = b\exp(-u_w)$.

Рассматривая $h(u(\xi)) = h(\xi)$ как явную функция координаты ξ, уравнение (4) было проинтегрировано [2] для произвольной функции формы источника $h(\xi)$ и в результате было получено решение плазменного уравнения (2):

$$\pi B\int\limits_0^{\xi} h(\xi')d\xi' = 2D(\sqrt{u}). \tag{5}$$

С учетом нормировки $h(\xi)$ работы [2] $\int\limits_0^1 h(\xi)d\xi = 1$, соотношение (5) переходит в $\pi B = 2D(\sqrt{u_1})$ (u_1 соответствует значению координаты на входе в слой $\xi = 1$). В дальнейшем для решения (5) будем использовать обозначение $u_0(\xi)$.

После замены переменной интегрирования $d\xi' = \frac{d\xi'}{du'}du'$ и подстановки вместо $\frac{d\xi'}{du'}$ его значения по формуле (4) получается выражение для нахождения $u_1 \equiv u_0(1)$, которое должно выполняться для любого u из диапазона $0 \div u_1$. Поэтому величину u_1 проще всего получить, выбирая $u = 0$ [2]. При этом получается трансцендентное уравнение

$$1 = \frac{2}{\sqrt{\pi\chi}} e^{-\chi u_1} D(\sqrt{u_1}) + erf\left(\sqrt{\chi u_1}\right),$$

решение которого можно получить только численными методами. После нахождения u_1 вычисляется параметр $B = 2D\left(\sqrt{u_1}\right)/\pi$.

Физические параметры задачи, использованные в расчетах, соответствуют параметрам работы [2]: $Z=1, \tau=1$ и, следовательно, $\chi=1$; $M/m=1836$ (водородная плазма). Функция формы источника также соответствовала [2]:

$$h(\xi)=\begin{cases}2, & 0<\xi<1/2=\mathrm{L_S},\\ 0, & 1/2<\xi.\end{cases}$$

При этом решение плазменного приближения дается выражением

$$\begin{cases}\pi B\xi = D\left(\sqrt{u_0(\xi)}\right), & 0\le\xi<1/2,\\ \pi B = 2D\left(\sqrt{u_0(\xi)}\right), & \xi\ge 1/2.\end{cases} \tag{6}$$

Это решение показано на рис.1. В области $0<\xi<1/2$ решение $u_0(\xi)$ получается в результате численного решения уравнения (6) методом деления отрезка пополам. При $\xi\ge 1/2$ решением является "полочка" постоянной величины $u_0(\xi)=const=u_0(1)=u_1=0.40445$.

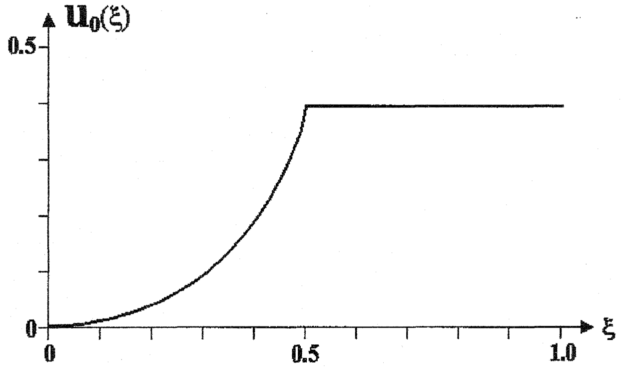

Рис.1 Распределение потенциала плазменного приближения

3. Асимптотический метод пограничных функций

Аналитическое решение (6) плазменного уравнения (2) справедливо только в области плазмы и не описывает поведение потенциала в области пристеночного слоя. Однако, выражение (6) можно использовать как нулевое приближение для получения асимптотического разложения решения полного уравнения плазма-слой (1). Одним из эффективных асимптотических методов теории сингулярных возмущений является метод пограничных функций [4-6]. В этом методе решение $u(\xi,\mu)$ представляется в виде двух степенных по μ рядов - регулярного $Ru(\xi,\mu)$ и пограничного $\Pi u(\zeta,\mu)$:

$$u(\xi,\mu)=Ru(\xi,\mu)+\Pi u(\zeta,\mu),\ \zeta\equiv(1-\xi)/\mu, \tag{7}$$

$$Ru(\xi,\mu)=R_0u(\xi)+\mu R_1u(\xi)+...+\mu^n R_n u(\xi)+..., \tag{8}$$

$$\Pi u(\zeta,\mu)=\Pi_0u(\zeta)+\mu\Pi_1u(\zeta)+...+\mu^n\Pi_n u(\zeta)+... \tag{9}$$

