

Филиппычев Д.С.

ГИБРИДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМЫ КОСМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА: МОДЕЛИ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ В ВИДЕ БЕЗМАССОВОЙ ЖИДКОСТИ.

4. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА.

1. Введение

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца возникает при условии когда две жидкости движутся одна относительно другой. Граница между ними (даже если она первоначально была плоской) может стать неустойчивой. Любое перпендикулярное к границе возмущение не затухает, а наоборот нарастает по амплитуде. На начальном этапе развития неустойчивости происходит модуляция поверхности раздела. Образовавшаяся “рябь” может в дальнейшем перерасти в вихревую структуру. Источником энергии, необходимой для развития неустойчивости, является кинетическая энергия относительного движения жидкости.

Достаточно широкой областью приложения теории неустойчивостей типа Кельвина-Гельмгольца являются космические и астрофизические проблемы. В рамках этой теории рассматривались, в частности, следующие вопросы: устойчивость магнитопаузы Земли и гелиопаузы; взаимодействие между потоками с различной скоростью в солнечном ветре; нитевидная структура хвостов ионизованных комет (хвостов I типа); взаимодействие солнечного ветра с планетами; неустойчивость границ полярного каспа, генерация геомагнитных пульсаций и т.д.

Упрощенное рассмотрение гидромагнитных неустойчивостей типа Кельвина-Гельмгольца проводится в рамках одно- или двухжидкостного подхода с аппроксимацией переходного слоя изменения скорости в виде резкого скачка (т.е. в виде тангенциального разрыва). Однако, в коротковолновом пределе, когда длина волны становится сравнимой с толщиной переходного слоя, необходимо учитывать конечность этой области. В случае бесстолкновительной плазмы МГД описание сжимаемости среды, а также ряда других эффектов, становится, вообще говоря неадекватным. При этом вместо гидродинамического подхода следует использовать кинетическое описание.

При кинетическом рассмотрении основной вклад в развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца вносит ионная компонента плазмы, а электронные масштабы длины и времени, как правило, не проявляются.

Поэтому электроны можно рассматривать как жидкость, оставляя кинетическое описание (в смысле метода частиц или PIC метода) только для ионов. Довольно общий тип гибридных кодов, в которых электроны рассматриваются как безмассовая жидкость, а ионы описываются набором частиц конечного размера, широко используются при изучении бесстолкновительных ударных волн, пинчей, плазменного фокуса и т.д. Обширной областью приложения численного гибридного моделирования (ионы-частицы; электроны-безмассовая жидкость) являются задачи физики космического пространства. Это связано с рядом обстоятельств. Во многих областях космического пространства имеется сильно разреженная замагниченная плазма, в которой доминирующими являются бесстолкновительные процессы. Многие плазменные явления характеризуются ионными масштабами длины и времени. В настоящей статье дается обзор работ по гибриднему (электромагнитному) моделированию неустойчивостей типа Кельвина-Гельмгольца. Обзоры работ по гибриднему моделированию бесстолкновительных ударных волн и безударных разрывам (т.е. контактному, тангенциальному и вращательному) предстали в предыдущих статьях [1-3] этой серии.

2. Некоторые понятия и определения.

Магнитосфера Земли. В исследованиях космической плазмы (в том числе и численном моделировании) наибольшее внимание уделяется магнитосфере Земли, что связано с наличием большого числа данных, полученных как с помощью наблюдений с Земли, так и с помощью космических аппаратов. Солнце генерирует плазму - солнечный ветер (основной компонент водород, несколько процентов гелия), который распространяется за пределы Солнца. Солнечный ветер является высокоскоростным (400км/с) высоко-проводящим потоком радиально истекающей разреженной (концентрация 5 см^{-3}) солнечной плазмы. В результате того, что солнечный ветер сильно отклоняется под воздействием геомагнитного поля, вокруг Земли образуется обширная магнитная полость в форме кометы, называемая магнитосферой. Основные структуры магнитного поля, связанные с магнитосферой: головная ударная волна, переходной слой (или магнитослой), магнитопауза и геомагнитный хвост.

Внешняя граница магнитосферы, носящая название магнитопаузы, удалена от Земли в среднем на $\approx 10R_E$ и представляет собой токовый слой, в котором динамическое давление солнечного ветра (ρv^2 , где ρ - плотность) уравнивает магнитное давление дипольного поля Земли ($B^2/8\pi$). На расстоянии около $5R_E$ от магнитопаузы в направлении к Солнцу в потоке солнечного ветра находится стоячая головная ударная

волна (ГУВ). Она обусловлена тем, что скорость солнечного ветра превышает скорость, с которой движутся в направлении от Солнца волны сжатия, отклоняющие солнечный ветер вокруг магнитосферы. Переходной слой (магнитослой) - это область сжатой и нагретой плазмы солнечного ветра, отделяющая головную ударную волну от магнитосферы. Геомагнитный хвост - это область на ночной стороне магнитосферы, где дипольное поле Земли вытянуто в направлении от Солнца в виде длинного цилиндрического хвоста диаметром $40R_E$ и длиной более $1000R_E$. Он состоит из двух противоположно направленных пучков магнитного потока (называемых долями геомагнитного хвоста), разделенных токовым слоем, который носит название нейтрального слоя.

Магнитопауза планет, обладающих собственным магнитным полем, представляет собой границу между магнитослоем и магнитосферой и является переходным слоем одного типа с магнитопаузой Земли. Переходной слой (граница) другого типа наблюдается у Венеры, собственное магнитное поле которой практически отсутствует. Вместо магнитопаузы у Венеры имеется ионопауза - граничный слой, отделяющий ударно-сжатую плазму солнечного ветра от более холодной и более плотной плазмы ионосферы. Ионопауза формируется на высотах, где ионосферное давление оказывается равным давлению солнечного ветра. Переходные слои типа ионопаузы встречаются и у других космических объектов (например, у комет, вероятно у Марса).

Слой шира (скорости) - область конечного размера в которой скорость потока претерпевает значительные изменения. В этой работе для краткости процесс пересоединения магнитных силовых линий будет обозначаться как "магнитное пересоединение" или просто термином "пересоединение".

В магнитоактивной плазме рассматривают различные числа Маха, являющиеся отношениями скорости потока к соответствующим характерным скоростям. Например, альфвеновской скорости $C_A \equiv V_A$ и скорости звука C_S соответствуют альфвеновское $M_A = V_\infty / C_A$ и звуковое $M_S = V_\infty / C_S$ числа Маха. $C_S^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = \{k_B(T_e + T_i) / M - \text{"изотермический звук"}; \gamma p / \rho - \text{"адиабатический звук"}\}$.

R_E - радиус Земли; в магнитосферных исследованиях обычно используется значение $R_E = 6370 \text{ км}$.

$AU = a.e. = 1.495985 \times 10^{11} \text{ м} \approx 1.495985 \times 10^8 \text{ км}$ - астрономическая единица: среднее расстояние между Землей и Солнцем; AU - Astronomical Unit of length.

Основные обозначения.

a - полуширина слоя шира.

c - скорость света; e - величина заряда электрона;

m_s - масса частицы сорта s : $m \equiv m_e$ - масса электрона; $M \equiv m_i$ - масса иона;

L_x - длина системы в x направлении и т.п.

n_s - концентрация (“плотность”) частиц сорта s ;

$P = nk_B T$ - давление; k_B - постоянная Больцмана;

R_L - ионный гирорадиус; $R_L = \delta_i \beta_i^{1/2}$;

q_s - заряд иона сорта s ;

T_s температура частиц сорта s ; T температура $T = T_e + T_i$;

$V_A \equiv C_A \equiv V_0 / (4\pi n_0 M)^{1/2}$ - альфвеновская скорость; $\Omega_i / \omega_{pi} = V_A / c$; V_0 и n_0 - “базовые” значения магнитного поля и ионной (=электронной) плотности.

$\beta_s = n_s k_B T_s / (B^2 / 8\pi)$ - отношение локальных значений давления компоненты плазмы к магнитному давлению.

$\gamma = C_p / C_v$ - отношение удельных теплоемкостей.

$\delta_i \equiv c / \omega_{pi} = V_A / \Omega_i$ - ионная длина инерции или “бесстолкновительная ионная скин-глубина”;

η - сопротивление плазмы;

$\lambda_D \equiv (k_B T_e / 4\pi q_s^2 n_0)^{1/2}$ - дебаевская длина электронов

$\rho = Mn$ - массовая плотность;

ω , \mathbf{k} - частота и волновой вектор колебаний; $\omega = \omega_r + i\omega_{im}$;

$\omega_{ps} \equiv (4\pi q_s^2 n_0 / m_s)^{1/2}$ - плазменная частота частиц сорта “ s ”;

$\Omega_i \equiv qV_0 / Mc$ - ионная гирочастота;

\mathbf{B} - магнитное поле;

\mathbf{B}_E - дипольное магнитное поле Земли;

\mathbf{B}_{IMF} - межпланетное магнитное поле (IMF);

\mathbf{E} - электрическое поле;

\mathbf{J} - плотность электрического тока.

\mathbf{v} - скорость частицы (иона);

\mathbf{V} - скорость потока (плазмы);

x - пространственная координата;

Значения векторных величин обозначаются тем же самым символом, например, $\mathbf{V} = |\mathbf{V}|$.

Нижние индексы:

“||” и “⊥” обозначают продольные и поперечные компоненты векторов.

“s”- сорт частиц, в частности: e - электрон; i - ион; p - протон.

“p” - плазма (в ω_{ps}).

“0” - обозначает начальное значение величины.

Размерность рассматриваемой задачи определяется размерностью конфигурационного пространства и обозначается с использованием символа D. Например, 1-D обозначает одномерную модель, в которой используется только одна пространственная переменная. При этом для векторных величин (скорости частиц, электрическое и магнитное поля) могут учитываться все три компоненты.

N_c - число ячеек пространственной сетки.

N_{pc} - число ионных частиц, приходящихся на ячейку пространственной сетки (обычно в начале расчета ($t=0$)).

Аббревиатуры:

СВ - Солнечный Ветер;

МГД - Магнитная Гидродинамика;

МП - МагнитоПауза.

BL - Boundary Layer - приграничный (пограничный) слой.

CGL - Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E.

FLR - Finite Larmor Radius; конечный ларморовский радиус.

IMF - Interplanetary Magnetic Field: Межпланетное магнитное поле.

K-H - Kelvin-Helmholtz; KHI - Kelvin-Helmholtz Instability;

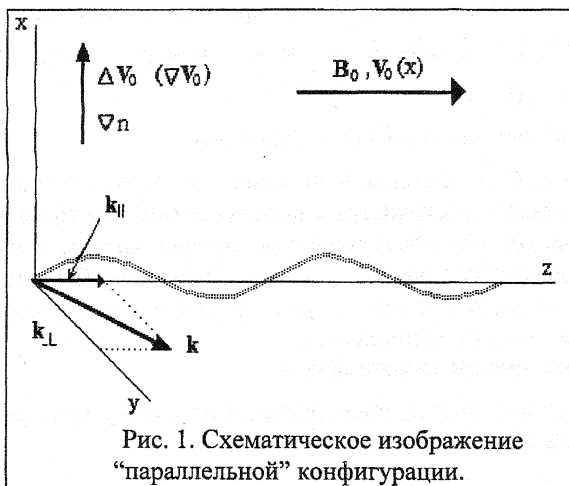
LLBL - Low Latitude Boundary Layer; Низкоширотный приграничный (пограничный) слой.

PIC - Particle-in-Cell: метод численного моделирования “частиц в ячейке”;

RD - Rotational Discontinuity - вращательный разрыв;

TD - Tangential Discontinuity - тангенциальный разрыв.

Конфигурация “параллельной геометрии” (скорость потока \mathbf{V} параллельна магнитному полю \mathbf{B}), используемая для рассмотрения неустойчивости границы, представлена на Рис. 1. Волновой вектор возмущения лежит в плоскости поверхности разрыва (y - z). Волнистой линией на Рис. 1 показано возмущение границы.



3. МГД модели для описания низкочастотных волн в плазме.

