

Д.С. Филиппычев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛАЗМА-СЛОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СГУЩАЮЩЕЙСЯ СЕТКИ.*

1. Введение

В ряде приложений при моделировании физических процессов, протекающих в плазме, ограниченной твёрдыми стенками, важное значение приобретает корректное описание пристеночного слоя. В случае отсутствия магнитного поля в плазме имеется два характерных масштаба (рассматривается одномерный случай): L_F – длина свободного пробега и λ_D – дебаевская длина. В газоразрядной плазме как правило выполняется соотношение $L_F \gg \lambda_D$. На расстояниях от стенки больших нескольких L_F справедливо гидро- (газо-) динамическое описание плазмы. Вблизи ограничивающей стенки ($z \approx L_F$ – кнудсеновский слой) функции распределения частиц становятся неравновесными и для адекватного описания динамики заряженных частиц необходимо использовать математические модели, учитывающие полную кинетику частиц. На расстояниях порядка дебаевской длины движение частиц становится бесстолкновительным. Во многих приложениях узкий пристеночный (слой порядка дебаевской длины) называется “ленгмюровским слоем”. Заметим, что в теории зондов такой слой называется “дебаевским слоем”.

При аналитическом исследовании поведения плазмы вблизи ограничивающей стенки с учетом полной кинетики ионов рассмотрение проводится во всем объеме (как в области плазмы, так и в узком пристеночном (ленгмюровском) слое). При этом применяется гибридная модель: для ионов используется полное кинетическое описание; а для электронов предполагается распределение Максвелла-Больцмана $n(\xi) = n_0 \exp(-\eta)$. Здесь $\xi = z/L$, $\eta = e\varphi(z)/kT_e$ – безразмерные координата и потенциал; $n_e(\xi)$, $n_i(\xi)$ – концентрации электронов и ионов; T_e – температура электронов; k – постоянная Больцмана; $n_0 = n_e(0) = n_i(0)$. Вне слоя плазма считается квазинейтральной $n(\xi) = n_e(\xi) \approx n_i(\xi)$. Интегро-дифференциальное уравнение, описы-

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 02-01-00299.

вающее поведение потенциала $\eta(\xi)$ во всей области, принято называть *уравнением плазма-слой*. Это уравнение является сингулярно возмущенным, поскольку перед старшей (второй) производной стоит малый параметр μ^2 ($\mu = \lambda_D/L$). В пределе $\mu \rightarrow 0$ интегро-дифференциальное уравнение переходит в более простое интегральное уравнение, которое описывает поведение потенциала только в основном объеме плазмы (вне ленгмюровского слоя) и носит название *плазменное уравнение*.

Интегро-дифференциальное уравнение (“уравнение плазма-слой”), описывающее распределение потенциала $\eta(\xi)$, как в слое, так и в основном объеме плазмы впервые было получено Тонксом и Ленгмюром [1]. Аналитическое решение плазменного уравнения для случая бесстолкновительной плазмы в плоской геометрии было получено Харрисом и Томпсоном [2]. Уравнение плазма-слой для источника ионов конечной температуры (функция источника $S(\xi, \eta) \sim \eta \exp(-\eta)$) было получено в работе [3]. Решая плазменное уравнение для случая максвелловского источника частиц $S(\xi, \eta) \sim \exp(-\eta)$ в работах [4,5] было показано, что выбор зависимости функции источника от η существенным образом влияет на конечный результат. Формирование предслоя и слоя вдоль силовых линий неоднородного открытого магнитного поля изучалось в [6] с использованием, как аналитического приближения, так и с помощью численных расчетов.

Для численного решения интегро-дифференциального уравнения плазма-слой в форме Emmert *et. al.* [3] в данной работе применяется метод сгущающейся сетки, обеспечивающий второй порядок аппроксимации при монотонном изменении шага сетки. Этот метод был предложен и детально разработан в работах [7,8].

2. Уравнение плазма-слой Эммерта [3]

В модели Эммерта [3] рассматривалась как область плазмы, так и область пристеночного слоя. Было выведено интегро-дифференциальное уравнение для потенциала. С целью поддержания в системе стационарного состояния функция источника ионов выбиралась с учетом требования компенсации потерь ионов на ограничивающейся стенке. Предполагалось, что ионы рождаются с тепловыми скоростями и ионизация пропорциональна плотности электронов. В модели рассматривались бесстолкновительные ионы. Использовалась одномерная геометрия с плоскими стенками и предполагалась симметрия относительно медианной плоскости ($z = 0$). Интегро-дифференциальное уравнение для “тепловых” ионов исследовалось двумя путями:

- 1) уравнение заменялось интегральным уравнением (*плазменным уравнением*), которое далее решалось аналитически;

2) уравнение численно решалось для малого (но отличного от нуля) значения дебаевской длины. Как и предполагалось, аналитическое решение хорошо согласовывалось с результатами численного расчета в области вне пристеночного слоя [3].

Интегро-дифференциальное уравнение плазма-слой с учетом "тепловых" ионов работы [3] в безразмерных переменных $[\xi = z/L; \eta = e(\varphi_w - \varphi)/kT_e, \varphi_w \equiv \varphi(+L) = \varphi(-L), \tau = T_e/T_i, Z = q/e$ (q - заряд иона), $\eta = \eta(\xi), \eta_1 = \eta(\xi_1); B_E \equiv 0.5(\tau M/m)^{1/2}, \chi \equiv Z\tau]$ выглядит следующим образом:

$$\alpha^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + e^{-\eta} - B_E \int_0^1 G(\eta - \eta') h(\xi') d\xi' = 0, \quad (1)$$

$h(\xi)$ - функция формы источника, $G(\eta - \eta')$ - ядро интеграла:

$$G(\eta - \eta') = \begin{cases} \exp[\chi(\eta - \eta')] \operatorname{erfc}(\sqrt{\chi(\eta - \eta')}), & \eta > \eta'; \\ \exp[\chi(\eta - \eta')], & \eta < \eta'. \end{cases}$$

$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x)$ - дополнительный интеграл вероятностей. При выводе уравнения (1) было использовано соотношение

$$\exp\left(\frac{e\varphi_w}{kT_e}\right) \alpha^2 = \frac{kT_e}{4\pi n_0 e^2} \frac{1}{L^2} = \frac{\lambda_D^2}{L^2} \equiv \mu^2. \quad (2)$$

Уравнение (1) дополнялось краевыми условиями: $d\eta/d\xi|_{\xi=0} = 0; \eta(1) = 0$. Заметим, что значение $\eta(0)$ определяет потенциал стенки φ_w . Для анализа проще рассматривать α как безразмерную постоянную, а затем после нахождения φ_w определить $\lambda_D/L \equiv \mu$ из соотношения (2).