Коэффициенты рядов (8), (9) определяются в результате формальной подстановки разложения (7) в уравнение (1) и приравнивания членов одного порядка по μ раздельно для членов, зависящих от ξ и ζ.

Из общей теории асимптотических решений сингулярно-возмущенных уравнений [4-6] следует, что $\Pi u(\zeta,\mu)$ является поправкой к $Ru(\xi,\mu)$ в окрестности $\xi=1$ $(\zeta=0)$ и экспоненциально стремится к нулю с ростом ζ. Коэффициенты $\Pi_i u(\zeta)$ ряда (9) называются *пограничными функциями*. При формулировке алгоритма построения ряда (9) накладывается условие $\Pi_i u(\zeta)\to 0$ при $\zeta\to\infty$.

Правая часть уравнения (1) также представляется в виде суммы регулярной $RF(u(\xi),\xi;\mu)$ и пограничной $\Pi F(u(\zeta),\zeta;\mu)$ частей. Подставляя разложение (7) в (1) и учитывая соотношение $\frac{d}{d\xi}\Pi u(\zeta,\mu)=\frac{d\zeta}{d\xi}\frac{d}{d\zeta}\Pi u(\zeta,\mu)=-\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\zeta}\Pi u(\zeta,\mu)$, получим уравнение

$$\mu^2\frac{d^2}{d\xi^2}Ru(\xi,\mu)+\frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi u(\zeta,\mu)=RF(u,\xi;\mu)+\Pi F(u,\zeta;\mu).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ (раздельно для функций, зависящих от ξ и ζ) можно получить уравнения для определения неизвестных функций $RF_k(u(\xi),\xi;\mu)$ и $\Pi F_k(u(\zeta),\zeta;\mu)$:

$$0=R_0F(u,\xi)=f(u(\xi),\xi),\qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_0u(\zeta)=\Pi_0F(u,\zeta), \tag{10}$$

$$0=R_1F(u,\xi),\qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_1u(\zeta)=\Pi_1F(u,\zeta), \tag{11}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}R_{k-2}u(\xi)=R_kF(u,\xi),\qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_ku(\zeta)=\Pi_kF(u,\zeta).$$

Первое соотношение (10) представляет собой вырожденное $(\mu = 0)$ уравнение плазма-слой (1) и является уравнением плазменного приближения (2).

В работе [3] было показано, что на плазменном решении вторая производная правой части уравнения (1) имеет неинтегрируемую особенность. Поэтому, реально можно рассматривать только уравнения для нулевого (10) и первого (11) приближений. Было показано, что первое уравнение (11) представляет собой однородное линейное интегральное уравнение первого рода с однородным краевым условием и следовательно имеет только тривиальное решение $R_1u(\xi) \equiv 0$ [3]. В данной работе мы ограничимся только рассмотрением погранфункции нулевого порядка (второе уравнение (10)).

При переходе к интегрированию по "растянутой" координате $\zeta = (1-\xi)/\mu$ интегралы преобразуются к виду $\int [\,]\mathrm{d}\xi = -\mu \int [\,] d\zeta$. Поэтому вклад интегральных членов в сингулярную часть правой части уравнения начинается только с первого порядка по μ. Таким образом, в нулевом порядке сингулярная часть правой части уравнения выглядит следующим образом:

$$\Pi_0 F(u,\zeta) = -\,\mathrm{e}^{-u}\Big|_{u=u_0(\zeta)}^{u=u_0(\zeta)+\Pi_0 u(\zeta)} = c\left(1-\mathrm{e}^{-\Pi_0 u(\zeta)}\right), \text{ где } c \equiv \mathrm{e}^{-u_0(\zeta)}.$$

В итоге получается уравнение для нахождения погранфункции нулевого порядка:

$$\frac{d^2\Pi_0 u(\zeta)}{d\zeta^2} = c\left(1-e^{-\Pi_0 u(\zeta)}\right) \qquad (12)$$

с краевыми условиями: $\Pi_0 u(\zeta = 0) = C_W = u_W - u_1$; $\Pi_0 u(\zeta \to \infty) \to 0$.