Одной из важных тем исследования физических процессов в космической плазме является изучение низкочастотных волн с частотами ниже или равными протонной гирочастоте ($\omega \leq \Omega_p$). Самым простым гидродинамическим (газодинамическим) описанием бесстолкновительной плазмы является теория идеальной магнитной гидродинамики (ИМГД). Решениями линеаризованных уравнений этого приближения являются хорошо известные МГД волны, которые (за некоторым исключением) являются так же низкочастотным пределом ($\omega \rightarrow 0$) линеаризованных уравнений двух-жидкостной теории, содержащей в своей общей форме эффекты инерции как электронов, так и ионов. При исключении из рассмотрения энергии электронов ($m=0$) упрощенные уравнения двух-жидкостной теории становятся идентичными уравнениям идеальной МГД, за исключением закона Ома, в котором появляется холловский член $E_{\text{Hall}} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) / (cn_e e)$. По этим причинам, такая теория получила название "холловская МГД" (ХМГД). Вообще говоря, теория ХМГД относится к плазменным процессам, протекающим на масштабах длины меньших чем ионная длина инерции ($l < \delta_i \equiv c / \omega_{pi}$) и на временных масштабах малых по

сравнению с ионным гиропериодом ($t < \Omega_i^{-1}$). В приближении безмассовой жидкости скорость центра масс становится $\mathbf{V} = \mathbf{V}_i$ и простейший вариант уравнений несжимаемой ХМГД можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \nabla \bullet (\rho \mathbf{V}) &= 0, \quad \rho (\partial / \partial t + \mathbf{V} \nabla \bullet) \mathbf{V} + \nabla \bullet (P + B^2 / 8\pi) = 0, \\ \partial \mathbf{B} / \partial t &= -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = c \nabla \times \mathbf{B} / 4\pi, \quad \mathbf{E} = -\nabla P / e n_e - (\mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) / c + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) / e n_e, \quad (1) \\ \frac{d P}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Для столкновительной плазмы (т.е. резистивной МГД, которая здесь не рассматривается; см. [2]) используется приближение адиабатической среды $\gamma = 5/3$. Для бесстолкновительной плазмы (т.е. в МГД и ХМГД теориях) более подходящим оказывается изотермическое приближение $\gamma = 1$, в котором последнее соотношение в (1) принимает вид $P/\rho = \text{const}$. Система уравнений (1) применялась для численного моделирования нелинейной эволюции неустойчивости К-Н в неоднородной плазме [4] и в плазме геомагнитного хвоста [5]. Краткое описание (обзор) исследований и приложений ХМГД - теории в космической и лабораторной плазме приведен в [6].

Трудности в обосновании МГД описания бесстолкновительной плазмы космического пространства хорошо известны (см., например, [7]). Гидродинамическое представление справедливо в областях где длина свободного пробега заряженных частиц (по отношению кулоновских столкновений) значительно меньше характерных размеров задачи. На расстояниях от Солнца превышающих 0.1 AU длина свободного пробега частиц быстро возрастает и вблизи Земли становится сравнимой с расстоянием от Земли до Солнца (1AU). Считается, что электромагнитные флуктуации среды способны заменить кулоновское рассеяние заряженных частиц, т.е. обеспечить применимость гидродинамического приближения [8]. При определенных условиях, уравнения идеальной МГД могут быть фактически получены из кинетической теории бесстолкновительной неизотемпературной плазмы [9] (см. также [10]). Эти уравнения выражают законы сохранения частиц, импульса и энергии и поэтому являются фундаментально важными даже если условия их применимости, строго говоря, не выполняются [7]. Таким образом, МГД уравнения могут быть использованы для описания крупномасштабных явлений в космической плазме (например, для описания взаимодействия солнечного ветра с планетами). Поскольку флуктуации магнитного поля влияют на циклотронную частоту и движение заряженных частиц, то считается, что эффективное время термализации соответствует обратной циклотронной частоте, а эффективная длина термализации - ларморовскому радиусу частицы.

Идеальная МГД содержит предположение изотропного кинетического давления. В то же время, известно, что существуют условия при которых ионизованный газ может вести себя как жидкость даже если длина свободного пробега большая. При наличии достаточно сильного магнитного поля, такого что гирорадиусы частиц становятся значительно меньше всех характерных размеров задачи, движение частиц поперек магнитного поля оказывается ограниченным. При этом поле локально воздействует на частицы подобно столкновениям. За счет этого значения давления вдоль и поперек магнитного поля оказываются различными. В случае достаточно высокой температуры плазмы, малой плотности и достаточно сильного магнитного поля кинетическое давление становится анизотропным и описывается тензорной величиной [11,12]. При этом бесстолкнительная плазма в сильном магнитном поле подчиняется системе уравнений гидродинамического типа - справедливо так называемое 16-моментное приближение (см., например, [12]) или более укороченное приближение гидродинамики CGL [11]. В качестве примера приведем уравнения CGL:

$$\begin{aligned} \partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 ; \partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}); \\ \rho d\mathbf{V}/dt + (\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B})/4\pi + \nabla_{\parallel} P_{\parallel} + \nabla_{\perp} P_{\perp} + (P_{\parallel} - P_{\perp})(\mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{h} + (\mathbf{h} \nabla) \mathbf{h}) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{P_{\perp}}{\rho B} \right) &= 0 ; \frac{d}{dt} \left(\frac{P_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \end{aligned}$$

которые применялись в [13,14] для описания динамики анизотропной плазмы межзвездной среды. Здесь $\mathbf{h} \equiv \mathbf{B}/B$, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{h}(\mathbf{h} \nabla)$, $\nabla_{\perp} = \nabla - \nabla_{\parallel}$.

4. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (КН) возникает при наличии шара скорости и приводит к преобразованию энергии относительно движения слоев плазмы в другие формы энергии (например, кинетическую энергию вихрей, магнитную энергию). Турбулентность, возникающая при развитии этой неустойчивости, является источником аномальных вязкости и сопротивления. Теория неустойчивостей типа К-Н в случае когда плазма движется вдоль магнитного поля со скоростью V , зависящей от поперечной координаты x ($dV/dx \neq 0$) представлена в монографии Михайловского [15], в которой дана теория как обычных (гидромагнитных или классических), так и непотенциальных дрейфовых неустойчивостей типа К-Н. Последние связаны с дрейфово-конвективным движением

частиц поперек магнитного поля под воздействием возмущенных электромагнитных полей.

Простейшей теоретической моделью классической (гидромагнитной) неустойчивости К-Н, позволяющей получить строгий и достаточно общий результат, является МГД-модель со скачкообразным профилем - плоским тангенциальным разрывом (TD), с каждой стороны которого параметры среды являются постоянными. Исследование такой задачи об устойчивости TD было впервые проведено в работах Ландау [16] и Сыроватского (см., например, [17; 18] и обзор [19]). Результаты этих работ нашли отражение в книгах (Ландау и Лифшиц [20]; Чандрасекар [21]), которые часто используются в качестве первоисточников по теории этой неустойчивости. Обзоры ранних работ по КНП приведены в [22,23]. Электродинамическая трактовка классической КНП и ее сходство с альфвеновской неустойчивостью взаимопроникающих плазм обсуждались в обзоре Михайловского [24].

В обзоре [19] приведено условие устойчивости:

$$(\mathbf{kB}_1)^2 + (\mathbf{kB}_2)^2 - [4\pi\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)] (\mathbf{k}\Delta\mathbf{V})^2 \geq 0, \quad (2)$$

где $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$ - скачок скорости на разрыве; \mathbf{k} - волновой вектор возмущения, характеризующий направление "ряби" на поверхности разрыва. Условие (2) часто называется условием Сыроватского. Из него видно, что магнитное поле дает положительный вклад в правую часть неравенства, и следовательно, оказывает стабилизирующее воздействие на течение, что иллюстрирует общее положение о влиянии магнитного поля на устойчивость гидродинамических течений проводящей среды: магнитное поле может лишь увеличивать устойчивость данного распределения скоростей по сравнению с тем же самым распределением, но при отсутствии магнитного поля. Этот общий вывод становится физически очевидным, если учесть, что всякая турбулизация потока ввиду "вмороженности" магнитного поля должна сопровождаться ростом магнитной энергии, что затрудняет такую турбулизацию.

В общем случае не параллельных \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 и $\Delta\mathbf{V}$ наиболее "опасное" возмущение, а следовательно, и условие устойчивости TD относительно произвольных малых возмущений определяется минимумом левой части (2) по всем возможным значениям \mathbf{k} . В системе координат, в которой ось у направлена вдоль скачка скорости $\Delta\mathbf{V}$, условие (2) принимает вид:

$$(B_{1y}B_{2z} - B_{2y}B_{1z})^2 / [(B_{1z})^2 + (B_{2z})^2] - [4\pi\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)] \Delta V^2 \geq 0.$$

Если же магнитное поле с обеих сторон разрыва направлено вдоль скачка скорости, то условие (2) вообще не зависит от \mathbf{k} и, следовательно,

разрыв устойчив относительно произвольных малых возмущений при условии

$$(B_1)^2 + (B_2)^2 - [4\pi\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)] \Delta V^2 \geq 0.$$

В частности, если плотность среды и напряженность магнитного поля непрерывны, т.е. разрывными являются тангенциальные составляющие скорости, то условие устойчивости Сыроватского сводится к следующему:

$$V^2/8\pi \geq (1/4) \rho \Delta V^2/2 \quad (\text{или } 2C_A \geq \Delta V). \quad (3)$$

Чандрасекар [21] отметил два простых случая: поток плазмы перпендикулярен магнитному полю (поперечный случай); поток плазмы параллелен магнитному полю (параллельный случай). В перпендикулярном случае магнитное поле не воздействует на неустойчивость и поток оказывается неустойчивым для всех скачков скорости (как и в обычной гидродинамике). В параллельном случае неустойчивость полностью стабилизируется если полный скачок скорости не превышает двухкратной альфвеновской скорости (условие Сыроватского (3)).

Роль сжимаемости в гидромагнитной КН с использованием одножидкостного подхода исследовалась в работах [25-37]. Однако, следует отметить, что в случае бесстолкновительной плазмы одножидкостное описание сжимаемости, вообще говоря, является неадекватным и вместо такого описания следует использовать кинетическое рассмотрение. При заданных условиях сжимаемой среды (плазмы) могут существовать две различные поверхностные волны (быстрая и медленная) с разными значениями тангенциального волнового вектора k_t [26,27,34]. Возбуждение поверхностных волн может происходить только в ограниченном диапазоне скоростей потока $V_{cl} < \Delta V < V_{cu}$, где V_{cl} и V_{cu} - нижнее и верхнее значения критических скоростей. В несжимаемой среде (плазме) существует только одна поверхностная волна и только нижнее значение критической скорости V_{cl} (см., например, условие (3)), а V_{cu} отсутствует. Таким образом, в сжимаемой среде существует верхнее критическое значение скорости, выше которой КН стабилизируется [26,27,34]. Если предположить для простоты наличие холодной плазмы с одной стороны поверхности разрыва, то волновое число, нормальное к этой поверхности, оказывается равным $k_n \approx [(\omega/V_A)^2 - k_t^2]^{1/2}$, а действительная часть частоты К-Н волны $\omega_r = k_t \Delta V_0/2$. Увеличение ΔV_0 приводит к возрастанию ω_r и в результате происходит переход от поверхностной волны ($k_n^2 < 0$) к объемным колебаниям ($k_n^2 > 0$).

Неустойчивость К-Н плоского тангенциального разрыва (TD), с помощью которого моделировалась гелиопауза (граница раздела между

межзвездной средой и плазмой солнечного ветра), рассматривалась в работах [12,13,38, 39]. Сжимаемость плазмы была учтена в работе [39], а в [12] устойчивость гелиопаузы по отношению к неустойчивости К-Н исследована с учетом как сжимаемости, так и магнитного поля межзвездной среды.

Противоположным пределом к приближению нулевой толщины переходного слоя (TD) является предположение, что толщина этого слоя значительно больше всех других размеров задачи. В этом пределе, устойчивость шира плазменного потока, параллельного магнитному полю, изучалась в работах [40,41] с использованием WKB приближения. Было показано, что в режиме дрейфовых волн ($k_{\perp} \gg k_{\parallel}$) колебания, соответствующие ветвям альфвеновских и магнитозвуковых волн, могут стать неустойчивыми, в то время как для параллельного распространения ($k_{\perp} \ll k_{\parallel}$) неустойчивыми могут быть только альфвеновские волны.