При анализе плазменного уравнения ($\alpha \rightarrow 0$) удобно вместо η использовать переменную $\psi = -e\varphi/kT_e$ [3] ($\eta = e\varphi_w/kT_e + \psi$). Тогда уравнение плазма-слой принимает следующий вид:

$$\mu^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = -e^{-\psi} + b \{ J^1(\psi) - J^\xi(\psi, \xi) \} \equiv f(\psi, \xi), \quad (3)$$

$$J^1(\psi) = \int_0^1 h(\xi') e^{\chi(\psi - \psi')} d\xi', \quad J^\xi(\psi, \xi) = \int_0^\xi h(\xi') e^{\chi(\psi - \psi')} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(\psi - \psi')}) d\xi'.$$

Здесь $b = B_E \exp(e\varphi_W/kT_e) = B_E \exp(-\psi_W)$. Интегралы J^1 и J^ξ зависят от параметра μ только через искомое решение $\psi(\xi; \mu)$. В медианной плоскости ($\xi = 0$) для уравнения (3) использовалось однородное краевое условие $\psi(0) = 0$, а условие на стенке ($\xi = 1$) преобразовывалось к виду $\psi(1) = -e\varphi_W/kT_e = \psi_W$.

Плазменное уравнение (при $\mu \rightarrow 0$)

$$e^{-\psi} = b \left\{ \int_0^1 e^{\chi(\psi-\psi')} h(\xi') d\xi' - \int_0^\xi e^{\chi(\psi-\psi')} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(\psi-\psi')} h(\xi') d\xi' \right\}, \quad (4)$$

дополняется краевым условием только в начале координат $\psi(0) = 0$. После дифференцирования уравнения (4) по ξ и замены переменной интегрирования $d\xi' \rightarrow (d\xi'/d\psi') d\psi'$, Emmert *et al.* [3], получили следующее интегральное уравнение плазменного приближения

$$e^{-\psi} = B \int_0^\psi \frac{d\xi'}{d\psi'} h(\psi') \frac{d\psi'}{\sqrt{\psi-\psi'}}, \quad B \equiv b \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \frac{1}{1+\chi}.$$

В результате применения к этому уравнению интегрального преобразования Шлемильха [9], получается дифференциальное уравнение [3]:

$$\pi B h(\psi) \sqrt{\psi} \frac{d\xi}{d\psi} = 1 - 2\sqrt{\psi} D(\sqrt{\psi}). \quad (5)$$

Здесь $D(x)$ - функция Дуосона $D(x) \equiv e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

Рассматривая $h(\psi(\xi))$ как явную функцию координаты ξ уравнение (5) интегрируется и получается решение плазменного уравнения (4) для произвольной функции формы источника $h(\xi)$ в неявном виде [3]:

$$\pi B \int_0^\xi h(\xi') d\xi' = 2D(\sqrt{\psi}). \quad (6)$$

Учитывая нормировку $h(x)$ работы [3] ($\frac{1}{L} \int_0^L h(\xi) d\xi = 1$; в безразмерных

переменных $\int_0^1 h(\xi) d\xi = 1$), соотношение (6) переходит в $\pi B = 2D(\sqrt{\psi_1})$

(ψ_1 соответствует значению координаты на входе в слой $\xi = 1$). Отсюда, используя явное выражение для B , можно вычислить ψ_W :

$$\psi_w = \ln \left[\left(\frac{M Z \pi}{m} \right)^{1/2} \frac{\tau}{1 + \chi} \frac{1}{2D(\sqrt{\psi_1})} \right]. \quad (7)$$

Следует заметить, что обычно используемая простая оценка (полученная в результате использования полумаксвелловского распределения ионов для вычисления их потока в слой)

$$\psi_w^* = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M T_e}{m T_i} Z \right)^{1/2}, \quad (8)$$

дает значительно большее значение ψ_w .

3. Решение уравнения плазменного приближения.

Параметры задачи. В работе использованы основные физические параметры задачи, соответствующие параметрам работы [3]: $Z = 1$, $\tau = 1$, и, следовательно $\chi = 1$; $M/m = 1836$ (водородная плазма). Функция формы источника выбиралась в виде

$$h(\xi) = \begin{cases} 2, & 0 < \xi < 1/2 = L_S, \\ 0, & 1/2 < \xi. \end{cases} \quad (9)$$

Для нахождения значения параметра $b = B_E \exp(-\psi_w)$ перепишем плазменное уравнение (4) в виде ($\psi_1 \equiv \psi_0(1)$):

$$e^{-\psi} = b \left\{ \int_0^{\psi_1} e^{\chi(\psi - \psi')} h(\psi') \frac{d\xi'}{d\psi'} d\psi' - \int_0^{\xi} e^{\chi(\psi - \psi')} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(\psi - \psi')} h(\psi')) \frac{d\xi'}{d\psi'} d\psi' \right\}.$$

После подстановки вместо $\frac{d\xi'}{d\psi'} d\psi'$ его значения по формуле (5) получаем

$$e^{-\psi} = \frac{(1 + \chi)}{\sqrt{\pi\chi}} \left\{ \int_0^{\psi_1} e^{\chi(\psi - \psi')} \frac{(1 - 2\sqrt{\psi'} D(\sqrt{\psi'}))}{\sqrt{\psi'}} d\psi' - \int_0^{\psi} e^{\chi(\psi - \psi')} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(\psi - \psi')}) \frac{(1 - 2\sqrt{\psi'} D(\sqrt{\psi'}))}{\sqrt{\psi'}} d\psi' \right\}.$$

Полученное выражение является уравнением для нахождения ψ_1 , которое можно рассматривать как собственное значение. Поскольку последнее соотношение должно выполняться для любого ψ из диапазона $0 \div \psi_1$, то величину ψ_1 проще всего получить, выбирая $\psi = 0$. При этом получается трансцендентное уравнение

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{(1 + \chi)}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^{\psi_1} e^{-\chi\psi'} \left(\frac{1}{\sqrt{\psi'}} - 2D(\sqrt{\psi'}) \right) d\psi' = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi\chi}} e^{-\chi\psi_1} D(\sqrt{\psi_1}) + \operatorname{erf}(\sqrt{\chi\psi_1}). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (10) может быть получено только численными методами. После нахождения ψ_1 вычисляется, как параметр $B = 2D(\sqrt{\psi_1})/\pi$, так и скачок потенциала ψ_W по формуле (7).