4. Метод дуального оператора

В этом разделе рассматривается нелинейное уравнение общего вида:

$$N(u(x), \alpha(x),\ x) = 0, \qquad (13)$$

где $\alpha = \alpha(\alpha_1, ..., \alpha_I)$ – вектор параметров, появляющийся при математическом описании физической задачи. Дуальный оператор [7,8] является аналогом сопряженного оператора линейной теории. Для его формирования необходимо существование производной Гатто для оператора $N(u)$:

$$\delta N(u_0; h) = \frac{d(u_0 + \varepsilon h)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = N'(u_0)h. \qquad (14)$$

Дуальный оператор $[N'(u)]^*$ определяется равенством:

$$[N'(u)h, v] = \left\langle h, [N'(u)]^* v \right\rangle + \{\sigma(u)\,(h, v)\}. \tag{15}$$

Здесь скобки $[.,.]$ и $\langle .,. \rangle$ обозначают скалярные произведения, соответственно, в исходном и дуальном пространствах, а фигурная скобка $\{...\}$ – бинарную форму граничных (начальных и/или краевых) условий, получающуюся в результате интегрирования. В методе дуального оператора [1] формируются интегральные операторы:

$$L(u) = \int_0^1 N'(\varepsilon\, u) d\varepsilon \text{ и } L^*(u) = \int_0^1 [N'(\varepsilon\, u)]^* d\varepsilon. \tag{16}$$

Эти интегральные операторы используются при записи уравнений для запаздывающего пропагатора (retarted propagator) $G(u(x); x, x')$ и опережающего пропагатора (advanced propagator) $G^*(u(x); x, x')$, которые являются аналогами функции Грина линейной теории. В оставшейся части этой работы будет использоваться только опережающий пропагатор $G^*(u(x); x, x')$, для нахождения, которого получается линейное уравнение

$$L^*(u(x)) G^*(u(x); x, x') = \delta(x - x') \tag{17}$$

с соответствующими граничными условиями. С помощью $G^*(u(x); x, x')$ решение исходного уравнения выписывается в следующем виде [7]:

$$u(x') = -[N(u(x)), G^*(u(x); x, x')] + \left\langle u(x), L^*(u(x)) G^*(u(x); x, x') \right\rangle \tag{18}$$

5. Применение формализма дуального оператора для уравнения погранфункции нулевого порядка

Исходный нелинейный оператор $N(u)$ (13) для уравнения погранфункции нулевого порядка $\Pi = \Pi(\zeta) \equiv \Pi_0 u(\zeta)$ (12) выглядит следующим образом: $N(u) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - c\left(1 - e^{-u}\right)$. где $c \equiv \mathrm{e}^{-u_0(\zeta)} = \mathrm{e}^{-u_1}$.

Последнее равенство выполняется при $1/2 \le \zeta$. Первая производная Гатто (14) $\delta N(u_0; h) = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - ce^{-u_0}\right) h = N'(u_0) h$ приводит к выражению для оператора $N'(u_0)$: $N'(\Pi) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - ce^{-\Pi}$. Для получения дуального оператора $[N'(\Pi)]^*$ используется равенство (15), в правой части которого производится интегрирование по частям:

$$\int_0^L \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - c\left(1 - e^{-\Pi}\right) \right) hv \mathrm{d}\zeta = \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\zeta} v \bigg|_0^L - \int_0^L \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta - c\int_0^L e^{-\Pi} hv \mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}\zeta} v \bigg|_0^L - h\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\zeta}\bigg|_0^L + \int_0^L h\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - e^{-\Pi}\right) v\right] d\zeta .$$