Вопросы, связанные с кинетическим описанием гидромагнитной неустойчивости К-Н, первоначально рассматривались в работе [42,43]. Было установлено [42], что МГД анализ может быть неприменим к тангенциальному разрыву. Во-первых, из-за того, что ларморовский радиус частиц может оказаться сравнимым с другими характерными размерами задачи (толщиной переходного слоя и длиной волны возмущений). Во-вторых, из-за возможного резонансного взаимодействия волна-частица. Для дрейфовых неустойчивостей К-Н важны оба отмеченных фактора.

В работе [42] была показана необходимость рассмотрения конечной области шира в коротковолновом пределе. Было найдено, что инкремент нарастания возрастает линейно с ростом волнового числа, так что наибольший инкремент соответствует возмущениям с самой короткой длиной волны. Однако, для достаточно коротких длин волн уже нельзя пренебрегать конечной толщиной переходного слоя изменения скорости. Конечность толщины слоя шира учитывалась в ряде работ (см., например, [32,44-56]). Многими авторами исследовался профиль скорости в виде "гиперболического тангенса" ("th-профиль") [44-47,52]. Случай несжимаемого потока для th-профиля рассматривался в работе [44], в которой было показано, что неустойчивыми являются только те моды, которые удовлетворяют условию $ka < 2$ (a - масштаб длины шира скорости) и, что наиболее неустойчивой модой является мода с $ka \sim 1$. В работах [45-47] исследование устойчивости th-профиля было распространено на случай сжимаемой среды. Для возмущений, исчезающих на бесконечности, неустойчивость возникает только для $M_S < 1$ (M_S - звуковое число Маха, вычисленное с использованием половины значения полного скачка скорости) [45]. Помимо этого, существуют дополнительные моды, удовлетворяющие граничному условию излучения, для которых th-профиль оказы-

вается неустойчивым для всех чисел Маха [46,47]. Исследование эффекта конечной толщины переходного слоя проводилось в работе [32] для двух предельных случаев: в поперечном $M_F \ll 1$; в параллельном $M_A \gg 1$, $M_S = 0$. В согласии с результатами обычной гидродинамики, было найдено, что конечная толщина слоя стабилизирует К-Н моды при больших k . В работе [50] было показано, что для несжимаемой среды в параллельном случае критерий устойчивости Сыроватского (3) остается справедливым для любого профиля скорости. Линейный профиль скорости слоя ширины при наличии магнитного поля был рассмотрен в рамках МГД формализма [54-56].

Теория неустойчивости К-Н с непрерывно меняющейся толщиной переходного слоя представляет собой нелокальное рассмотрение. В линейном приближении такое рассмотрение было проведено в работах [57,58]. Было показано, что максимум инкремента нарастания достигается не при инфинитизимально малой длине волны, а для мод, длина волны которых зависит от толщины пограничного слоя (BL). Нелинейная эволюция неустойчивости исследовалась при рассмотрении BL в виде плазменного плоского слоя [59,60]. В этом приближении градиенты скорости и плотности (в слое) представлялись аналитическими функциями, а граничные условия задавались на жестких стенках. Эволюция во времени прослеживалась с использованием МГД моделирования.

Учет анизотропии давления в гидромагнитной неустойчивости К-Н проводился, как правило, с использованием двух-адиабатического приближения CGL [11]. Такой подход применялся для анизотропной плазмы, например, в работах [36,61-67]. Основные результаты этих исследований: анизотропия давления не вносит качественных изменений в решения по сравнению с МГД рассмотрением, но изменяет величину инкремента нарастания неустойчивости, а именно, инкремент увеличивается. Аналитическое исследование неустойчивости К-Н как в анизотропной (CGL - приближение), так и в изотропной (МГД-уравнения) сжимаемой плазме в магнитном поле проводилось в работе [36] для специального случая, когда разрыв скорости (TD) разделял идентичные среды.

На основе CGL приближения исследовалась неустойчивость плоско-слоистой атмосферы [68]. Влияние температурной анизотропии бесстолкновительной замагниченной плазмы на неустойчивость К-Н гелиопаузы рассматривалась в работе [13], в которой для описания плазмы солнечного ветра использовались МГД уравнения, а для межзвездной среды - уравнения анизотропной МГД в приближении CGL. Было показано, что температурная анизотропия замагниченной плазмы межзвездной среды оказывает существенное влияние на неустойчивость К-Н гелиопаузы [13]. Превышение значения продольной температуры над поперечной

приводит к резкому увеличению с ростом степени анизотропии порогового значения числа Маха, при достижении которого возникает неустойчивость К-Н. При достижении достаточно высокой анизотропии (для условий гелиопаузы в 5-15%) в системе возникает анизотропная шланговая неустойчивость. В противоположном случае, когда поперечная температура незначительно превышает продольную, критическое число Маха плавно возрастает.

Неустойчивость К-Н в плазме, состоящей из двух встречных потоков с одинаковыми величинами скоростей во внешнем магнитном поле исследовалась в [69,70]. Рассматривались МГД уравнения с анизотропным давлением. Были получены условия неустойчивости для МГД-систем и систем CGL. Показано, что условия неустойчивости и инкременты КН зависят от показателя политропы и от величины магнитного поля.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в пылевой плазме исследовалась с учетом флуктуаций заряда пылинок [71]. Рассматривался поперечный шир потока, параллельный магнитному полю. Под влиянием адиабатического давления пылевой плазмы происходит увеличение инкремента неустойчивости. В плотной плазме на инкремент нарастания влияют флуктуации заряда пылинок.

Большое число работ по численному моделированию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КН) было проведено с использованием различных гидродинамических (fluid) и МГД кодов [4-6, 52, 59, 60, 72-98]. В частности, использовались: гидродинамический метод частиц (PIC-fluid) [73,80]; холловская МГД [4-6,96]; учет эффектов конечного ларморовского радиуса (FLR) ионов [97,98]. В этих исследованиях рассматривались крупномасштабные аспекты КН. С другой стороны, в полном кинетическом моделировании (т.е. в методе частиц - PIC) [99-109] учитывались коротковолновые моды и соответствующие им высокие частоты. Гибридное моделирование (см. ниже) [110-118] объединяет эти два подхода в том смысле, что в этом приближении рассматриваются динамические процессы на МГД-масштабах с полным описанием кинетических эффектов ионов.

5. Гибридная модель: электроны безмассовая жидкость; ионы – частицы

Довольно часто для изучения физических процессов в плазме с магнитным полем можно применять кинетическое описание (кинетические уравнения или метод частиц) только для ионной компоненты, а электроны рассматривать как жидкость (газодинамическая модель). В

этих моделях плазма считается квазинейтральной и в уравнениях Максвелла пренебрегается током смещения (приближение Дарвина [119]). В рамках этого приближения движение частиц плазмы должно быть нерелятивистским. Условие квазинейтральности предполагает, что электронная плотность почти равна ионной плотности (обе они обозначаются через n). Для того чтобы проследить эволюцию системы на больших временах и в большей области пространства необходимо полностью устранить динамику быстрых электронов. Это достигается за счет применения гибридных кодов, в которых ионы рассматриваются как частицы, а электроны как безмассовая жидкость ($m=0$). В численном моделировании с применением гибридной модели без учета инерции электронов ($m=0$) хорошо воспроизводятся физические процессы, протекающие на ионных масштабах длины (ионная длина инерции; ионный гирорадиус) и времени (обратная гирочастота ионов). При этом из расчетов устраняются плазменная частота и гирочастота электронов.

Общую схему расчета по гибридной модели можно представить в виде:

- определяются электромагнитные поля из уравнения движения электронной компоненты плазмы;
- моделируется динамика ионной компоненты методом частиц и определяются макроскопические характеристики ионов (как моменты их функции распределения);
- решается уравнение для электронной температуры.

Безразмерные переменные.

В гибридной модели характерными масштабами являются ионные масштабы длины и времени. Довольно часто при рассмотрении задач плазмы космического пространства расстояния измеряются в единицах ионной длины инерции δ_i , а время в Ω_i^{-1} . Таким образом, в гибридном моделировании используются основные безразмерные переменные: расстояние $x^{\text{new}}=x/\delta_i$ и время $t^{\text{new}}=t/(\Omega_i^{-1})=\Omega_i t$. Нормализация остальных переменных проводится на основе этих величин: скорость $v^{\text{new}}=v/V_A$; электрическое поле $E^{\text{new}}=(q/M\Omega_i V_A)E$; $B^{\text{new}}=(q/M\Omega_i c)B$; плотность тока $J^{\text{new}}=(1/qn_0 V_A)J$ ($J \equiv j$); векторный потенциал магнитного поля $A^{\text{new}}=(q/McV_A)A$; сопротивление (в общем случае - тензор) $\eta^{\text{new}}=\alpha_2 \eta$, $\alpha_1=q/MV_A^2$, $\alpha_2=q^2 n_0/M\Omega_i=c\omega_i/4\pi V_A$, $\alpha_3=V_A^2 n_0 M=B_0^2/4\pi$.

Основные уравнения.

В безразмерных переменных основные уравнения записываются в виде (верхний индекс "new" опущен):

$$dv/dt = E + v \times B, \quad dx/dt = v, \quad (4a)$$

$$\mathbf{E} = -\alpha_1 \nabla(n_e T_e) / en_e - \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J}, \quad (4b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_\perp \text{ (закон Ампера),} \quad (4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_\perp = -\partial \mathbf{B} / \partial t \text{ (закон Фарадея),} \quad (4d)$$

$$(3/2) \partial(n_e T_e) / \partial t + (\partial / \partial x) \left((3/2) (n_e T_e) V_{ex} \right) + (n_e T_e) \partial V_{ex} / \partial x = \alpha_3 \eta J^2, \quad (4e)$$

$$n_e = n_i = \iint f_i dv = n. \quad (4f)$$

В задачах, связанных с моделированием физических процессов в космическом пространстве, довольно часто электроны рассматриваются в изотермическом или адиабатическом ($p=n^\gamma$) приближении. При этом из модели (4) исчезает уравнение энергии (4e). В условии квазинейтральности (4f) f_i - функция распределения по скоростям ионов. Полная плотность тока $\mathbf{J} = -n\mathbf{V}_e + \iint f_i dv$ согласно соотношению (4f) удовлетворяет условию $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, из которого следует $J_\parallel = J_x = 0$.

При численной реализации гибридного моделирования вводятся дискретные сетки во времени (Δt ; $\tau^k = k\Delta t$, $k=1, 2, \dots$) и по пространству (с шагами Δx). Дискретные шаги по времени и пространству составляют, как правило, доли соответствующих масштабов. Например, $\Delta t = 0.05$, $\Delta x = 0.5$.

Схема перешагивания (leapfrog) часто используется для вычисления траекторий частиц. При этом скорости частиц задаются на полупелых шагах по времени, а положения частиц и поля определяются на целых временных шагах (верхний индекс k). На уровне k известны величины $v^{k-1/2}$, \mathbf{x}^k , \mathbf{E}^k , \mathbf{B}^k . Дискретный аналог уравнения (4a) записывается в виде:

$$dv/dt \cong (v^{k+1/2} - v^{k-1/2}) / \Delta t = \mathbf{E}^k + \mathbf{v}^k \times \mathbf{B}^k. \quad (5)$$

В магнитном члене (последний член в уравнении (5)) \mathbf{v}^k центрируется обычным способом $\mathbf{v}^k = (\mathbf{v}^{k-1/2} + \mathbf{v}^{k+1/2}) / 2$. После использования обозначений $\delta = \Delta t / 2$, $\mathbf{U}^- = \mathbf{v}^{k-1/2} + \delta \mathbf{E}^k$, $\mathbf{U}^+ = \mathbf{v}^{k+1/2} - \delta \mathbf{E}^k$, разностное уравнение (5) переписывается в форме $\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^- = \delta \{ (\mathbf{U}^- + \mathbf{U}^+) \times \mathbf{B}^k \}$. Для определения значений полей \mathbf{E}^k и \mathbf{B}^k в точке нахождения частицы \mathbf{x}^k используется функции взвешивания $S(\mathbf{X}_j - \mathbf{x}^k)$ PIC-метода (см., [120-122]). Например, $\mathbf{E}^k = \sum_j S(\mathbf{X}_j - \mathbf{x}^k) \mathbf{E}_j^k$, j - индекс узла сетки.