Вычисление функции Дюсона $D(x)$ осуществляется с помощью ее представления в виде ряда по степеням x . Для получения разложения $D(x)$ в степенной ряд используется последовательное интегрирование по частям интеграла $\tilde{D}(x) \equiv e^{x^2} D(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}(x) &= \int_0^x e^{t^2} dt = x e^{x^2} - 2 \int_0^x t^2 e^{t^2} dt = e^{x^2} \left[x - \frac{2x^3}{3} \right] + \frac{2^2}{3} \int_0^x t^4 e^{t^2} dt = \dots \\
 &= e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}
 \end{aligned}$$

Ограничиваясь первыми N членами этого разложения ($n = 0, 1, \dots, N-1$), получаем приближенное выражение для функции Дюсона

$$D(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{2^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{2^{2n} n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Поскольку ряд является знакопеременным, то погрешность вычислений не превышает величины первого отброшенного члена $a_N = 2^{2N} x^{2N+1} N! / (2N+1)!$. Задавая погрешность вычисления ε и число членов ряда (10) N , можно получить ограничение сверху на x ($x < x_{\max}(N, \varepsilon)$): $(2N)^{2N+1} < 2\varepsilon(2N+1)!/N!$. Для некоторых значений ε и N величины x_{\max} представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения x_{\max}

ε	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$	$N = 25$	$N = 30$
10^{-15}	0.4218	0.8472	1.2587	1.6393	1.9892
10^{-12}	0.5861	1.0586	1.4897	1.8771	2.2277
10^{-10}	0.7298	1.2282	1.6667	2.0545	2.4024

Из данных, приведенных в таблице, следует, что для $x \approx 2.2$ точность вычислений $\varepsilon = 10^{-12}$ достигается при использовании не более 30 членов ряда.

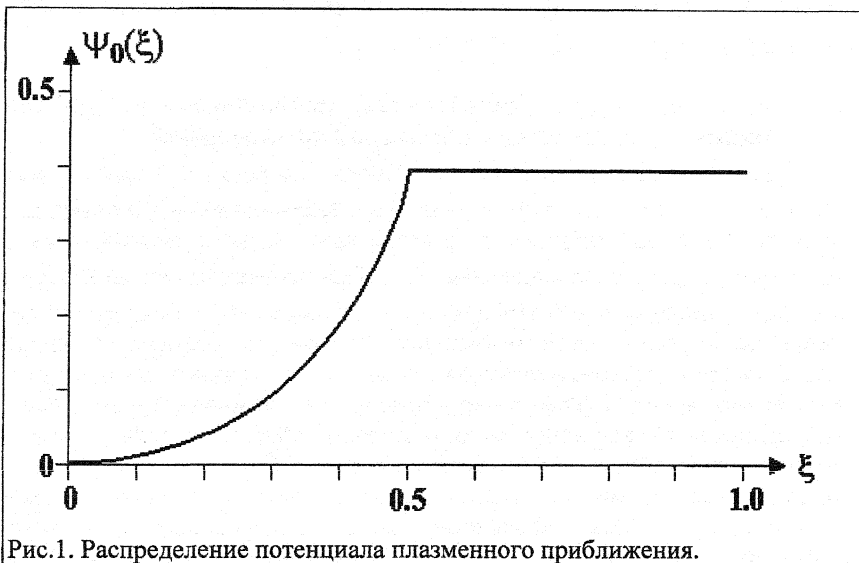


Рис.1. Распределение потенциала плазменного приближения.

Вычисление $\psi_0(\xi)$. Рассматриваемая функция формы источника (9), приводит к следующему виду решения плазменного приближения:

$$\pi B \xi = D(\sqrt{\psi_0(\xi)}), \quad 0 \leq \xi < 1/2, \quad (11)$$

$$\pi B = 2D(\sqrt{\psi_0(\xi)}), \quad \xi \geq 1/2.$$

Из этого представления видно, что при $\xi \geq 1/2$ решение равняется постоянной $\psi_0(\xi) = const = \psi_0(1) = \psi_1$. Схема последовательности вычислений для получения решения плазменного приближения представим в следующем виде:

- 1) в результате численного решения трансцендентного уравнения (10) получается значение ψ_1 ;
- 2) по значению ψ_1 определяется параметр $B = 2D(\sqrt{\psi_1})/\pi$;
- 3) для $\xi \geq 1/2$ решением является $\psi_0(\xi) = \psi_1 = const$;
- 4) решение $\psi_0(\xi)$ в области $0 < \xi < 1/2$ получается в результате численного решения уравнения (11), например, методом деления отрезка пополам.

На рис. 1 показано распределение потенциала $\psi_0(\xi)$, полученное в результате численных расчетов, проведенных по приведенной схеме. Были получены следующие значения потенциалов на правом краю расчетной области: $\psi_1 = 0.40445$; $\psi_W = 2.96539$ (по формуле (7)). Оценка по формуле (8) дает значение $\psi_W^* = 3.75767 > \psi_W$.

4. Сгущение дискретной сетки, сохраняющей второй порядок аппроксимации второй производной.

Решение интегро-дифференциального уравнения (1) $\eta(\xi)$ имеет неоднородный характер: в области квазинейтральности плазмы потенциал η изменяется незначительно, в то время как в области ленгмюровского слоя происходит резкое изменение $\eta(\xi)$. При численном решении задачи методом конечных разностей для получения адекватного поведения потенциала во всей области необходимо использовать достаточно мелкий шаг в области сильного изменения решения. Для уменьшения затрат компьютерного времени такие расчеты проводятся с использованием локально равномерной дискретной сетки в основной области расчета, а в узкой пристеночной области используется сгущение (т.е. уменьшение шага) сетки. В работе [3] использовалось "растягивающее" координаты, которое позволяло на равномерной расчетной сетке моделировать неоднородную сетку физического пространства. При этом уравнение плазма-слой (1) изменялось. В данной работе для получения корректного поведения потенциала в области пристеночного слоя для сгущения сетки применяется метод удвоения шагов [7,8], при использовании которого вторая производная аппроксимируется со вторым порядком (т.е. также как и на равномерной сетке).

Численное решение задачи проводилось на дискретной сетке по ξ . Узлы равномерной сетки по ξ ($\xi_k = (k-1)\Delta\xi$, $k = 1, 2, 3, \dots$) задавались постоянным шагом $\Delta\xi$. В приграничных областях использовались неравномерные сетки с монотонно уменьшающимся шагом. Ниже используются обозначения: $h_i^+ \equiv \xi_{i+1} - \xi_i$, $h_i^- \equiv \xi_i - \xi_{i-1}$ -шаги (неравномерной) сетки соответственно справа и слева от узла с номером i .