Таким образом, $[N'(\Pi)] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - e^{-\Pi} = N'(\Pi)$ и интегральный оператор (16) выглядит следующим образом:

$$L^*(\Pi) = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - ce^{-\varepsilon\Pi} \right) \mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - c\frac{e^{-\varepsilon\Pi}}{\Pi}\bigg|_{\varepsilon=0}^1 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - \frac{c}{\Pi}\left(1 - e^{-\Pi}\right).$$

В результате получается уравнение для пропагатора (17) $G\left(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta'\right) \equiv G^*\left(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta'\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\zeta^2} - \frac{c}{\Pi}\left(1 - e^{-\Pi}\right)G = \delta(\zeta - \zeta'). \tag{19}$$

Для интегрального оператора $L^*(\Pi)$ вида (16), решение исходного уравнения (18) принимает следующий вид:

$$\Pi(\zeta') = -\int_0^L \left[\frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}\zeta^2} - c\left(1 - e^{-\Pi}\right) \right] G\left(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta'\right) d +$$

$$+ \int_0^L \Pi(\zeta) \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - \frac{c}{\Pi}\left(1 - e^{-\Pi}\right) \right) G\left(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta'\right) \right] d\zeta =$$

$$= -\int_0^L \left(\Pi(\zeta); \zeta, \zeta'\right) d\zeta + \int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\zeta^2} \Pi(\zeta) d\zeta .$$

После однократного интегрирования по частям обоих интегралов в правой части последнего соотношения, окончательно получаем

$$\Pi(\zeta') = \Pi \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta}\bigg|_{\zeta=0}^L - \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}\zeta} G \bigg|_{\zeta=0}^L . \tag{20}$$

6. Рассмотрение уравнения для опережающего пропагатора

Дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения пропагатора (19) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\zeta^2} - A(\Pi)G = \delta(\zeta - \zeta'). \tag{21}$$

Поскольку коэффициент $A(\Pi) \equiv \frac{c}{\Pi}\left(1 - e^{-\Pi}\right)$ является нелинейной функцией Π, то решение уравнения (21) в аналитическом виде получить не удается. Однако, в очень грубом приближении постоянного коэффициента $A(\Pi) = const$ уравнение (21) становится дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом и его решение можно получить по известной методике.

Сначала рассматривается однородное уравнение $\frac{d^2G}{d\zeta^2} - AG = 0$, решение которого выглядит следующим образом:

$$G = C_1 e^{\sqrt{A}\zeta} + C_2 e^{-\sqrt{A}\zeta}. \tag{22}$$

Метод вариаций постоянных приводит к системе уравнений:

$$\dot{C}_1 e^{\sqrt{A}\zeta} + \dot{C}_2 e^{-\sqrt{A}\zeta} = 0,$$

$$\sqrt{A}\left(\dot{C}_1 e^{\sqrt{A}\zeta} - \dot{C}_2 e^{-\sqrt{A}\zeta}\right) = \delta(\zeta - \zeta'),$$

разрешая которую получаем явное выражение для $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$:

$$\dot{C}_1 = \frac{1}{2\sqrt{A}}\delta(\zeta - \zeta')e^{-\sqrt{A}\zeta},. \dot{C}_2 = \frac{1}{2\sqrt{A}}\delta(\zeta - \zeta')e^{\sqrt{A}\zeta}$$

После интегрирования этих выражений, получим

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{A}}e^{-\sqrt{A}\zeta}H(\zeta - \zeta') + C_{10},\ C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{A}}e^{\sqrt{A}\zeta}H(\zeta - \zeta') + C_{20}. \tag{23}$$

Подставка (23) в (22) дает выражение для пропагатора:

$$G(u(\zeta);\zeta,\zeta') = C_{10}e^{\sqrt{A}\zeta} + C_{20}e^{-\sqrt{A}\zeta} + \frac{1}{\sqrt{A}}sh\left[\sqrt{A}(\zeta - \zeta')\right]H(\zeta - \zeta'). \tag{24}$$

Дифференцированием (24) по ζ получаем выражение для первой производной:

$$\frac{dG}{d\zeta} = \sqrt{A}\left(C_{10}e^{\sqrt{A}\zeta} - C_{20}e^{-\sqrt{A}\zeta}\right) + \mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(\zeta - \zeta')\right]H(\zeta - \zeta'). \tag{25}$$

Здесь было использовано равенство $sh\left[\sqrt{A}(\zeta - \zeta')\right]\delta(\zeta - \zeta') = 0$, вытекающее из общего соотношения $f(x)\delta(x - a) = f(a)$.