В схеме Бориса (leapfrog Бориса) [123] (см. также [120-122]) движение частицы расщепляется на движение только в электрическом поле и движение только в магнитном поле: $\mathbf{U}^- = \mathbf{v}^{k-1/2} + \delta \mathbf{E}^k$, $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^- + \delta \mathbf{U}^- \times \mathbf{B}^k$, $\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^- + \mathbf{U}^* \times \mathbf{B}^k (2\delta / (1 + \delta^2 (\mathbf{B}^k \cdot \mathbf{B}^k)))$, $\mathbf{v}^{k+1/2} = \mathbf{U}^+ + \delta \mathbf{E}^k$. Искомый вектор \mathbf{U}^+ можно выписать в явном виде $\mathbf{U}^+ = \{ (1 - \delta^2 \mathbf{B}^2) \mathbf{U}^- + 2\delta^2 (\mathbf{B}^k \cdot \mathbf{U}^-) \mathbf{B}^k + 2\delta \mathbf{U}^- \times \mathbf{B}^k \} / (1 + \delta^2 \mathbf{B}^2)$, $\mathbf{B}^2 \equiv (\mathbf{B}^k \cdot \mathbf{B}^k)$. После нахождения $\mathbf{v}^{k+1/2}$ вычисляется новое положение частиц $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta t \mathbf{v}^{k+1/2}$.

Ионная часть тока вычисляется путем суммирования ионных моментов с использованием функции взвешивания $S(X_j - x^k)$. При этом для получения значения скорости на целочисленном уровне v_i^{k+1} частицы дополнительно продвигаются на временной полушаг $v^{k+1} = v^{k+1/2} + \delta(E^k + v^{k+1/2} \times B^k)$, где E^k и B^k вычисляются в точке x^{k+1} . В результате суммирования получается скорость потока ионов V_i^{k+1} . Ионная плотность n_i^{k+1} вычисляется по координатам частиц x_i^{k+1} также с использованием функции $S(X_j - x^{k+1})$. В одномерном случае (1-D) из условия квазинейтральности получаются значения электронной плотности и скорости ($n_e = n_i = n$, $V_{ex} = V_{ix} = V_x$).

Хотя все численные коды, использующие гибридные модели, обладают подобными свойствами, имеются различия в их численной реализации. В первую очередь это относится к методам решения уравнений поля. В обзоре [124] эти методы разбиваются на 3 группы; метод сопротивления (закон Ома); метод предиктор-корректора; метод гамильтониана.

Метод, использующий закон Ома (при наличии “резистивного” члена $\eta \cdot J$ в (4b)) для вычисления продольной компоненты электрического поля, предложен в работе [125] и в дальнейшем использовался в работах [126, 127] для изучения головной ударной волны вблизи магнитосферы земли. Метод был обобщен на двумерные задачи [128].

Метод предиктор-корректор для гибридного моделирования был предложен в работе [129] и использовался в одномерных кодах [130, 131]. для моделирования разогрева тяжелых ионов при развитии циклотронной неустойчивости. Обобщение на двумерную геометрию было сделано в [132].

В методе гамильтониана вместо скоростей частиц используются канонические моменты $P = Mv + qA/c$ ($P^{New} = v^{New} + A^{New}$; $P = MV_A + P^{New}$). Описание метода приведено в работе [133]. Канонические моменты $P_{\perp} = v_{\perp} + A_{\perp}$ частиц вычисляются в полуцелые моменты времени (например, для k-го временного слоя на $(k-1/2)$ -ом уровне).

6. Магнитопауза

Магнитопауза (МП) является границей сложной структуры, разделяющей ударно-сжатую плазму солнечного ветра (СВ) в магнитослое от более горячей, но менее плотной плазмы магнитосферы. Ранние теоретические модели рассматривали МП как тонкую границу между геомагнитным полем (B_E) и плазмой СВ. Локально структура МП существенно зависит от направления межпланетного магнитного поля (IMF), B_{IMF} , и классифицируется как “замкнутая” (“северное” направление IMF: B_{IMF} параллельно B_E) или “открытая” (“южное” направление IMF: B_{IMF} анти-

параллельно \mathbf{V}_E). В простейших моделях замкнутая структура МП идентифицируется как тангенциальный разрыв (TD), в то время как открытая структура МП рассматривается как вращательный разрыв (RD).

Согласно МГД теории магнитопауза при северном направлении IMF представляет собой простой TD. Однако, такая структура МП наблюдается очень редко. Вместо этого, наблюдения часто показывают, что МП ассоциируется с областью, в которой оказывается перемешанной плазма магнитослоя и магнитосферы. Такие области называются “пограничный слой” (BL) [134]. Толщина LLBL возрастает с увеличением расстояния от подсолнечной точки (Рис.2)

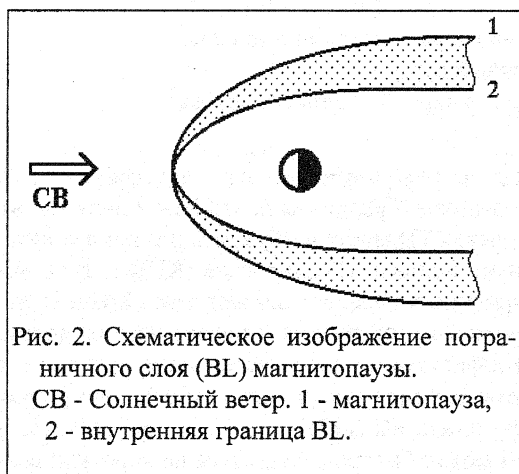


Рис. 2. Схематическое изображение пограничного слоя (BL) магнитопаузы. СВ - Солнечный ветер. 1 - магнитопауза, 2 - внутренняя граница BL.

Исследование процессов, в результате счет которых плазма СВ проникает через МП в магнитосферу, является важной проблемой физики магнитосферы. В настоящее время в основном рассматриваются три механизма переноса массы, импульса и энергии плазмы магнитослоя в магнитосферу:

1. вязкое взаимодействие СВ с магнитосферой за счет турбулентности в СВ [135];

2. магнитное пересоединение [136];

3. импульсное проникновение плазмы в результате “удара” о магнитопаузу токового слоя (сгустка) плазмы магнитослоя ([137]; работы по гибриднему моделированию этого механизма были рассмотрены в [3]).

Во время южного направления IMF магнитное пересоединение вблизи магнитопаузы является важным процессом, приводящим к сильной связи СВ с полями и плазмой магнитосферы [136]. При магнитном пересоединении происходит так называемое прямое вхождение потока вдоль открытых линий магнитного поля.

При северном направлении IMF усиление флуктуаций поля может привести к переносу частиц и энергии СВ через замкнутую МП. Этот процесс может происходить только за счет аномального переноса [138]. Перенос плазмы через МП называется вязким если усиление флуктуаций

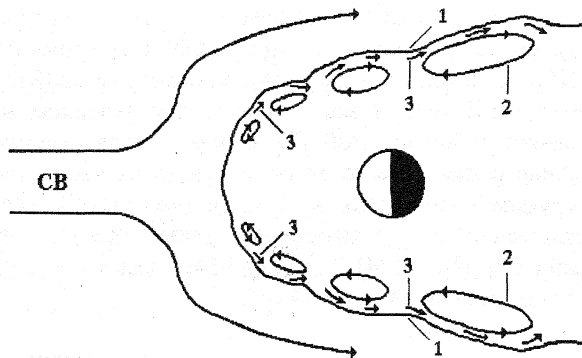


Рис. 3. Схема вихрей пограничного слоя.
 СВ - Солнечный ветер.
 1 - магнитопауза, 2 - вихри, 3 - скорость потока .

магнитного поля происходит в результате развития неустойчивостей, обусловленных широм потока ионов. Градиенты плотности и поля так же как и шир потока плазмы поперек TD могут возбуждать различные неустойчивости (нижне-гибридную, Кельвина-Гельмгольца (КНГ) и т.д.), которые в принципе могут приводить к переносу плазмы через МП и ее перемешиванию. При IMF северного направления и потоке плазмы вокруг флангов МП образуется конфигурация, соответствующая ситуации с большими углами между потоком и магнитным полем ($\sim 90^\circ$), для которой КНГ всегда неустойчива. Результаты МГД [79] и гибридного [111] моделирования показали, что КНГ может быстро развиваться на коротких волнах, которые в дальнейшем сливаются в более длинные структуры. В результате образуется область, в которой плазма магнитослоя и магнитосферы оказывается перемешанной. Результаты вычислений продемонстрировали, что свойства этой области очень похожи на свойства среды, наблюдаемые в низкоширотном пограничном слое (LLBL).

При развитии КНГ происходит конвективное нарастание поверхностной волны. В результате форма поверхностей МП и LLBL становится волнообразной. В одной из моделей LLBL вблизи дневной стороны [139] переходная область состоит из непроницаемой МП и осциллирующего LLBL, примыкающего к ее внутренней части. За счет шира скорости LLBL эволюционирует в бегущие вихри. На дневной стороне эти вихри конвективно сносятся в направлении хвоста и по мере их удаления от подсолнечной точки их размеры увеличиваются (Рис.3).

7. Гибридное моделирование процесса перемешивания Кельвина-Гельмгольца поперек слоя шира магнитопаузы.

Численное моделирование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КНГ) для магнитосферных приложений проводилось с использованием МГД [59,60,76-95], гибридных [111-116] и PIC [107,109] кодов. КНГ дневной магнитопаузы (МП) рассматривалась в [59,60,76-88], а изучение КНГ магнитопаузы с учетом ее связи с ионосферой в работах [91-95].

Эволюция во времени неустойчивости К-Н и поведение рассматриваемой системы, полученные в результате двумерного (2-D) гибридного моделирования [110-115], во многом похожи на результаты МГД моделирования (см., например, [59, 60, 76-88]): первоначально нарастают коротковолновые возмущения поскольку они имеют наибольший инкремент; затем эти возмущения эволюционируют в вихревые структуры; в дальнейшем происходит объединение (сливание) этих вихрей в более длинноволновые образования; в результате образуется широкий слой перемешивания частиц (ионов) сложной структуры. Скейлинг по длине волны инкремента нарастания качественно совпадает с МГД теорией за исключением случаев когда длина волны оказывается меньше ионного гирорадиуса. Однако, при гибридном моделировании появляются и другие эффекты, которые отсутствуют в МГД моделировании: например, возникновение мелкомасштабных структур, которые отделяются от границы [110] и обуславливают перемешивание на ранних временах [113].

Развитие неустойчивости К-Н ионопаузы немагнитных планет (например, Венеры) во многом напоминает КНГ магнитосферы Земли. Изучение КНГ ионосферы Венеры проводилось с помощью гибридного моделирования неоднородных конфигураций, в которых магнитное поле с одной стороны разрыва (а именно со стороны ионосферы) задавалось очень малым [110].

В гибридном моделировании КНГ магнитопаузы Земли [111] конечное магнитное поле присутствовало на обеих сторонах границы (МП). Использовался 2-D электромагнитный код работы [140]. С целью моделирования подсолнечной МП рассматривалась конфигурация, в которой шир скорости потока был почти перпендикулярен магнитному полю и градиентам плотностей частиц. При этом использовались простейшие предположения (IMF имело северное направление; МП рассматривалась как тангенциальный разрыв).

В начале расчета [111] состояние системы задавалось в виде равновесия Власова. Общая процедура формирования такого равновесия, включая шир скорости, была предложена в [141]. На каждой стороне разрыва (магнитослой, магнитосфера) задаются функции распределения ионов (и электронов), зависящие только от констант (интегралов) движения

частиц. В частности, функции распределения выбираются в виде произведения экспоненты на функцию ошибок с константами, выбранными таким образом, что ионная плотность магнитослоя быстро падает на магнитосферной стороне разрыва и наоборот. После интегрирования по скоростям этих распределений получаются значения заряда и тока. Затем решаются уравнения Пуассона и Ампера для получения электростатического и векторного потенциалов, что дает распределения электрического и магнитного полей. После этого константы распределений по скоростям могут быть подправлены и процедура повторяется до тех пор пока не будут получены “заданные” профили магнитного поля, скоростей потоков и плотностей частиц. В работе [111] начальное ($t=0$) отношение ионных плотностей в двух областях (магнитослой/магнитосфера) равнялось 10, ширина переходного слоя $2a=1.5\delta_i$ ($\delta_i=c/\omega_{pi}$), температуры ионов равны на обеих сторонах границы, а температура электронов составляла половину значения температуры ионов ($T_e/T_i=0.5$). В следствии баланса полного давления при переходе через границу магнитное поле уменьшалось в 2.5 раза.