На равномерных (регулярных) сетках с постоянным шагом h ($h_i^+ = h_i^- = h$) оператор второй производной аппроксимируется со вторым порядком $O(h^2)$ [10]: для i -го узла сетки используется трехточечный шаблон узлов (симметричный относительно номера i) с последовательными номерами ($i-1, i, i+1$)

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \approx \Lambda_i \eta = \frac{1}{h^2} [\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}]. \quad (12)$$

На нерегулярных сетках ($h_i^- \neq h_i^+$) порядок аппроксимации снижается до первого $O(h)$:

$$\Lambda_i \eta = \frac{1}{\bar{h}_i} \left[\eta_{i+1} \frac{\bar{h}_i}{h_i^+} - 2\eta_i \frac{\bar{h}_i}{h_i^+ h_i^-} + \frac{\eta_{i-1}}{h_i^-} \right], \quad \bar{h}_i \equiv \frac{h_i^+ + h_i^-}{2}. \quad (13)$$

В дальнейшем сетками “сгущения” будем называть сетки с монотонным изменением шага. При увеличении шага будем использовать термин “разгоняющаяся” сетка, а при уменьшении шага - “сгущающаяся” сетка. На таких сетках желательно иметь аппроксимацию оператора $d^2\eta/d\xi^2$ со вторым порядком, так же как и на регулярных сетках. Аппроксимацию $O(h^2)$ можно получить с помощью несимметричного (относительно i) шаблона дискретного оператора Λ_i , в котором используются три узла с одним пропуском в номерах ($i-2, i, i+1$ для “разгона” и $i-1, i, i+2$ для “сгущения”) при условии, что шаг с одной стороны i -го узла равен сумме двух ближайших шагов с другой стороны (соответственно, $h_i^+ = h_i^- + h_{i-1}^-$ и $h_i^- = h_i^+ + h_{i+1}^+$). При этом дискретный оператор Λ_i записывается следующим образом:

“разгоняющаяся” сетка ($0 \leftarrow \xi; h_i^+ = h_i^- + h_{i-1}^-$)

$$\Lambda_i \eta = \frac{1}{(h^+)^2} (\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-2}), \quad (14)$$

“сгущающаяся” сетка ($\xi \rightarrow 1; h_i^- = h_i^+ + h_{i+1}^+$)

$$\Lambda_i \eta = \frac{1}{(h^-)^2} (\eta_{i+2} - 2\eta_i + \eta_{i-1}). \quad (15)$$

Неравномерная сетка “удвоения шагов”. Условие применения аппроксимаций (14), (15) (в дальнейшем для простоты изложения рассматривается “разгоняющаяся” сетка с $h_i^+ = h_i^- + h_{i-1}^-$) можно реализовать двумя способами. При неравенстве шагов ($h_i^- \neq h_{i-1}^-$) это условие является фактически определением рекуррентной последовательности (в частности, чисел Фибоначчи [11]: $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$, $\Phi_i = \Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}$; Φ_i - число Фибоначчи с номером i). Величина i -го шага равняется $h_i^+ = \Phi_i h_m$, а два первых шага имеют одинаковую длину ($h_1^+ = h_2^+ = h_m$). Другая возможность возникает при $h_i^- = h_{i-1}^-$. В этом случае происходит “удвоение” шага сетки $h_i^+ = 2h_i^-$. “Сгущение” сетки, основанное на использовании этих двух возможностей было подробно рассмотрено в работе [7], где было показано, что как сетки “Фибоначчи”, так и сетки “удвоения” при-

водят к одинаковым погрешностям численного решения. В дальнейшем рассматриваются только сетки “удвоения”.

Сетка “удвоения” шагов (рис. 2а) состоит из $N_D + 1$ пар ячеек одинакового размера $h_{(K)} = 2^{K-1}h_m$, $K = 1 \div N_D + 1$. Полное число шагов $N_g = 2N_D + 2$. Сетка содержит узлы с номерами от 1 до $N_g + 1$. Такую сетку будем называть простой сеткой “удвоения” шагов и обозначать через D_0 . Длина сетки “удвоения” вычисляется по формуле

$$L_D = 2 \sum_{K=1}^{N_D+1} h_{iD} = 2h_m \sum_{K=1}^{N_D+1} 2^{K-1} = 2(2^{N_D+1} - 1)h_m.$$

В узлах сетки “удвоения” с четными номерами выполняется равенство $h_i^- = h_i^+ = h_i$ и $\Lambda_i \eta$ определяется по формуле на равномерной сетке (12). Для сетки с нарастанием шагов в узлах с нечетными номерами ($i = 2K - 1$, $K = 2, 3, \dots, N_D + 1$) $h_i^- = h_{i-1}^- = h_{(K-1)} = 0.5h_K = 0.5h_i^+$ (т.е. $h_i^- + h_{i-1}^- = h_i^+$) и $d^2\eta/d\xi^2$ аппроксимируется с $O(h^2)$ по формуле (14).

В работах [7,8] было показано, что при $N_D > 1$ длина простой сетки удвоения (D_0) оказывается немного меньше четырех максимальных шагов сетки $h_{Max} = 2^{N_D}h_m$, а именно $L_D = 4h_{max} - 2h_m$. Если поместить сетку “сгущения” в четырех шагах регулярной сетки h_{reg} , то в этом случае h_{max} будет немного больше h_{reg} . Вследствие этого, в узле, соответствующем граничной точке между регулярной сеткой и сеткой “сгущения”, шаги сетки справа и слева будут различными $h_{ib}^+ > h_{ib}^-$. В этой точке с не-

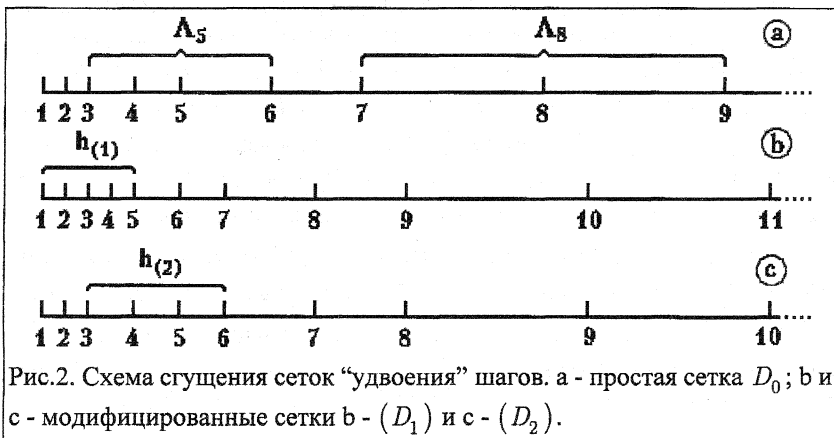


Рис.2. Схема сгущения сеток “удвоения” шагов. а - простая сетка D_0 ; б и с - модифицированные сетки б - (D_1) и с - (D_2).