Выберем для пропагатора $G(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')$ однородные краевые условия первого рода: $G(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')\big|_{\zeta=\zeta_0} = G(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')\big|_{\zeta=\zeta_0} = 0$. Здесь для общности начальная координата обозначена через ζ_0. При этих краевых условиях выражение для решения (20) упрощается за счет устранения производной $d\Pi/d\zeta$:

$$\Pi(\zeta') = \Pi\, dG/d\zeta\big|_{\zeta=0}^{L}. \tag{26}$$

Используем указанные краевые условия в системе уравнений для определения коэффициентов C_{10} и C_{20} (24). Тогда получим:

$$C_{10}\,\mathrm{e}^{\sqrt{A}\zeta_0}+C_{20}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{A}\zeta_0}=0,$$
$$C_{10}\,\mathrm{e}^{\sqrt{A}L}+C_{20}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{A}L}=-\frac{1}{\sqrt{A}}\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right].$$

Корнями этой системы являются:

$$C_{10}=-\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{A}\zeta_0}}{2\sqrt{A}}\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]},\qquad C_{20}=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{A}\zeta_0}}{2\sqrt{A}}\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}.$$

Выражение для пропагатора получается после подстановки этих выражений в (24):

$$G(\Pi(\zeta);\zeta,\zeta')=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta')\right]H(\zeta-\zeta')-\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta')\right]\right\}. \quad (27)$$

При этом первая производная вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta}=\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta')\right]-\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta')\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta_0)\right]. \quad (28)$$

7. Решение исходного уравнения при $A=const$

Подстановка (28) в (26) приводит к решению задачи в виде:

$$\Pi(\zeta)=\Pi(L)\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]-$$
$$-\frac{\Pi(L)\,\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]-\Pi(\zeta_0)}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right], \quad (29)$$

или с использованием хорошо известного соотношения
$\mathrm{sh}(\alpha)\mathrm{ch}(\beta)-\mathrm{sh}(\beta)\mathrm{ch}(\alpha)=\mathrm{sh}(\alpha-\beta)$:

$$\Pi(\zeta)=\Pi(L)\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(\zeta-\zeta_0)\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}+\Pi(\zeta_0)\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}. \quad (30)$$

Здесь сделана замена $\zeta'\Rightarrow\zeta$.

Первая производная решения по ζ решения (29)

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}=\sqrt{A}\left\{\frac{\Pi(L)\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]-\Pi(\zeta_0)}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]-\right.$$
$$\left.-\Pi(L)\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]\right\} \qquad (31)$$

при $\zeta=\zeta_0$ и $\zeta=\mathrm{L}$ принимает следующий вид:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Pi(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}=\frac{\sqrt{A}}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}\left\{\Pi(L)-\Pi(\zeta_0)\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]\right\}, \qquad (32)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Pi(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=L}=\sqrt{A}\,\frac{\Pi(L)\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]-\Pi(\zeta_0)}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_0)\right]}. \qquad (33)$$

Полагая в формуле (33) $\zeta_0=0$, получаем выражение

$$\Pi(L)=\frac{1}{\sqrt{A}}\left.\frac{\mathrm{d}\Pi(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0}\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}L\right]+\Pi(0)\mathrm{ch}\left[\sqrt{A}(L)\right], \qquad (34)$$