Расчеты 2-D гибридного моделирования [111] проводились в декартовой системе координат. Ось z была направлена вдоль нормали к поверхности разрыва ($z=0$) в сторону Солнца. Правая полуплоскость ($z>0$) соответствовала магнитослою, левая ($z<0$) - магнитосфере. Ось x лежала в плоскости разрыва. Область моделирования размером ($L_z \times L_x$) $40\delta_i \times 40\delta_i$ разбивалась на $N_c=200 \times 100$ ячеек пространственной сетки. Среднее число частиц (ионов) на ячейку сетки $N_{pc}=40$. Такое относительно малое значение N_{pc} было выбрано из соображений разумного компромисса, поскольку расчеты необходимо было проводить на протяжении многих ионных циклотронных периодов ($\cong 300\Omega_i t$). В x направлении задавались периодические краевые условия для полей и частиц. По z направлению для ионов использовались условия отражения на границах области расчета, а значения полей на этих границах задавались равными соответствующим равновесным значениям (полученным в начале расчета). В работе [109] было установлено, что перемешивание ионов становится менее эффективным когда в фоновой плазме имеются неоднородности. Такое снижение эффективности происходило из-за исчезновения хорошо выраженного вихревого движения.

В гибридном моделировании [112-115] (поперечный случай: $V \perp B$) было показано, что перемешивание частиц происходит внутри К-Н вихря МГД-масштаба, в противоположность конвекционной (МГД) теории, основанной на концепции вмороженности магнитного поля, в которой это перемешивание должно проявляться на больших масштабах. Эффективность К-Н перемешивания поперек слоя шира, т.е. перемешивание ионов,

первоначально расположенных по разные стороны этого слоя, оказалась аномально высокой по сравнению с перемешиванием, которое могло быть результатом конвективного FLR перемешивания. Наличие такого аномально эффективного процесса перемешивания привело авторов этих работ к предположению, что К-Н перемешивание является возможным механизмом формирования низкоширотного пограничного слоя (LLBL) [139].

Детальное описание 2-D гибридного кода, использованного в численном моделировании [112-115], представлено в [112], а краткое изложение основных положений алгоритма в [114]. В этом алгоритме используются уравнения поля

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{V}_e \times \mathbf{B} - \nabla P_e / 2\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \rho(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e), \quad \frac{d P_e}{dt} = 0, \quad \gamma = 5/3,$$

и уравнения Ньютона для каждой частицы (иона)

$$d\mathbf{v} / dt = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{x} / dt = \mathbf{v}.$$

Уравнения записаны в безразмерных переменных системы (4). В качестве начальных условий были выбраны величины соответствующего простейшему случаю [114]: однородное магнитное поле и плотность плазмы $V_{z0} = \rho_0 = 1$; шир скорости потока в форме

$$V_{y0}(x) = 0.5 \Delta V_0 \operatorname{th}(x/a), \quad (6)$$

где, $\Delta V_0 = M_A$, $M_A = 1$, $a = 2 \sim 6$. Ионное и электронное бета имели значения $\beta_i = 1$, $\beta_e = 0$. Область расчета: $-15a < x < 15a$; $0 < y < \lambda$, где λ - длина волны наиболее быстро нарастающей моды ($=15a$), полученная из линейной теории [52,96]. Шаги пространственной сетки $\Delta x = \Delta y = a/4$, временной шаг $\Delta t = a/40$. В y -направлении были использованы периодические краевые условия, а на x границах $\partial V_z / \partial x = 0$. Начальное расположение частиц задавалось однородным по пространству с максвелловским распределением по скоростям. Число частиц в каждой ячейке сетки $N_{pe} = 64$.

Для количественной характеристики процесса перемешивания частиц поперек слоя шира в ходе вычислений [112-115] прослеживалось положение частиц двух групп. В начале расчета частицы одной группы располагались в области $x < -a$, в то время как частицы второй группы в области $x > a$. Область расчета делилась на ячейки размером $1R_L \times 1R_L$. В процессе вычислений для каждой ячейки подсчитывалось число частиц из каждой группы. Ячейка называлась "ячейкой перемешивания" если число частиц каждой из двух групп составляло более четверти общего числа частиц в этой ячейке.

В работах [112-115] состояние системы при насыщении КНП было похоже на состояние насыщения в МГД расчетах. В этих работах было найдено, что время развития области перемешивания определяется той же самой функциональной зависимостью, что и в МГД моделировании. Процесс перемешивания протекает в два этапа [113,114]. Временное поведение площади области перемешивания вихря описывается формулой $S_{\text{mix}} = a\lambda[(t-t_1)/t_{\text{mix}}]^2$ для ранней стадии процесса (на временах $t < 5t_F$) (“ t^2 перемешивание”) и $S_{\text{mix}} = 2a\lambda[(Dt)^{1/2}/a - 1]$ (при $t > a^2/D$) для последующего (второго) более медленного этапа ($t > 5t_F$). В этих формулах $t_{\text{mix}} \sim t_F$ ($t_F = 2\lambda/\Delta V_0$ - характерное гидродинамическое время перемешивания; ΔV_0 - скачок скорости поперек слоя шира), $D \sim 3a^2/t_F$, λ - длина волны наиболее быстро нарастающей моды [96]. (В работе [113] введен индекс перемешивания $I_{\text{mix}} \equiv S_{\text{mix}}/a\lambda$.) На первом этапе происходит перемешивание, обусловленное рассеянием на гиперболической точке во время фазового сжатия, в то время как на втором этапе перемешивание происходит внутри осциллирующего вихря и имеет ту же самую функциональную форму, что и перемешивание в результате одномерного диффузионного процесса с коэффициентом D (“диффузионное перемешивание”). Размер области вихревого острова (т.е. области, окруженной замкнутыми линия потока (в режиме насыщения КНП)) оценивается по формуле $L_d \sim \lambda(t/t_F)$ [112].

В работе [114] изучалась временное поведение КНП при наличии однородного плазменного фона. На основании результатов расчетов было показано, что К-Н перемешивание подчиняется гидродинамическому закону подобия. В системе с единственным вихрем, как было отмечено выше, после начального переходного процесса К-Н перемешивание развивается по квадратичному закону ($\sim t^2$; фазовое сжатие вихря), а затем становится линейным ($\sim t$; заполнение внутренней части вихря за счет диффузионного перемешивания). Вся область внутри вихря становится областью перемешивания после достаточно большого времени расчета (в [114] вычисления проводились до $400\Omega_i t$). Временной масштаб К-Н перемешивания, найденный на основании результатов численного моделирования, оказался гидродинамическим масштабом ($t \sim t_F$). В более общей ситуации, когда в моделирование включается процесс слияния мелких вихрей в более крупные, эффективность К-Н перемешивания контролируется изменением размера области вихревого острова [114]. К-Н перемешивание действует даже при наличии слоя шира скорости большой толщины ($2a \gg R_L$) когда крупномасштабное перемешивание по видимому должно быть подавленным.

Одной из целей 2-D моделирования [115] было изучение задачи [111] в более обширной области параметров. При этом основное внимание было обращено на исследование влияния неоднородности фоновой

плазмы на процесс К-Н перемешивания частиц. В начальный момент времени ($t=0$) в дополнение к шире скорости (6) аналогично задавался неоднородный профиль плотности $\rho(x)=1+0.5(r-1)(\text{th}(x/a)+1)$, r - отношение плотностей на обеих сторонах разрыва. Плотность была нормирована на ее значение в магнитосфере ($\rho_{MSF}=1$); $k_B T_i = \beta_0$; $k_B T_e = 0$. Значения параметров расчета: $15a < x < 15a$; $0 < y < 15a$ (λ) или $-30a < x < 30a$; $0 < y < 30a$ (2λ); $\Delta x = \Delta y = a/4$, $\Delta t = a/40$; $N_{pe} = 50$ в области магнитосферы. В этой работе было показано, что снижение эффективности К-Н перемешивания происходит за счет двух эффектов. Во-первых, в случае когда КН развивается в относительно тонком слое шире размер вихря в состоянии насыщения становится меньше. В этой ситуации было предположено, что механизм развития КН обусловлен эффектом FLR. Этот механизм проявляется в случае когда толщина слоя шире и размер вихря оказываются малыми и являются функциями отношения плотностей на двух сторонах разрыва и плазменного бета. Второй механизм обусловлен неоднородностью как таковой и работает даже в вихре большого размера. При наличии соответствующих условий этот механизм превалирует над первым.

В общем случае, использование двумерной (2-D) вычислительной модели накладывает ограничение на движение частиц, обусловленное сохранением компоненты канонического импульса вне плоскости моделирования, что эффективно предотвращает убегание ионов на расстояния более чем на гирорадиус от их начального положения относительно компоненты магнитного поля в плоскости моделирования. В случае когда магнитное поле расположено вне плоскости моделирования не возникает никаких проблем, но в более общем случае такое ограничение оказывается существенным. Двумерность модели накладывает также искусственное ограничение на волновой вектор, который в случае КН устанавливается преимущественно перпендикулярно к окружающему магнитному полю когда инкремент нарастания оказывается максимальным в этом направлении. Для трехмерного случая локально волновой вектор может в действительности быть повсюду перпендикулярным окружающему магнитному полю даже если поле вращается. Понятно, что такое положение оказывается неверным в 2-D модели. В двумерных вычислениях с однопольным магнитным полем, расположенным вне плоскости моделирования, не могут также протекать процессы пересоединения магнитных силовых линий. Кроме того, нелинейное состояние в 3-D может отличаться от состояния в 2-D. Таким образом, для исследования неустойчивости К-Н в случае вращения магнитного поля на границе (как это имеет место на магнитопаузе) требуется полное 3-D моделирование.

В трехмерном (3-D) моделировании [116] изучались некоторые аспекты КНП. Результаты расчетов сравнивались с результатами соответствующих расчетов 2-D моделирования в трех случаях:

- (1) скорость потока перпендикулярна магнитному полю;
- (2) поток плазмы распространяется под некоторым углом к магнитному полю;
- (3) в слое шири скорости происходит вращение магнитного поля.

Как и в работе [111] использовался вычислительный код [140]. В направлении нормали к поверхности разрыва для ионов накладывались граничные условия отражения, а поля задавались своими равновесными значениями на границах. В оставшихся двух направлениях ставились периодические граничные условия. Начальный профиль скорости выбирался как и в работе [114] (т.е. (6)), а профиль плотности - однородным по пространству. Электроны рассматривались в изотермическом приближении со значением $\beta_e=0.2$, а для ионов выбиралось соответственно $\beta_i=1.0$. Область моделирования размером $25\delta_i \times 25\delta_i \times 50\delta_i$ разбивалась на $N_c=25 \times 25 \times 50$ ячеек. Направлению нормали к слою шири соответствовало 50 ячеек. Точно такое же пространственное разрешение использовалось и в 2-D моделировании. Среднее число частиц (ионов) на ячейку сетки составляло $N_{pc}=50$. Поскольку $\beta_i=1.0$, то ионный гирорадиус равнялся размеру ячейки сетки ($R_L=\delta_i$), а ширина слоя шири задавалась двумя ячейками сетки ($2a=2\delta_i$). Такие значения размеров ячеек пространственной сетки и временного шага ($\Omega_i \Delta t=0.3$) были выбраны на основании многочисленных 2-D расчетов: результаты расчетов при этих значениях шагов сетки оставались в основном теми же самыми, что и при расчете с более мелкими шагами. Проведение таких методических расчетов в 2-D имеет исключительную важность для 3-D моделирования, поскольку увеличение разрешимости (уменьшение шага сетки) в каждом направлении, например, в 2 раза может увеличить время расчета в 16 раз.

В поперечной геометрии для однородных скорости и магнитного поля перемешивание в 3-D моделировании оказалось приблизительно тем же самым, что и в 2-D. Такой результат не противоречит результатам 3-D гидродинамических вычислений (см., например, [142]): в системе вихрей появлялось очень небольшое число очевидных 3-D структур. Реальные 3-D структуры могут появляться за счет более полного спектра мод и/или в результате развития неустойчивости линейных волн со значительной величиной k_{\parallel} (что требует больших значений дрейфовых скоростей чем это было использовано в [116]).