обходимостью используется аппроксимация $d^2\eta/d\xi^2$ на неравномерной сетке (13) с первым порядком $O(h)$. Как показали тестовые расчеты [7,8], снижение порядка аппроксимации до $O(h)$ в одной точке практически не приводит к уменьшению точности решения.

Сетку “сгущения”, аппроксимирующую $d^2\eta/d\xi^2$ со вторым порядком $O(h^2)$ во всех точках (включая и граничную “ ib ”), можно построить, добавляя к простой сетке несколько шагов, суммарная длина которых равняется $2h_m$. Здесь можно поступить одним из двух способов:

- 1) добавить два шага минимальной длины h_m (сетка D_1 , рис.2б);
- 2) добавить только один шаг длиной $2h_m$ (сетка D_2 , рис.2с).

В обоих случаях $L_D = 4h_{reg}$, два шага максимальной длины $h_{max} = h_{reg}$ относятся к регулярной части сетки, а все сгущение осуществляется на оставшихся двух шага длины $2h_{reg}$. В данной работе для расчетов используется первый вариант сетки (т.е. сетка D_1).

5. Схема численного решения интегро-дифференциального уравнения плазма-слой.

Разностная схема краевой задачи (уравнение (1) с краевыми условиями $d\eta/d\xi|_{\xi=0} = 0$ и $\eta(1) = 0$) записывается в следующем виде:

$$\eta_{i-} - 2\eta_i + \eta_{i+} = F(\eta_i; J^1(\eta), J^\xi(\eta)), \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_R, \quad \eta_2 = \eta_1, \quad \eta_{N_R} = 0.$$

$$F(\eta_i; J^1(\eta), J^\xi(\eta)) = \left(\tilde{h}_i/\alpha\right)^2 f(\eta_i; J^1(\eta), J^\xi(\eta)), \quad (17)$$

$$f(\eta_i; J^1(\eta), J^\xi(\eta)) = -e^{-\eta} + B_E e^{\chi\eta} \{ J^1(\eta) - J^\xi(\eta) \}.$$

$$J^1(\eta) = \int_0^1 h(\xi') e^{-\chi\eta'} d\xi', \quad J^\xi(\eta) = \int_0^\xi h(\xi') e^{-\chi\eta'} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(\eta - \eta')}) d\xi'. \quad (18)$$

Для равномерной сетки (вторая производная аппроксимируется по формуле (12)) $\tilde{h}_i = h$, $i- = i - 1$, $i+ = i + 1$. Для “разгоняющейся” сетки (14) $\tilde{h}_i = h_i^+$, $i- = i - 2$, $i+ = i + 1$, а для “сгущающейся” сетки (15) $\tilde{h}_i = h_i^-$, $i- = i - 1$, $i+ = i + 2$. Соотношение (2) переписывается в следующем виде:

$$\alpha^2 = \mu^2 e^{-\eta}. \quad (19)$$

Вычисление интегралов (18) проводилось с использованием суммирования их аппроксимации на каждом шаге неравномерной сетки по формуле трапеций. Заметим, что $J^{\xi_2}(\eta) = 0$ за счет аппроксимации краевого условия $\eta_2 = \eta_1$.

Интегро-дифференциальное уравнение плазма-слой (1) является, во-первых, сингулярно-возмущенным, а во-вторых, нелинейным. Это вносит определенные трудности при численном решении задачи.

Сетка, состоящая из областей с последовательным уменьшением шага. Наличие малого параметра α^2 в уравнении (1) приводит к появлению пограничного слоя вблизи правой границы области $\xi = 1$, в котором решение претерпевает существенные изменения. При использовании рассмотренных выше сеток сгущения удвоения шагов все “сгущение сетки” происходит максимально на двух “равномерных” шагах, что совершенно недостаточно для адекватного “отслеживания” сильного изменения решения. В связи с этим, область расчета разбивалась на ряд областей с постоянным шагом, в которых последовательно как шаг сетки, так и размер соответствующей области уменьшались в два раза по мере приближения к правому краю. Использование трех делений шага ($N_{div} = 3$), начиная с точки $\xi = \xi_{div} = 0.6$, приводит к следующей структуре сетки: $\xi = 0 \div 0.6$ - заданный “регулярный шаг” $h = h_{reg}$; $\xi = 0.6 \div 0.8 - h = h_{reg}/2$; $\xi = 0.8 \div 0.9 - h = h_{reg}/4$; $\xi = 0.9 \div 0.95 - h = h_{reg}/8$; в оставшейся области $\xi = 0.95 \div 1.0$ использовался шаг предыдущей области $h = h_{reg}/8$. Такая схема, в какой то мере является аналогом нелинейного преобразования координат работы [3] ($s = 1 - (1 - t)^\lambda$) с показателем $\lambda = 2$. В точках деления шага пополам для аппроксимации второй производной применялась формула неравномерных шагов (15). Приведенная сетка с уменьшением шага в последовательных областях дополнялась сетками сгущения удвоения шагов на левом ($\xi = 0$; для лучшей аппроксимации краевого условия в виде $\eta_2 = \eta_1$) и на правом ($\xi = 1$) краях области расчета. Как показали расчеты, в последнем случае ($\xi = 1$) применение сетки сгущения удвоения шагов носит практически символический характер.

Итерационная схема решения задачи. Наличие малого параметра при старшей производной приводит также к тому, что для численного решения рассматриваемой краевой задачи нельзя применять метод прогонки (в данном случае пятиточечной прогонки (см., например, [12]) из-за использования для аппроксимации второй производной в точках неравномерной сетки четырехточечного шаблона), поскольку нарушается условие ее устойчивости.