которое можно использовать для вычисления $\Pi(L)$. Для этого необходимо знать значение $d\Pi(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=0}$, которое перечисляется по формуле $\mathrm{d}\Pi(\zeta)/\mathrm{d}\zeta|_{\zeta=0}=-\mu\mathrm{d}\Pi(\xi)/\mathrm{d}\xi|_{\xi=L}=-\mu Q$. Для получения величины Q использовались результаты работы [10]. Полученные в [10] значения $u(\xi)-u_1$, пересчитанные на сетку по ζ, выбирались за "точные" значения $\Pi_0 u(\zeta)$. Расчеты, проведенные по формуле (34) с различными значениями L показали, что относительная погрешность $<10\%$ имеет место только в узкой области вблизи начальной точки (для $16-$ого узла сетки $L=0.2344$). Для $2-$ого узла сетки $(L=0.0156)$ погрешность составляет $\delta_2=0.57\%$, а уже для $3-$ого узла сетки $(L=0.03125)$ – $\delta_3=1.15\%$.

Заметим, что условие $\Pi(\zeta=L=1/\mu)=0$ соответствует краевому условию на левой границе $\xi=0\,00$ расчетной области общей задачи [10]. Подставляя это значение в (30) (при $\zeta_0=0$), получаем аналитическое решение, для которого необходимо знать только краевое значение при $\zeta=0$ $(\Pi(0)=C_W)$:

$$\Pi(\zeta)=\Pi(0)\frac{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta)\right]}{\mathrm{sh}\left[\sqrt{A}L\right]}. \qquad (35)$$

Результаты расчетов, проведенных по формуле (35) представлены в таблице. Наблюдается монотонное возрастание погрешности.

Относительная ошибка меньше $10\%\%$ достигается в области вблизи левой границы $(0 \le \zeta < 1.22)$, а уровень 1% при $(0 < \zeta \le 0.11)$. Максимальная ошибка $\delta_{\max} = \delta_R = 70.3\,\%$ достигается на правой границе области при $\zeta = 10$. В этих расчетах величина $A(\Pi)$ вычислялась на левой границе области и равнялась $A(\zeta = 0) = 0.2404$. Погрешность решения во второй точке сетки составляла $\delta_2 = 0.17\,\%$. В расчетах с выбором $A(\Pi)$ в точке правой границы $A(\zeta = 10) = 0.647$ соответствующие значения равнялись: $\delta_{\max} = 98.7\,\%$; $\delta_2 = 0.66\,\%$.

Таблица

j	ξ	ζ	$u(\zeta) - u_1$	$\Pi_0 u(\zeta)$	%%
1	1.0000	0.000	2.5617	2.5617	0.00
2	0.9998	0.016	2.5465	2.5422	0.17
3	0.9997	0.031	2.5313	2.5228	0.34
4	0.9995	0.047	2.5162	2.5035	0.50
5	0.9994	0.063	2.5012	2.4844	0.67
6	0.9992	0.078	2.4862	2.4655	0.83
7	0.9991	0.094	2.4713	2.4466	1.00
8	0.9989	0.109	2.4565	2.4280	1.16
33	0.9950	0.500	2.1068	2.0048	4.84
65	0.9900	1.000	1.7176	1.5689	8.66
78	0.9880	1.203	1.5774	1.4202	9.97
79	0.9878	1.219	1.5671	1.4093	10.07
129	0.9800	2.000	1.1195	0.9609	14.17
177	0.9700	3.000	0.7204	0.5885	18.32
209	0.9600	4.000	0.4659	0.3604	22.64
241	0.9500	5.000	0.3068	0.2207	28.06
257	0.9400	6.000	0.2076	0.1352	34.88
273	0.9300	7.000	0.1451	0.0828	42.96
289	0.9200	8.000	0.1052	0.0507	51.81
305	0.9100	9.000	0.0793	0.0311	60.83
321	0.9000	10.000	0.0621	0.0184	70.32

Формула (35) представляет собой фактически асимптотику решения уравнения (12). Расчеты, проведенные по этой формуле, при увеличивающемся каждый раз на порядок значении L показали полную идентичность результатов расчетов результатам, представленным в таблице. Используя определение $\mathrm{sh}[x]=\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)/2$, асимптотику (35) можно переписать в виде:

$$\Pi(\zeta)=\Pi(0)\mathrm{e}^{-\sqrt{A}\zeta}\,\frac{\left(1-\mathrm{e}^{2\sqrt{A}\zeta}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{A}L}\right)}{1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{A}L}}\cong\Pi(0)\mathrm{e}^{-\sqrt{A}\zeta}\,. \tag{36}$$

Если взять $L=100$ и $\zeta=L_R=10$, то величины $E\equiv\mathrm{e}^{-2\sqrt{A}L}=2.58\cdot10^{-43}$ и $E\,\mathrm{e}^{2\sqrt{A}L_R}=4.69\cdot10^{-39}$ оказываются очень малыми. При увеличении L на порядок эти величины обращаются в нуль.