При 3-D рассмотрении систем с вращением магнитного поля поперек поверхности раздела (как, например, на магнитопаузе) в произвольном случае выполнение условия $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}=0$ на обеих сторонах поверхности

становится невозможным. В некотором смысле это ограничение становится более жестким для малых значений углов вращения. Например, вращение на 90° "поддерживается" на квадратной сетке в том смысле, что на любой стороне разрыва условие $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0$ легко удовлетворяется. Вращение же на небольшие углы означает, что условие $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0$ вообще не может удовлетворяться одновременно на двух сторонах поверхности. Качественно необходимое разрешение определяется выражением [116] $\Delta V_0 / \cos(\theta) > \Delta$, где $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = kV \cos(\theta)$, а Δ - толщина слоя шира после насыщения неустойчивости. В общем случае это выражение означает очень жесткое ограничение.

В работе [116] были представлены результаты двух расчетов систем с вращением магнитного поля поперек поверхности раздела (18° и 30°). В этих расчетах было подтверждено сильное ослабление нелинейных эффектов КНП. Таким образом, оказалось, что снижение эффективности перемешивания за счет КНП не является артефактом 2-D вычислений, а имеет место и в 3-D моделировании. Вывод о сильном уменьшении эффективности КНП (т.е. К-Н перемешивании) при наличии вращения поля согласуется с результатами ранее проведенного 3-D МГД моделирования [94], где такое поведение было обусловлено эффектом привязки линий поля (в ионосфере); при этом было наложено условие $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} \neq 0$.

8. Гибридное моделирование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца объектов конечного размера.

Важным и интересным случаем неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (КНП) является ее развитие в конфигурациях, пространственное протяжение которых ограничено по крайней мере в одном измерении. Примерами таких объектов в магнитосферных приложениях могут служить хвосты комет I-го типа, плазменные струи (пучки) и т.д. Плазменные струи (или пучки) представляют собой объекты, пространственное протяжение которых ограничено в направлении, перпендикулярном относительно их распространения.

КНП для струи, движущейся поперек магнитного поля ($\mathbf{V} \perp \mathbf{B}$, $V > V_A$) изучалась в работе [117] с помощью 2-D гибридного моделирования. В этой работе были представлены результаты численных расчетов (код [140]) простейшего случая потока пограничного слоя при наличии обращения (реверса) магнитного поля. В используемой модели одна часть плазмы (струя) распространялась относительно другой (фонная плазма) в середине области обращения поля.

Численное моделирование [117] начиналось с расчета власовского равновесия (как и в [111]). Электроны рассматривались в изотермическом

приближении с $\beta_e=0.2$, $\beta_i=0.76$ (2.2) для плазмы фона (струи). Максимальное значение скорости струи равнялось приблизительно удвоенной альфвеновской скорости окружающей среды. Размер области моделирования $100\delta_i \times 100\delta_i$ ($N_c=200 \times 200$). $N_{pc}=50$, $\Omega_i \Delta t=0.125$ (Ω_i соответствовало магнитному полю окружающей плазмы).

Расчеты [117] продемонстрировали эволюцию поверхностных волн на обоих краях струи конечного размера. Сначала развивалась коротковолновая неустойчивость, которая была охарактеризована как локальная КНІ. Насыщение этой неустойчивости происходило при малых амплитудах. Образовавшиеся локальные возмущения служили затравкой для развития нелокальной КНІ, приводящей к возмущениям струи типа изгиба, которые распространялись вдоль границы и в конечном счете разрушали поток (струю).

В конце расчета графическое представление результатов (срезы "области взаимодействия") имели сходство с поведением МП при южном направлении IMF (и за исключением реверса поля также и при северном направлении IMF). На основании этих результатов в [117] было сделано предположение, что в областях ускоренных потоков конфигурации пересоединения возможно развитие КНІ, которая могла бы быть ответственна за часть переноса через пограничный слой.

При взаимодействии солнечного ветра с "немагнитными" объектами (например, Венерой) интересным вопросом является неустойчивое поведение границы (ионопаузы) между набегающим СВ и плазмой ионосферы. В работе [118] гибридное моделирование применялось для исследования взаимодействия между цилиндрическим плазменным источником с нулевым собственным магнитным полем и потоком замагниченной плазмы типа СВ (ситуации похожая на ионопаузу Венеры). В результате истечения плазмы с препятствия устанавливалась граница между выходящим потоком этой плазмы и набегающей плазмой СВ. За счет самосогласованной постановки задачи на этой границе естественным образом создавался шир скорости, а поскольку магнитное поле в моделировании было перпендикулярно потоку, то при малом шире скорости могла возбуждаться КНІ.

2-D моделирование [118] проводилось с использованием численного кода [140]. Вместо вычисления власовского равновесия в начале расчета (как, например, в [111,117]) в цилиндрической области задавался поток плазмы, вытекающий с постоянной скоростью. Параметры моделирования: $(L_x \times L_y)=80\delta_i \times 300\delta_i$; $\Delta x=\Delta y=0.5\delta_i$; $N_{pc}=10$ в окружающем СВ; $N_{pc} \approx 80$ для ионосферных ионов; $\Omega_i \Delta t=0.025$; $\beta_e=0.05 \div 0.5$ (в СВ); $\beta_i=0.2$ (0.01) в СВ (препятствии). Скорость $V_0=3V_A$, а непрерывно создаваемая вытекающая плазма имела радиальную скорость $0.5 \div 1V_A$ ($1/6 \div 1/3 V_0$). Для

улучшения сглаживания полей в алгоритм добавлялось небольшое сопротивление, за счет которого $\Delta X_d = \eta c^2 / (4\pi V_0) = 0.025 \Delta x$ (ΔX_d - длина резистивной диффузии).

Результаты гибридного моделирования [118] продемонстрировали важность КНД для процессов, протекающих на дневной стороне взаимодействия СВ с “немагнитными” планетами. Движение граничной поверхности может быть причиной замедления тяжелой жидкости легкой - классическая ситуация для развития неустойчивости Рэлея-Тейлора, в результате которой на поверхности раздела происходит генерация желобковых мод типа “пальцев”. В ходе расчетов [118] эти моды служили затравочными возмущениями для последующего развития КНД, которая в свою очередь приводила к “завихрению” нитей потока и переходу к более длинноволновым модам когда плазма конвективно смешалась вокруг объекта. Для появления эффектов Рэлея-Тейлора движение самой границы не обязательно: достаточно, чтобы радиальный поток конечной скорости был остановлен магнитным полем. Наличие азимутальной скорости плазмы необходимо для ее сноса от подсолнечной точки.

На основании результатов моделирования [118] было подчеркнуто, что упрощенное моделирование с использованием только одного источника свободной энергии (например, шира скорости) уступает в реалистичности описания явлений более полному моделированию при включении в рассмотрение самосогласованного взаимодействия большого числа различных физических эффектов (в работе [118] неустойчивости Рэлея-Тейлора и Кельвина-Гельмгольца).

Эволюция во времени неустойчивости Рэлея-Тейлора в двумерной плазме с малым значением β численно исследовалась в [143]. Расчеты проводились с использованием как гибридного кода, так и кода неидеальной МГД (учет холловского члена, поправки FLR). Подробно рассматривались три случая: идеальной МГД; МГД с учетом слабых и сильных эффектов неидеальности. В идеальной МГД при развитии неустойчивости появлялись обычные “пузыри” и “спицы”. В случае слабой неидеальности доминировали длинноволновые моды, что напоминало развитие КНД, а на границе раздела развивались коротковолновые филаменты. При наличии сильной неидеальности преобладали структуры мелкого масштаба, а релаксация граничного слоя протекала за счет диффузионного процесса, а не за счет нелинейного крупномасштабного перемешивания. Результаты расчетов по двум кодам (гибридному и МГД) оказались в хорошем соответствии.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 96-01-01171а.

Литература

1. Филиппычев Д.С. Гибридное моделирование плазмы космического пространства: Модели с представлением электронов в виде безмассовой жидкости. 1. Бесстолкновительные ударные волны. //Прикладная математика и информатика N 1: Сб.//Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: Диалог-МГУ, 1999, с. 20-50
2. Филиппычев Д.С. Гибридное моделирование плазмы космического пространства: Модели с представлением электронов в виде безмассовой жидкости. 2. Медленные и промежуточные ударные волны.// Прикладная математика и информатика N 2: Сб. //Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: Диалог-МГУ, 1999, С. 5-33.
3. Филиппычев Д.С. Гибридное моделирование плазмы космического пространства: Модели с представлением электронов в виде безмассовой жидкости. 3. Безударные разрывы. // Прикладная математика и информатика N 4: Сб. //Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2000, С. 5-56.
4. Huba J.D. Hall dynamics of the Kelvin-Helmholtz instability. //Phys.Rev. Lett. 1994. Vol.72, N 13. P. 2033-2036.
5. Yoon P.H., Drake J.F., Lui A.T.Y. Theory and simulation of Kelvin-Helmholtz instability in the geomagnetic tail. //J.Geophys. Res.A. 1996. Vol.101, N A12. P. 27327-27339.
6. Huba J.D. Hall magnetohydrodynamics in space and laboratory plasmas. //Phys. Plasmas 1995. Vol. 2, N 6. Pt. 2. P. 2504-2513.
7. Heikkila W.J. Critique of fluid theory of magnetspheric phenomena. //Astrophys.Space Sci. 1973. Vol. 23, N 2. P. 261-268.
8. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. - М.: Наука, 1977. 335 с.
9. Ginzburg V.L., Ruhadze A.A. Waves and resonances in magneto-active plasma. //Encyclopedia of Physics. (Handbuch der Physik). /Chief editor. S.Flugge. - Berlin•Heidelberg•New York: Spinger-Verlag, 1972. Vol. XLIX/4 : Geophysics III. Part IV./Edited by K.Rawer.. P. 395-560.
10. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме.-М.: Наука, 1975. 256с.
11. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. The Boltzmann equation and one-fluid hydrodynamic equations in the absence of particle collisions. //Proc.Roy.Soc.London. 1956. Vol. A236, N1204. P.112-118. перевод: Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. - Проблемы Современной Физики. -М.:ИЛ, 1957. N 7. С. 139-145.

12. Oraevskii V.N., Chodura R., Feneberg B. Hydromagnetic equations for plasmas in strong magnetic fields. 1. Collisionless approximation. // *Plasma Phys.* 1968. **Vol. 10**, N 9. P.819-828.
13. Ruderman M.S., Fahr H.J. The effect of magnetic fields on the macroscopic instability of the heliopause. Pt.1, Parallel interstellar magnetic fields. // *Astron. & Astrophys.* 1993. **Vol. 275**, N 2. P. 635-644.
14. Кузнецов В.Д., Накаряков В.М., Цыганов П.В. Влияние температурной анизотропии плазмы на неустойчивость Кельвина-Гельгольца гелиопаузы. // *Письма в Астрон. Журн.* 1995. **Т. 21**. N 10. С. 793-797.
15. Михайловский А.Б. Электромагнитные неустойчивости неоднородной плазмы. - М.: *Энергоатомиздат*, 1991. 352 с. Гл. 13.
16. Ландау Л.Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости. // *Докл. Акад. Наук СССР.* 1944. **Т. 44**. N 4. С. 151-153.
17. Сыроватский С.И. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. // *ЖЭТФ* 1953. **Т. 24**. N 6. С. 622-630.
18. Сыроватский С.И. Неустойчивость тангенциальных разрывов в магнитодинамической среде. // *ЖЭТФ* 1954. **Т. 27**. N 1 (7). С. 121-123.
19. Сыроватский С.И. Магнитная гидродинамика. // *УФН* 1957. **Т. 62**. N 3. С. 247-303.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - (Теоретическая физика, **Т. VIII**) - М.: *Гостехиздат*, 1957. 532 с.; М.: *Физматгиз*, 1959. 532 с.; 2-е изд. - М.: *Наука*, 1982. 623 с.; 3-е изд. - М.: *Наука*, 1992. 661 с.
21. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. - New York: *Oxford University Press*. 1961.
22. Dungey J.W. Waves and particles in the magnetosphere. // *Physics of the Magnetosphere. Edited by R.L. Carovillano, J.F. McClay, H.R. Radoski.* - Dordrecht: *D.Reidel*, 1968. P. 218-259.
23. Gerwin R.A. Stability of the interface between two fluids in relative motion. // *Rev.Mod.Phys.* 1968. **Vol. 40**, N 3. P. 652-658.
24. Михайловский А.Б. Электромагнитные неустойчивости немаксвелловской плазмы. // *Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича.* - М.: *Атомиздат*. 1972, **Вып. 6**. С. 70-138.
25. Sen A.K. Stability of hydromagnetic Kelvin-Helmholtz discontinuity. // *Phys.Fluids.* 1963. **Vol. 6**, N 8. P. 1154-1163.
26. Fejer J.A. Hydromagnetic instability at a fluid velocity discontinuity between compressible fluids. // *Phys.Fluids.* 1964. **Vol. 7**, N 4. P. 499-503.
27. Sen A.K. Effect of compressibility on Kelvin-Helmholtz instability in a plasma. // *Phys.Fluids.* 1964. **Vol.7**, N 8. P. 1293-1298.
28. Talwar S.P. Hydromagnetic stability at the magnetospheric boundary. // *J.Geophys.Res.* 1964. **Vol. 69**, N 13. P. 2707-2714.