Для решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1) в любом случае необходимо применять какой-нибудь итерационный метод. В настоящей работе численное решение задачи проводилось с использованием метода простой итерации. Итерационный процесс состоял из двух уровней итераций - внутренних и внешних, для обозначения которых в дальнейшем изложении используются верхние индексы соответственно (r) и (s) . Приближенное решение задачи $\eta(\xi)$, полученное в результате окончания внутренних итераций на (s) -ой внешней итерации обозначается, как $\eta_i^{(s)}$. По этим значениям вычисляются значения интегралов $J^{1, (s)} \equiv J^1(\eta^{(s)})$ и $J_i^{\xi, (s)} \equiv J_i^{\xi}(\eta^{(s)})$ для формирования правой части (17) дискретного уравнения (16). С полученным новым набором интегралов осуществляется внутренний итерационный процесс на $(s+1)$ -ой внешней итерации. Поскольку значения интегралов относительно слабо зависят от решения $\eta(\xi)$ (по крайней мере, значительно меньше самого решения), то указанный двухуровневый итерационный процесс можно рассматривать как разновидность метода замороженных коэффициентов. Значение $\eta_1^{(s)}$, определяющее изменение потенциала во всей области (т.е. потенциал стенки: при $\eta^*(0) = 0$, $\eta_W^* = \eta^*(1) = -\eta_1$), используется для вычисления α^2 по формуле (19).

Для организации внутреннего итерационного процесса имеется несколько возможностей. Прежде всего, внутренние итерации могут быть глобальными или локальными. В глобальной итерации правая часть уравнения (16) $F(\eta_i^{(s)}; J^{1, (s)}, J_i^{\xi, (s)})$ вычисляется по решению, полученному в конце s -ой внешней итерации, и остается фиксированной во время внутреннего итерационного процесса. Вычисления проводятся по схеме бегущего счета, начиная либо с правого, либо с левого граничных узлов сетки.

Глобальная итерация справа налево $\{R \rightarrow L; G\}$:

$$\begin{aligned} \eta_{N_R}^{(r+1)} &= 0; \quad \eta_{i-}^{(r)} - 2\eta_i^{(r+1)} + \eta_{i+}^{(r+1)} = F(\eta_i^{(s)}; \\ J^{1, (s)}, J_i^{\xi, (s)}), \quad i &= N_R - 1, \dots, 2; \quad \eta_1^{(r+1)} = \eta_2^{(r+1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь с предыдущей итерации используется только значение $\eta_{i-}^{(r)}$, а значения на $(r+1)$ -ой итерации вычисляются, последовательно начиная с $i = N_R - 1$.

Глобальная итерация слева направо $\{L \rightarrow R; G\}$:

$$\eta_2^{(r+1)} = -F(\eta_2^{(s)}; J^1, (s), J_2^\xi, (s)), \eta_1^{(r+1)} = \eta_2^{(r+1)};$$

$$\eta_{i-}^{(r+1)} - 2\eta_i^{(r+1)} + \eta_{i+}^{(r)} = F(\eta_i^{(s)}; J^1, (s), J_i^\xi, (s)), i = 3, 4, \dots, N_R - 1; \quad (21)$$

$$\eta_{N_R}^{(r+1)} = 0.$$

Первая формула для вычисления значения $\eta_2^{(r+1)}$ получается в результате записи третьего дискретного уравнения (21) в узле с номером $i = 2$ и использования аппроксимации краевого условия при ξ_0 ($\eta_2 = \eta_1$).

Локальные итерации ($\{R \rightarrow L; L\}$ или $\{L \rightarrow R; L\}$) проводятся в каждой точке дискретной сетки с использованием соотношений либо (20), либо (21). В начале локального итерационного процесса вычисляются только интегралы $J^1, (s)$ и $J_i^\xi, (s)$, а правые части дискретного уравнения формируются с использованием значений предыдущей итерации $F(\eta_i^{(r)}; J^1, (s), J_i^\xi, (s))$.

6. Задание начального приближения.

Как известно, для сходимости итерационного процесса необходимо иметь хорошее начальное приближения. Решение уравнения (1) $\eta(\xi)$ с крайвыми условиями $d\eta/d\xi|_{\xi=0} = 0$, $\eta(1) = 0$ можно получить из решения краевой задачи (уравнение (3); $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = \psi_W$) сдвигом на ψ_W : $\eta(\xi) = \psi(\xi) - \psi_W$.

В настоящей работе начальное приближение для “запуска” итерационного процесса задавалось в виде модифицированного решения плазменного приближения $\psi^0(\xi)$ (11): $\eta^0(\xi) = \psi^0(\xi) - \psi_W^*$. Такая конструкция обеспечивает выполнение краевого условия $\eta^{(0)}(1) = 0$. В случае использования чисто плазменного приближения $\psi_W^* = \psi^0(1)$, а при использовании оценки (7) $\psi_W^* = \psi_W$. В последнем случае на правой границе возникает разрыв решения, для сглаживания которого в работе применяется параболическая аппроксимация. Сначала задается начальная координата параболической аппроксимации ξ_A . После этого вычисляются значения “начального” потенциала $\eta_A = \eta^{(0)}(\xi_A)$ и коэффициента $A = -\eta_A / (1 - \xi_A)^2$. Наконец, в интервале $\xi_A \leq \xi \leq 1$ значения потенциала $\eta(\xi)$ в узлах сетки задаются по формуле $\eta^{(0)}(\xi_i) = \eta_A + A(\xi_i - \xi_A)^2$.

7. Результаты численного решения задачи.

Изложенный выше численный алгоритм был применен для решения полной задачи плазма слой (1). Результаты расчетов для двух значений параметра $\mu = \lambda_D/L = 10^{-1}$ и $\mu = 10^{-2}$ представлены в таблицах 2 и 3, а также на рис. 3. Координата начала параболического приближения задавалась величиной $\xi_A = 0.9$. Внутренние итерации заканчивались при установлении шестого знака дробной части: $\max_i (\eta_i^{(r+1)} - \eta_i^{(r)}) \leq 10^{-6}$. Условием окончания внешних итераций является выполнение неравенства $\max \{ J^{1, (s+1)} - J^{1, (s)}, \max_i (J_i^{\xi, (s+1)} - J_i^{\xi, (s)}) \leq 2.0 \times 10^{-5} \}$.

В дальнейшем для сеток сгущения удвоения шагов введены обозначения: "CG0 : n" для сетки в начале координат $\xi = 0$ и "CG1 : n" для сетки на правом краю области $\xi = 1$; n обозначает число "удвоения" шагов. N_R - общее число узлов дискретной сетки. В столбцах " N_{ex} " табл. 2 представлено число внешних итераций, а в строке " N_{in} " - число внутренних итераций на первой внешней итерации. На последующих внешних итерациях число внутренних итераций быстро уменьшается. Последние две внешние итерации ($N_{ex} - 1$ -ая и N_{ex} -ая) содержат только по одной внутренней итерации.