В работе [3] было получено асимптотическое представление в виде $\Pi(\zeta)=C_W\,\mathrm{e}^{-\sqrt{a}\zeta}$, $a=\mathrm{e}^{-u_W}$, где u_W – падение потенциала на стенке в полной задаче Тонкс-Ленгмюра $(C_W=u_W-u_1)$. Для этой асимптотики относительная ошибка меньше $10\%\%$ наблюдалась только в области $(0\le\zeta<0.578)$, а погрешность на правой границе составляла $\delta_R=320\%\%$. Как видно, из результатов данного раздела следует, что асимптотика (36) лучше соответствует решению: погрешность в области $(0\le\zeta<1.22)$; $\delta_R=70.3\%$.

8. Трехточечное дискретное соотношение

Формулу (30) можно использовать для написания трехточечного дискретного соотношения. Для этого сделаем замены: $\Pi(L)\Rightarrow\Pi_{i+1}$, $\Pi(\zeta)\Rightarrow\Pi_i,\Pi(\zeta_0)\Rightarrow\Pi_{i-1}$. Тогда

$$-\Pi_{i+1}\,\mathrm{sh}\!\left[\sqrt{A}(\zeta_i-\zeta_{i-1})\right]+\Pi_i\,\mathrm{sh}\!\left[\sqrt{A}(\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1})\right]-\Pi_{i-1}\,\mathrm{sh}\!\left[\sqrt{A}(\zeta_{i+1}-\zeta_i)\right]=0\,. \tag{37}$$

Это соотношение можно использовать различными способами в зависимости от того, какие краевые условия поставлены. Во-первых, если известны значения в краевых точках $(\Pi(\zeta=0)=C_W;\Pi(L))$, то для решения задачи можно использовать метод скалярной прогонки. Во-вторых, при известных значениях $\left(\Pi(0)=C_W;\,\mathrm{d}\Pi/\mathrm{d}\zeta\big|_{\zeta=0}\right)$ формулу (37) можно использовать как схему бегущего счета, т.е. для нахождения Π_{i+1} по уже вычисленным значениям Π_{i-1} и Π_i. Наконец, это трех-точечное соотношение можно использовать в итерационном процессе, если известно приближенное значение на правой границе области. В этом случае (37) переписывается в виде

$$\Pi_i=\frac{\Pi_{i+1}\,\mathrm{sh}\!\left[\sqrt{A}(\zeta_i-\zeta_{i-1})\right]+\Pi_{i-1}\,\mathrm{sh}\!\left[\sqrt{A}(\zeta_{i+1}-\zeta_i)\right]}{\mathrm{sh}\!\left[\sqrt{A}(\zeta_{i+1}-\zeta_{i-1})\right]}. \tag{38}$$

При этом, значения Π_{i-1} берутся на k – ой итерации, а Π_{i+1} на $(k-1)$ - ой.

Полагая в (30), как и при выводе (35), $\Pi(L)=0$ при большом значении L $(L \geq 1/\mu)$ и сделав замены $\zeta \Rightarrow \zeta_{i+1}$ и $\zeta_0 \Rightarrow \zeta_i$, получим следующую расчетную формулу:

$$\Pi_{i+1} = \Pi_i \frac{\operatorname{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_{i+1})\right]}{\operatorname{sh}\left[\sqrt{A}(L-\zeta_i)\right]}. \tag{39}$$