29. Southwood D.J. The hydromagnetic stability of the magnetospheric boundary. //Planet. Space Sci. 1968. **Vol.18**, N 5. P. 587-605.
30. McKenzie J.F. Hydromagnetic wave interaction with the magnetopause and the bow shock. //Planet. Space Sci. 1970. **Vol. 18**, N 1. P. 1-23.
31. McKenzie J.F. Hydromagnetic oscillations of the geomagnetic tail and plasma sheet. //J.Geophys.Res. 1970. **Vol. 75**, N 28. P. 5331-5339.
32. Ong R.S.B., Roderick N. On the Kelvin-Helmholtz instability of the Earth's magnetopause. //Planet. Space Sci. 1972. **Vol.20**, N 1. P. 1-10.
33. Duhau S., Gratton J. Effect of compressibility on the stability of a vortex sheet in a ideal magnetofluid. //Phys. Fluids. 1973. **Vol.16**, N 1. P. 150-152.
34. Pu Z.-Y., Kivelson M.G. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause: Solution for compressible plasmas. //J.Geophys.Res.A. 1983. **Vol.88**, N A2. P. 841-852.
35. Pu Z.-Y., Kivelson M.G. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause: Energy flux into the magnetosphere. //J.Geophys.Res.A. 1983. **Vol.88**, N A2. P. 853-861.
36. Roy Choudhury S. An analytic study of the Kelvin-Helmholtz instability of compressible, magnetized, anisotropic, and isotropic tangential velocity discontinuities. //Phys.Fluids. 1986. **Vol.29**, N 5. P. 1509-1519.
37. Дробыш А.Ю., Ковалев И.В., Остряков В.М. Влияние МГД-турбулентности на устойчивость тангенциального разрыва. -С.-Петербург: *Физ.-Техн. Ин-т РАН*, 1997. Препринт N 1688. 21 с.
38. Fahr H.J., Neutsch W., Grzedzielski S., Macek K., Ratkiewicz-Landovska R. Plasma transport across the heliopause. //Space Sci.Rev. 1986. **Vol.43**, N 3-4. P. 329-381.
39. Baranov V.B., Fahr H.J., Ruderman M.S. Investigation of macroscopic instabilities at the heliosphere boundary. //Astron.& Astrophys. 1992. **Vol. 261**, N 1. P. 341-347.
40. Dobrowolny M. Kelvin-Helmholtz instability in a high β collisionless plasma. //Phys.Fluids. 1972. **Vol.15**, N 12. P. 2263-2270.
41. Dobrowolny M. Velocity shear instability of Alfvén waves in a high β collisionless plasma. //Phys.Fluids. 1977. **Vol.20**, N 6. P. 1027-1028.
42. Lerche I. Validity of the hydromagnetic approach in discussing instability. //J.Geophys.Res. 1966. **Vol. 71**, N 9. P. 2365-2371.
43. Sen A.K. Discussion of paper by I. Lerche "Validity of the hydromagnetic approach in discussing instability". //J.Geophys.Res. 1968. **Vol. 73**, N 15. P. 5015-5016.; Lerche I. **Reply**. //Ibid. P. 5017.
44. Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. //J.Fluid Mech. 1964. **Vol.19**, Pt. 4. P. 543-556.
45. Blumen W. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. //J.Fluid Mech. 1970. **Vol.40**, Pt. 4. P. 769-781.

46. Blumen W., Drazin P.G., Billing D.F. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Part 2. // *J.Fluid Mech.* 1975. **Vol.71**, Pt. 2. P. 305-316.
47. Drazin P.G., Davey A. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Part 3. // *J.Fluid Mech.* 1977. **Vol.82**, Pt. 2. P. 255-263.
48. Chen L., Hasegawa A. A theory of long-period magnetic pulsations. 2. Impulsive excitation of surface eigenmode. // *J.Geophys.Res.* 1974. **Vol.79**, N 7. P. 1033-1037.
49. Oshawa Y., Nosaki K., Hasegawa A. Kinetic theory of MHD Kelvin-Helmholtz instability. // *Phys.Fluids.* 1976. **Vol.19**, N 8. P. 1139-1143.
50. Lau Y.Y., Liu C.S. Stability of shear flow in a magnetized plasma. // *Phys.Fluids.* 1980. **Vol.23**, N 5. P. 939-941.
51. Ray T.P. The effects of a simple layer on the growth of Kelvin-Helmholtz instability. // *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 1982. **Vol.198**, N 2. P. 617-625.
52. Miura A., Pritchett P.L. Nonlocal stability analysis of the MHD Kelvin-Helmholtz instability in a compressible plasma. // *J.Geophys.Res.A.* 1982. **Vol.87**, N A9. P. 7431-7444.
53. Roy Choudhury S., Lovelace R.V. On the Kelvin-Helmholtz instabilities of supersonic shear layers. // *Astrophys.J.* 1984. **Vol.283**, N 1 Pt. 1. P. 331-342.
54. Ray T.P., Ershkovich A.I. Kelvin-Helmholtz instabilities in a sheared compressible plasma. // *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 1983. **Vol.204**, N 2. P. 821-831.
55. Roy Choudhury S. Kelvin-Helmholtz instabilities of supersonic, magnetized shear layers. // *J. Plasma Phys.* 1986. **Vol.35**, Pt. 3. P. 375-392.
56. Roy Choudhury S., Lovelace R.V. On the Kelvin-Helmholtz instabilities of high-velocity magnetized shear layers. // *Astrophys.J.* 1986. **Vol.302**, N 1 Pt. 1. P. 188-189.
57. Walker A.D.M. The Kelvin-Helmholtz instability in the low latitude boundary layer. // *Planet.Space Sci.* 1981. **Vol. 29**, N 10. P. 1119-1133.
58. Mishin V.V., Morozov A.G. On the effect of oblique disturbances on Kelvin-Helmholtz instability at magnetospheric boundary layers and in solar wind. // *Planet.Space Sci.* 1983. **Vol. 31**, N 3. P. 821-828.
59. Miura A. Simulation of Kelvin-Helmholtz instability at the magnetospheric boundary. // *J.Geophys.Res.A.* 1987. **Vol.92**, N A4. P. 3195-3206.
60. Belmont G., Chanteur G. Advances in magnetopause: Kelvin-Helmholtz instability studies. // *Phys.Scr.* 1989. **Vol. 40**, N 1. P. 124-128.
61. Talwar S.P. Kelvin-Helmholtz instability in an anisotropic plasma. // *Phys.Fluids.* 1965. **Vol. 8**, N 7. P. 1295-1299.
62. Gratton J., Gratton F. Kelvin-Helmholtz instability of a non-isothermal plasma in a magnetic field. // *Plasma Phys.* 1971. **Vol. 13**, N 7. P. 567-585.

63. Rajaram R., Kalra G.L., Tandon J.N. Viscous interaction at solar wind - magnetosphere boundary. //J.Atmos.Terr. Phys.1973. Vol. 35, N 11. P. 2069-2079.
64. Duhau S., Gratton J. Kelvin-Helmholtz instability of anisotropic plasma in a magnetic field. //J.Plasma Phys.1975. Vol. 13, Pt. 3. P. 451-479.
65. Kalra G.L., Tandon J.N., Rajaram R. Stability of the magnetopause. //Astrophys.Space Sci.1976. Vol. 43, N 2. P. 443-448.
66. Roy Choudhury S., Patel V.L. Kelvin-Helmholtz instability of high-velocity magnetized, anisotropic shear layers. //Phys.Fluids. 1985. Vol.28, N 11. P. 3292-3301.
67. Rajaram R., Sibeck D.G., McEntire R.W. Linear theory of the Kelvin-Helmholtz instability in the low-latitude boundary layer. //J.Geophys.Res.A.1991. Vol. 96, N A6. P. 9615-9626.
68. Кузнецов В.Д., Ораевский В.Н. МГД неустойчивости в плоскостной атмосфере с анизотропным давлением.//Письма в Астрон. Журн. 1992. Т. 18. N 6. С. 547-559.
69. Sharma P.K., Chhajlani R.K. Kelvin-Helmholtz instability of a plasma with anisotropic and polytropic pressure laws. //J.Plasm.Phys. 1998. Vol. 60, Pt. 2. P. 229-241.
70. Sharma P.K., Chhajlani R.K. Kelvin-Helmholtz instability of magnetized plasma with polytropic pressure laws. //Phys.Plasm. 1998. Vol. 5, N 3. P. 625-634.
71. Singh S.V., Rao N.N., Bharuthram R. Kelvin-Helmholtz instability in the presence of dust charge fluctuations. //Phys.Plasm. 1998. Vol. 5, N 7. P. 2477-2479.
72. Nepveu M. On shear layers in double radio sources. //Astron.&Astrophys. 1980. Vol. 84, N1-2. P. 14-22.
73. Tajima T., Leboeuf J.N. Kelvin-Helmholtz instability in supersonic and super-Alfvénic fluids. //Phys.Fluids 1980. Vol. 23, N 5. P. 884-888.
74. Norman M.L., Smart L., Winkler K.H.A., Smith M.D. Structure and dynamics of supersonic jets. //Astron.&Astrophys. 1982. Vol.113, N 2 Pt. 2. P. 285-302.
75. Miura A. Nonlinear evolution of the magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instability. //Phys.Rev.Lett.1982. Vol. 49, N 11. P. 779-782.
76. Miura A. Anomalous transport by magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in the solar wind magnetosphere interaction.//J.Geophys.Res.A.1984. Vol.89, N A2. P. 801-818.
77. Miura A. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetospheric boundary. //Geophys.Res.Lett.1985. Vol.12, N 10. P. 635-638.

78. Miura A. Anomalous transport by magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instability. //Computer Simulation of Space Plasmas. /Edited by H.Matsumoto, T.Sato. -Hingham, Mass.: D.Reidel, 1985. P. 203-223.
79. Wu C.C. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause boundary. //J.Geophys.Res.A.1986. Vol.91, N A3. P. 3042-3060.
80. Pritchett P.L. Electrostatic Kelvin-Helmholtz instability produced by a localized electric field perpendicular to an external magnetic field. //Phys.Fluids. 1987. Vol. 30, N 1. P. 272-275.
81. Miura A. Kelvin-Helmholtz instability for supersonic shear flow at the magnetospheric boundary. //Geophys.Res.Lett.1990. Vol.17, N 6. P. 749-752.
82. Wei C.Q., Lee L.C., LaBelle-Hamer A.L. A simulation study of the vortex structure in the low-latitude boundary layer. //J.Geophys.Res.A.1990. Vol. 95, N A12. P. 20793-20807.
83. Miura A. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetospheric boundary: Dependence on the magnetosheath sonic Mach number. //J.Geophys.Res.A.1992. Vol.97, N A7. P. 10655-10675.
84. Rankin R., Harrold B.G., Samson J.G., Fryez P. The nonlinear evolution of field line reconnection in the Earth's magnetosphere. //J.Geophys.Res.A.1993. Vol. 98, N A4. P. 5839-5853.
85. Miura A. Dependence of the magnetopause Kelvin-Helmholtz instability on the orientation of the magnetosheath magnetic field. //Geophys.Res.Lett. 1995. Vol. 22. N 21. P. 2993-2996.
86. Miura A. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause: Computer simulations. //Physics of the Magnetopause. /Geophys.Monogr.Ser. Vol. 90 /Edited by P.Song, B.U.O. Sonnerup, M.F.Thomsen -Washington, D.C.: AGU, 1995. P. 285.
87. Manual J.R., Samson J.C. The spatial development of the low-latitude boundary layer. // J.Geophys.Res.A. 1995. Vol. 100, N A10. P. 17367-17385.
88. Farrugia C.J., Gratton F.T., Bender L., Biernat H.K., Erkaev N.V., Quinn J.M., Torbert R.B., Dennisenko V. Charts of joint Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities at the dayside magnetopause for strongly northward interplanetary magnetic field. //J.Geophys.Res.A.1998. Vol.103, N A4. P. 6703-6727.
89. Miura A. Self-organization in the two-dimensional magnetohydrodynamic transverse Kelvin-Helmholtz instability. //J.Geophys.Res.A.1999. Vol.104, N A1. P. 395-411.
90. Voronkov I., Rankin R., Samson J.C., Tikhonchuk V.T. Shear flow instability in the dipolar magnetosphere. //J.Geophys.Res.A.1999. Vol.104, N A8. P. 17323-17334.