Таблица 2 Скачок потенциала η_W

		$\mu = 10^{-1}$			$N_{reg} = 200$			CG1 : 1		
$N_{div} = 3$		$N_{div} = 1$		$N_{div} = 3$			$N_{div} = 5$			
CG0	N_R	η_W	N_{ex}	N_R	η_W	N_{ex}	N_R	η_W	N_{ex}	
0	282	2.922866	22	442	2.923089	22	602	2.923225	22	
1	283	2.923061	22	443	2.923284	22	603	2.923420	22	
2	286	2.923261	20	446	2.923479	20	606	2.923615	20	
3	288	2.923473	19	448	2.923692	19	608	2.923829	19	
4	290	2.923855	19	450	2.924077	19	610	2.924216	19	
5	292	2.924605	19	452	2.924845	19	612	2.924993	19	
6	294	2.926129	18	454	2.926384	22	614	2.926425	22	
N_{in}		5254			26414			54100		

Таблица 2 показывает значения скачка потенциала $\eta_W = -\eta_1 = -\eta(0)$ в зависимости от числа удвоения шагов сетки сгущения при $\xi = 0$ (CG0) при фиксированном значении задаваемых шагов "регулярной" сетки ($N_{reg} = 200$). На правом краю области использовалась сетка сгущения однократного удвоения (CG1 : 1). Результаты представлены для трех значений числа точек деления шага $N_{div} = 1$, $N_{div} = 3$ и $N_{div} = 5$.

Как видно из табл. 2 ($\mu = 10^{-1}$), при увеличении числа удвоений шагов сетки сгущения при $\xi = 0$ значения η_W изменяются слабо (в четвертом знаке). В работе [3] для $\mu = 10^{-1}$ было получено значение $\eta_W(\mu = 10^{-1}; [3]) = 2.926$. Во всех трех рассмотренных случаях ($N_{div} = 1, 3, 5$) такое значение падения потенциала было получено только в расчетах с применением шестикратного уменьшения шага сгущающейся сетки в начале координат ($CG0 : 6$).

Для двух структур сетки с различным числом точек деления шага ($N_{div} = 3$ и $N_{div} = 5$) были проведены серии расчетов, в которых изменялось число удвоения шагов сетки сгущения при $\xi = 1$ ($CG1 : n; n = 0, 1, \dots, 6; CG0 : 6$). Во всех случаях было получено значение падения потенциала $\eta_W = 2.926377$, а результаты изменялись только в 10-ом знаке, т.е. ниже точности сходимости решения на внутренних итерациях (10^{-6} ; 7-ой знак). Аналогичные результаты были получены и в случае $\mu = 10^{-2}$. Из результатов этих расчетов следует, что применение сетки сгущения на правом краю области ($\xi = 1$) не имеет практического значения. Этот вывод связан, по-видимому, с тем обстоятельством, что при использовании нескольких областей последовательного уменьшения шага сетки вблизи $\xi = 1$ шаг оказывается уже достаточно малым.

На сетках с более грубым "исходным" шагом ($N_{reg} = 100; N_{div} = 0, 3, 5, 7; CG0 : n = 0, 1, \dots, 6; CG1 : n = 1, 6$) максимальное значение падения потенциала равнялось $\eta_W = 2.925053$. Таким образом, для аккуратного решения задачи необходимо было использовать достаточно мелкий "исходный" шаг сетки ($N_{reg} \geq 200$).

Приведенные выше результаты расчетов были получены с использованием для внутреннего итерационного процесса глобальной итерации справа налево $\{R \rightarrow L; G\}$ (20). В вычислениях с применением другой организации внутреннего итерационного процесса ($\{L \rightarrow R; G\}$ (21), $\{R \rightarrow L; L\}$, $\{L \rightarrow R; L\}$) были получены те же самые результаты: отличия наблюдались только в дальних знаках и незначительно отличались числа внешних (N_{ex}) и внутренних итераций на первой внешней итерации (N_m). Самым существенным фактом является то, что если процесс расходился в случае использования $\{R \rightarrow L; G\}$, то этот процесс расходился также и при любой другой организации внутренних итераций. В точности такой же вывод вытекает и из аналогичных расчетов в случае $\mu = 10^{-2}$.

Таблица 3.

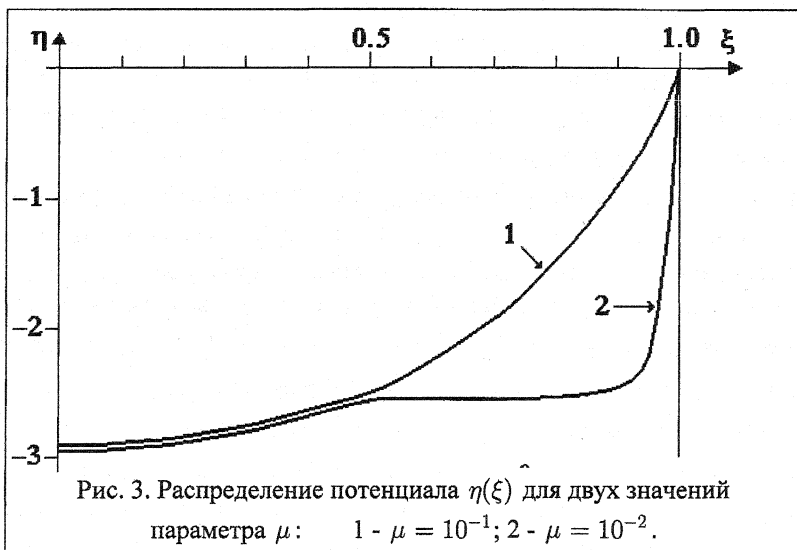
		$\mu = 10^{-1}$		$\mu = 10^{-2}$		
равномерная сетка $CG0 : 0, CG1 : 0$						
N_{reg}	η_W	N_{in}	N_{ex}	η_W	N_{in}	N_{ex}
50	2.923950	136	24	\Rightarrow		
100	2.922707	487	25	2.966865	84	64
200	2.922710	1643	22	2.966141	68	50
400	2.923745	5290	23	2.965896	186	68
800	2.927211	16122	24	2.965818	641	68
равномерная сетка + $CG0 : 6$ и $CG1 : 1$						
N_{reg}	η_W	N_{in}	N_{ex}	η_W	N_{in}	N_{ex}
50	2.925944	2152	27	\Rightarrow		
100	2.924782	3170	26	2.966863	123	63
200	2.925941	3969	18	2.966120	50	68
400	2.929448	5250	23	2.965891	186	68
800	2.932577	16122	24	2.965823	641	68