Расчеты, проведенные по формуле (39) с вычислением коэффициента A в начале каждого шага $A(\Pi)=A(\Pi_i)$, привели к более плохим результатам по сравнению с результатами, приведенными в таблице 1 $(A = A_1 = const)$: уровень $<1\%$ в области $0 \leq \zeta < 0.094$; уровень $<10\%$ в области $0 \leq \zeta < 0.813$; максимальная погрешность – на правой границе $\delta_{\max} = 97.7\%$; $\delta_2 = 0.17\%$. Полученные численные значения решения были использованы для проведения итерационного процесса с вычислением A в середине каждого шага $A_{i+1/2} = (A_{i+1} + A_i)/2$. Результаты расчета, полученные после 10-ой итерации, совпали с приведенными выше результатами, за исключением области погрешности $<10\%$. Эта область стала немного меньше $0 \leq \zeta < 0.797$.

На равномерной сетке $\zeta_i - \zeta_{i-1} = h = const$ и выражение (38) упрощается:

$$\Pi_i = \frac{\Pi_{i+1} + \Pi_{i-1}}{2\operatorname{ch}\left[\sqrt{A}h\right]}, \text{ или } \quad \Pi_{i+1} = 2\operatorname{ch}\left[\sqrt{A}h\right]\Pi_i - \Pi_{i-1}. \tag{40}$$

Вычисление Π_2 по (35) и проведенные по формуле (40) расчеты в остальных точках сетки привели к следующим результатам. Относительная ошибка меньше $10\%\%$ достигается в области вблизи левой границы $(0 \leq \zeta < 2.15)$, а уровень 1% при $(0 < \zeta \leq 0.11)$. Максимальная ошибка $\delta_{\max} = \delta_R = -28652\%$ достигается на правой границе области при $\zeta = 10$. Погрешность решения во второй точке сетки составляла $\delta_2 = 0.17\%$. По сравнению с результатами, приведенными в таблице, почти в два раза увеличилась область $10\%\%$. Однако, максимальная ошибка на правой границе δ_R возросла на несколько порядков, что связано с нарастанием ошибок вычислений. Приведенные результаты были получены при вычислении коэффициента A на каждом шаге $A = A(\Pi_i)$.

9. Заключение

Применение формализма дуального оператора [7,8] к уравнению для погранфункции нулевого порядка позволило, во-первых, получить новую асимптотику решения задачи (1), а во-вторых, записать ряд однородных дискретных трех-точечных схем для нахождения решения уравнения (1). Полученная асимптотика (35) или, что эквивалентно, (36) на уровне 10%% погрешности оказывается применима в большей области по сравнению с асимптотикой полученной в работе [3]. Максимальная область относительной ошибки меньше 10%% – $(0 \le \zeta < 2.15)$ была достигнута в расчетах с вычислением Π_2 по формуле (35) с последующими вычислениями в остальных точках сетки по формуле (40).

Литература

1. Tonks L., Langmuir I. A general theory of the plasma of an arc. //Phys.Rev.1929. Vol. 34, *N* 6. P. 876-922.
2. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma. //Phys.Fluids.1980. Vol. 23, *N* 4. P. 803-812.
3. Филиппычев Д.С. Метод пограничных функций для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 19: Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2004 , С. 21-40.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: *Наука*, 1973. 272 с.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: *Изд-во Моск.Ун-та*, 1978. 106с.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: *Высшая Школа*, 1990. 208 с.
7. Cacuci D.G., Perez R.B., Protopopescu V. Duals and propagators: A canonical formalism for nonlinear equations. //J.Math.Phys. 1988. Vol. 29. N 2. P. 335-361.
8. Cacuci D.G., Karakashian O.A. Benchmarking the propagator method for nonlinear systems: A Burgers-Korteweg-de Vries equation. //J.Comput.Phys. 1990. Vol. 89. N 1. P. 63-79.
9. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. - Cambridge: *Univ.Press*, 1927, 4-th ed. (1962, 4-th ed. reprint). *имеется перевод*: Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. - М.: *Физматгиз*, 1963. Т. 2.
10. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой с использованием сгущающейся сетки. // Прикладная математика и информатика *N* 14: Сб. /*Под ред.* Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: *МАКС Пресс*, 2003, С. 35-54.