91. Keskinen M.J., Mitchell H.G., Fedder J.A., Satyanarayana P., Zalesak S.T., Huba J.D. Nonlinear evolution of the electrostatic Kelvin-Helmholtz instability in the high-latitude ionosphere. //J.Geophys.Res.A. 1988. Vol. 93. N A1. P. 137-152.
92. Lotko W., Shen M.-M. On large-scale rotational motions and energetic of auroral shear layers. //J.Geophys.Res.A.1991. Vol. 96, N A6. P. 9549-9565.
93. Wei C.Q., Lee L.C. Coupling of magnetopause-boundary layer to the polar ionosphere. //J.Geophys.Res.A.1993. Vol. 98, N A4. P. 5707-5725.
94. Galinsky V.L., Sonnerup B.U.O. Dynamics of shear velocity layer with bent magnetic field lines. //Geophys.Res.Lett.1994. Vol. 21, N 20. P. 2247-2250.
95. Miura A. Stabilization of the Kelvin-Helmholtz instability by the transverse magnetic field in the magnetosphere-ionosphere coupling system. //Geophys.Res.Lett. 1996. Vol. 23. N 7. P. 761-764.
96. Fujimoto M., Terasawa T. Ion inertia effect on the Kelvin-Helmholtz instability. //J.Geophys.Res.A.1991. Vol.96, N A9. P. 15725-15734.
97. Huba J.D. The Kelvin-Helmholtz instability: Finite Larmor radius magneto-hydrodynamics. //Geophys.Res.Lett. 1996. Vol. 23, N 21. P. 2907-2910.
98. Huba J.D. Finite Larmor radius magneto-hydrodynamics of the Rayleigh-Taylor instability. //Phys.Plasmas. 1996. Vol. 3, N 7. P. 2523-2532.
99. Sydora R.D., Wagner J.S., Lee L.C., Wescott E.M., Tajima T. Electrostatic Kelvin-Helmholtz instability in a radially injected plasma cloud. //Phys.Fluids 1983. Vol. 26, N 10. P. 2986-2991.
100. Pritchett P.L., Coroniti F.V. The collisionless macroscopic Kelvin-Helmholtz instability.1. Transverse electrostatic mode. //J.Geophys.Res.A. 1984. Vol.89, N A1. P. 168-178.
101. Horton W., Tajima T., Kamimura T. Kelvin-Helmholtz instability and vortices in magnetized plasma. //Phys.Fluids 1987. Vol. 30, N 11. P. 3485-3495.
102. Nishikawa K.-I., Ganguli G., Lee Y.C., Palmadesso P.J. Simulation of ion-cyclotron-like modes in a magnetoplasma with transverse inhomogeneous electric field. //Phys.Fluids. 1988.Vol. 31, N 6. P. 1568-1576.
103. Theilhaber K., Birdsall C.K. Kelvin-Helmholtz vortex formation and particle transport in a cross-field plasma sheath. //Phys.Rev.Lett.1989. Vol. 62, N 7. P. 772-775.
104. Theilhaber K., Birdsall C.K. Kelvin-Helmholtz vortex formation and particle transport in a cross-field plasma sheath. I.Transient behavior //Phys.Fluids B.1989. Vol. B1, N 11. P.2244-2259.
105. Theilhaber K., Birdsall C.K. Kelvin-Helmholtz vortex formation and particle transport in a cross-field plasma sheath. II.Steady state //Phys.Fluids B.1989. Vol. B1, N 11. P.2260-2272.

106. Nishikawa K.-I., Ganguli G., Lee Y.C., Palmadesso P.J. Simulation of electrostatic turbulence due to sheared flows parallel and transverse to the magnetic field. // *J.Geophys.Res.A*.1990. **Vol.95**, NA2. P. 1029-1038.
107. Tajima T., Horton W., Morrison P.J., Schutkeker J, Kamimura T., Mima K., Abe Y. Instabilities and vortex-dynamics in shear flow of magnetized plasmas. // *Phys.Fluids B*. 1991. **Vol. B3**, N 4. P.938-954.
108. Pritchett P.L. Simulation of collisionless electrostatic velocity-shear-driven instabilities. // *Phys.Fluids B*. 1993. **Vol. B5**, N 10. P. 3770-3778.
109. Wilber M., Winglee R.M. Dawn-dusk asymmetries in the low-latitude boundary layer arising from the Kelvin-Helmholtz instability: A particle simulation. // *J.Geophys.Res. A*. 1995. **Vol. 100**, N A2. P. 1883-1898.
110. Thomas V.A., Winske D. Kinetic simulation of the Kelvin-Helmholtz instability at the Venus ionopause. // *Geophys.Res.Lett*.1991. **Vol.18**, N 11. P.1943-1946.
111. Thomas V.A., Winske D. Kinetic simulations of the Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause. // *J.Geophys.Res.A*.1993. **Vol.98**, N A7. P.11425-11438.
112. Fujimoto M., Terasawa T. On the use of spline functions for differential representations in the hybrid code simulation. // *Proceedings of the 4th ISSS/Edited by H. Matsumoto, -Kyoto, Japan: Kyoto University*, 1991.
113. Terasawa T., Fujimoto M., Karimabadi H., Omidi N. Anomalous ion mixing within a Kelvin-Helmholtz vortex in a collisionless plasma. // *Phys.Rev.Lett*. 1992. **Vol.68**, N 18. P. 2778-2781.
114. Fujimoto M., Terasawa T. Anomalous ion mixing within an MHD scale Kelvin-Helmholtz vortex. // *J.Geophys.Res.A*.1994. **Vol.96**, N A5. P. 8601-8613.
115. Fujimoto M., Terasawa T. Anomalous ion mixing within an MHD scale Kelvin-Helmholtz vortex. 2. Effects of inhomogeneity. // *J.Geophys.Res.A*.1995. **Vol.100**, N A7. P.12025-12033.
116. Thomas V.A. Three-dimensional kinetic simulations of the Kelvin-Helmholtz instability. // *J.Geophys.Res.A*.1995. **Vol.100**, N A10. P.19429-19433.
117. Thomas V.A. Kinetic simulation of the Kelvin-Helmholtz instability in finite sized jet. // *J.Geophys. Res.A*. 1995. **Vol.100**, N A7. P.12011-12016.
118. Thomas V.A. Kinetic Kelvin-Helmholtz instability at a finite sized object. // *J.Geophys. Res.A*. 1995. **Vol.100**, N A7. P.12017-12023.
119. Darwin C.G. The dynamical motions of charged particles. // *Phyl.Mag*.1920. **Vol.59**, N 6. P.537-551.
120. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics via computer simulation` . - New York: McGraw-Hill. 1985. *Имеется перевод: Бэдсел Ч., Ленгдон*

- А. Физика плазмы и численное моделирование. - М.: Энергоатомиздат, 1989. 452с.
121. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. - Новосибирск: Наука СО, 1980. 95с.
 122. Березин Ю.А., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. - Новосибирск: Наука СО, 1993. 357с.
 123. Boris J.P. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. //Proceedings, Fourth conference on Numerical Simulation of Plasmas/Edited by J.P.Boris, R.Shanny - Washington, D.C.,USA: U.S.Government Printing Office,1970. P. 3-67.
 124. Winske D. Hybrid simulation codes with application to shocks and upstream waves. //Space Sci. Rev. 1985. Vol. 42, N 1-2. P.53-66.
 125. Chodura R. A hybrid fluid-particle model of ion heating in high-Mach-number shock waves. //Nucl.Fusion.1975. Vol. 15, N 1. P. 55-61.
 126. Leroy M.M., Goodrich C.C., Winske D., Wu C.S., Papadopoulos K. Simulation of a perpendicular bow shock. //Geophys.Res.Lett.1981. Vol.8, N 12. P.1269-1272.
 127. Leroy M.M., Winske D., Goodrich C.C., Wu C.S., Papadopoulos K. The structure of perpendicular bow shocks//J.Geophys.Res. A. 1982. Vol.87, N A7. P.5081-5094.
 128. Hewett D.W. A global method of solving the electron-field equations in a zero-inertia-electron-hybrid plasma simulation code. //J.Comput. Phys. 1980. Vol.38, N 3. P.378-395.
 129. Byers J.A., Cohen B.I., Condit W.C., Hanson J.D. Hybrid simulation of quasineutral phenomena in magnetized plasma. //J.Comput.Phys.1978. Vol.27, N 3. P.363-396.
 130. Tanaka M. Simulations of heavy ion heating by electromagnetic ion cyclotron waves induced by proton temperature anisotropies. //J.Geophys.Res.A.1985. Vol.90, N A7. P.6459-6468.
 131. Omura Y., Ashour-Abdalla M., Quest K., Gendrin R. Heating of thermal helium in the equatorial magnetosphere: a simulation study. //J.Geophys.Res.A.1985. Vol.90, N A9. P.8281-8292.
 132. Harned D.S. Quasineutral hybrid simulation of macroscopic plasma phenomena. //J.Comput.Phys.1982. Vol.47, N 3. P.452-462.
 133. Morse R.L., Nielson C.W. Numerical simulation of the Weibel instability in one and two dimensions. // Phys.Fluids.1971. Vol.14, N 4. P. 830-840.
 134. Eastman T.E., Hones E.W., Bame S.J., Asbridge J.R. The magnetospheric boundary layer: Site of plasma, momentum and energy transfer from the magnetosheath into magnetosphere. //Geophys.Res.Lett. 1976. Vol.3, N11.P.685-688.

135. Axford W.I., Hines C.O. A unifying theory of high latitude geophysical phenomena and geomagnetic storms. //Can.J.Phys. 1961. Vol. 39, N 10. . P. 1433-1464.
136. Dungey J.W. Interplanetary magnetic field and the auroral zones. //Phys.Rev.Lett. 1961. Vol.6, N2. P. 47-48.
137. Lemaire J. Impulsive penetration of filamentary plasma elements into the magnetospheres of the Earth and Jupiter. //Planet. Space Sci. 1977. Vol. 25, N 9. . P. 887-890.
138. Axford W.I. Magnetospheric convection. //Rev.Geophys. 1969. Vol. 7, N1-2. P. 421-459.
139. Sckopke N., Paschmann G., Haerendel G., Sonnerup B.U.O., Bame S.J., Forbes T.G., Hones E.W., Russell C.T. Structure of the low-latitude boundary layer. //J.Geophys.Res.A.1981. Vol. 85, N A4. P. 2099-2110.
140. Thomas V.A., Brecht S.H. Angular dependence of high Mach number plasma interactions. //J.Geophys.Res.A.1987. Vol.92, N A4. P.3175-3186.
141. Lee L.C., Kan J.R. A unified model of tangential magnetopause structure. //J.Geophys.Res.A.1979. Vol.84, N A11. P.6417-6426.
142. Plesniak M.W., Menta R.B., Johnston J.P. Curved two-stream turbulent mixing layers: Three-dimensional structure and streamwise evolution. //J.Fluid.Mech. 1994. Vol. 270. P. 1-50.
143. Huba J.D., Winske D. Rayleigh-Taylor instability: Comparison of hybrid and nonideal magnetohydrodynamic simulations. //Phys. Plasmas. 1998. Vol. 5, N 6. P. 2305-2316.