В таблице 3 представлены результаты расчетов рассматриваемой задачи на равномерных сетках с различным числом шагов N_{reg} (полное число узлов $N_R = N_{reg} + 1$) и на равномерных сетках со сгущением шага только в граничных областях ($CG0 : 6, CG1 : 1; N_R = N_{reg} + 14$). Для случая $\mu = 10^{-2}$ символ " \Rightarrow " обозначает расходимость итерационного процесса на грубой сетке ($N_{reg} = 50, h = 0.02$). По мере увеличения числа шагов сетки наблюдается значительное нарастание числа внутренних итераций на первой внешней итерации (N_{in}) и небольшие вариации числа внешних итераций (N_{ex}). При этом, для $\mu = 10^{-2}$ N_{in} существенно меньше, а N_{ex} больше примерно в 1.5 раза, чем для $\mu = 10^{-1}$. Величина падения потенциала η_W изменяется незначительно: для $\mu = 10^{-1}$ в четвертом, а для $\mu = 10^{-2}$ в пятом знаках. При большей дебаевской длине ($\mu = 10^{-1}$) η_W монотонно возрастает, начиная с $N_{reg} = 100$. Результат, соответствующий относительно грубой сетке $N_{reg} = 50$ ($CG0 : 6, CG1 : 1$), совпадает с результатом, полученным на сетке с $N_{reg} = 200$, вплоть до шестого знака. Следует отметить, что в работе [3] были получены значения: $\eta_W(\mu = 10^{-1}; [3]) = 2.926$; $\eta_W(\mu = 10^{-2}; [3]) = 2.966$.

В расчетах с $\mu = 10^{-2}$ был получен результат, совпадающий с результатом работы [3], $\eta_W = 2.966$, за исключением расчета на сетке с

$N_{reg} = 100$, в котором отличие наблюдалось в 4-ом знаке ($\eta_W = 2.967$). “Инвариантность” падения потенциала, полученного на сетках с различным числом шагов, связана с “удачным” выбором начального приближения (см., рис. 3). На сетках, для которых приведены результаты в табл. 2 в случае

$\mu = 10^{-1}$ ($N_{reg} = 100$; $N_{div} = 1, 3, 5$; $\xi_{div} = 0.6$; $\xi_A = 0.9$; $CG0: n = 0, 1, \dots, 6$; $CG1: n = 1$), были проведены расчеты с $\mu = 10^{-2}$. Результаты этой серии расчетов показали такую же “инвариантность” решения: во всех случаях было получено усеченное значение $\eta_W = 2.9661$, а изменения наблюдались только в дальних знаках. При увеличении числа удвоений шагов в сетке сгущения вблизи $\xi = 0$ от $n = 0$ до $n = 6$ величина 6-го и 7-го знаков {...ab} нарастала от {...41} до {...75} ($N_{div} = 1$); {...74} ($N_{div} = 3$); {...66} ($N_{div} = 5$).



На рис.3 показаны пространственные распределения потенциала $\eta(\xi)$, полученные в результате численного решения задачи ($N_{reg} = 200$; $N_{div} = 5$; $\xi_{div} = 0.6$; $\xi_A = 0.9$; $CG0: 6$; $CG1: 1$). В случае $\mu = 10^{-2}$ профиль $\eta(\xi)$ в большей части области практически совпадает со смещенной ступенькой “плазменного решения” $\psi(\xi)$ (11). Смещение составляет величину падения потенциала $\eta_W \cong 2.9661$, которое близко к оценке

(7) $\psi_W = 2.96539$. Отличие решения полной задачи от решения уравнения “плазменного приближения” наблюдались только в приграничном слое вблизи $\xi = 1$, начиная примерно с $\xi = 0.9$. Напомним, что в расчетах использовалась именно это значение координаты начала параболической аппроксимации начального приближения, что и обусловило “инвариантность” решения относительно структуры сетки. Совершенно другой характер имеет решение в случае $\mu = 10^{-1}$: профиль потенциала становится гладким, т.е. происходит “сглаживание” ступенчатого начального приближения; отличие решения от “плазменного приближения” становится существенным, начиная с конечной точки источника L_S .

8. Заключение.

Приведенные в данной работе результаты расчетов, показали, что предложенный выше численный алгоритм решения интегродифференциального уравнения плазма-слой с применением последовательных областей уменьшения вдвое шага сетки и сеток сгущения на краях области расчета, является достаточно эффективным. Если при хорошем выборе начального приближения ($\mu = 10^{-2}$) для получения “инвариантного” падения потенциала достаточно выбрать достаточно мелкий шаг равномерной сетки ($N_{reg} \geq 200$), то при большей дебаевской длине ($\mu = 10^{-1}$) аккуратный результат получается только при шестикратном удвоении шага сетки сгущения вблизи $\xi = 0$.

Литература

1. Tonks L., Langmuir I. A general theory of the plasma of an arc. //Phys.Rev.1929. Vol. 34, N 6. P. 876-922.
2. Harrison E.R., Thompson W.B. The low pressure plane symmetric discharge. //Proc.Phys.Soc.London 1959. Vol. 74, Pt.2, N 476. P. 145-152.
3. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma. //Phys.Fluids.1980. Vol. 23, N 4. P. 803-812.
4. Bissell R.C., Johnson P.C. The solution of the plasma equations in a plane parallel geometry with a Maxwellian source. //Phys.Fluids. 1987. Vol. 30, N 3. P. 779-786.
5. Bissell R.C., Johnson P.C., Stangeby P.C. A review of models for collisionless one-dimensional plasma flow to a boundary. //Phys.Fluids. B 1989. Vol. B 1, N 5. P. 1133-1140.

6. Sato K., Miyawaki F., Fukui W. Sheath and presheath in a collisionless open-field plasma. // *Phys.Fluids*. В 1989. Vol. В 1, N 4. P. 725-733.
7. Филиппычев Д.С. Аппроксимация второго порядка радиальной части оператора Лапласа на сгущающихся сетках. // *Прикладная математика и информатика* N 11, Сб. // *Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева* - М.: *МАКС-Пресс*. 2002. С. 75-99.
8. Филиппычев Д.С. Численное моделирование усилителя на релятивистском электронном пучке в цилиндрическом волноводе с плазменно-диэлектрическим заполнением с применением сгущающихся сеток. // *Прикладная математика и информатика* N 12, Сб. // *Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева* - М.: *МАКС-Пресс*. 2002. С. 50-70.
9. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. - Cambridge: *Univ.Press*, 1927, 4-th ed. (1962, 4-th ed. reprint). *Имеется перевод: Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа.* - М.: *Физматгиз*, 1963. Т. 2.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: *Наука*, 1977. 656 с.
11. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: *Наука*, 1978. 144 с.
12. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: *Наука*, 1978. 592 с.