

Д.С. Филиппычев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСИЛИТЕЛЯ НА РЕЛЯТИВИСТСКОМ ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ПЛАЗМЕННО- ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ СГУЩАЮЩИХСЯ СЕТОК*

1. Введение

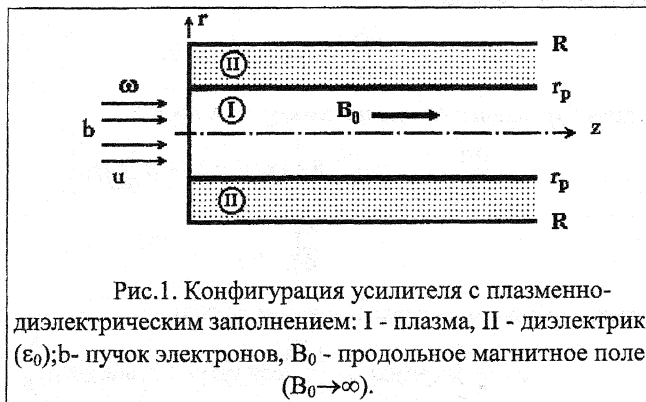
В ряде теоретических и экспериментальных работ было показано, что диэлектрические волноводы с релятивистскими электронными пучками являются весьма перспективными устройствами для получения мощного электромагнитного излучения. Конструктивно в диэлектрическом усилителе наряду со слоем твердого диэлектрика существует также и вакуумный канал, по которому пропускается электронный пучок. Поскольку в вакуумном канале поперечная структура поля замедленной диэлектриком вакуумной моды является поверхностной, то связь пучка с данной модой оказывается относительно слабой. Для увеличения этой связи вакуумный канал можно заполнить плазмой. При этом эффективность использования пучка электронов может оказаться значительно выше, поскольку в плазме поля могут быть не только поверхностными, но и объемными.

Математическую модель описания процессов, протекающих в усилителе с диэлектрико-плазменным заполнением можно разбить на две части: нахождение электрического поля (полевая часть) и вычисление траекторий частиц (электронов пучка). В двух областях (плазмы и диэлектрика) полевая часть задачи описывается уравнениями типа Шредингера, которые содержат поперечную (радиальную) часть оператора Лапласа, имеющего особенность на оси системы (в цилиндрической системе координат). Уравнение типа Шредингера описывает изменение комплексной переменной. Поэтому оно фактически является уравнением относительно двухкомпонентного вектора, компонентами которого являются действительная и мнимая части искомого решения. Диэлектрические свойства двух областей (плазмы и диэлектрика) оказываются различными. При этом на границе раздела (плазма-диэлектрик) необходимо задавать условия сопряжения, которые в общем случае содержат разрывы 1-го и 2-го рода.

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 96-01-01171а.

Решение рассматриваемой системы нелинейных уравнений можно получить только численными методами. В численном моделировании для корректного разрешения особенностей в их окрестности должна использоваться достаточно подробная сетка (т.е. достаточно мелкий шаг). Переход от более крупного шага в регулярной области к мелкому шагу вблизи особенности осуществляется сгущением сетки. В общем случае оператор Лапласа аппроксимируется на неравномерных сетках с первым порядком $O(h)$. Для случая с монотонным увеличением или уменьшением шагов в работе предлагается конструкция “сгущающейся” части сетки (сетка “удвоения” шагов), для которой порядок аппроксимации радиальной (поперечной) части оператора Лапласа оказывается $O(h^2)$ как и на равномерных сетках. Второй порядок аппроксимации достигается за счет использования несимметричного шаблона с пропуском одного узла. При этом, последовательность увеличивающихся (уменьшающихся) шагов строится специальным образом. В результате часть разностных уравнений дискретной модели содержит значения искомых величин в четырех точках, что не позволяет использовать трехточечную прогонку. Поэтому в работе для численного решения полевой части задачи применяется пятиточечная матричная прогонка для двухкомпонентных векторов с использованием матриц 2×2 .

2. Постановка задачи.



На Рис.1 показана схема рассматриваемой системы. В цилиндрическом металлическом волноводе радиуса R находится столб плазмы радиуса r_p (об-

ласть I). В этой области распространяется электронный пучок с плотностью ρ и входной скоростью u . Вдоль оси волновода (ось z) наложено сильное внешнее магнитное поле B_0 , полностью замагничивающее электроны пучка и плазмы. Кольцевая область толщиной $R - r_p$ (область II) заполнена средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Система нелинейных уравнений, описывающих усиление колебаний частоты ω , подаваемых на вход ($z=0$) усилителя с плазменно - диэлектрическим заполнением, была получена в работе [1]:

уравнения поля

$$\sigma \frac{\partial \Phi_I}{\partial \xi} + i(1 - b_1 \Delta) \Phi_I = -\frac{\alpha_b}{x^2 - \alpha_p} \sigma \rho, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \xi} + i(\eta_0 - b_{II} \Delta) \Phi_{II} = 0, \quad (2)$$

с условиями сопряжения на границе сред ($r=r_p$)

$$\left(1 - i\sigma \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \Phi_I \Big|_{r=r_p} = \left(\eta_0 - i\sigma \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \Phi_{II} \Big|_{r=r_p}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \Big|_{r=r_p} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_p}, \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$r \frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \Phi_{II} \Big|_{r=1} = 0; \quad (5)$$

в области I уравнения движения электронов пучка

$$\frac{d\eta}{d\xi} = (1 - \sigma\eta)^{3/2} \operatorname{Re} \left[\exp(-i\eta) \left(1 - i\sigma \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \Phi_I \right], \quad (6)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \eta; \quad (7)$$

и выражение для плотности объемного заряда

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iy) dy_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos(y) dy_0 + i \int_0^{2\pi} \sin(y) dy_0 \right). \quad (8)$$

Для записи системы (1)-(8) были использованы безразмерные переменные (r^* - размерная радиальная координата):

$\xi = \omega z / u$, $r = r^* / R$, $\eta = (u - v_z) / u < 1$, $y = \omega(t - z / u)$, $\Phi_{I,II} = \frac{e}{m} \frac{\omega}{u^3 \gamma^5} A_{I,II}$ и параметры $\alpha_p = \frac{\omega_p^2 R^2}{u^2 \gamma^2}$, $\alpha_b = \frac{\omega_b^2 R^2}{2u^2 \gamma^5}$, $b_I = 1 / (x^2 - \alpha_p)$, $b_{II} = 1 / x^2$, $x = \omega R / u \gamma$, $\eta_0 = \gamma^2 / \gamma_0^2$, $\sigma = 2\gamma^2$, а также введены обозначения $r_p = r^* / R$, $\gamma^2 = (1 - u^2 / c^2)^{-1}$, $\gamma_0^2 = (1 - u^2 / c_0^2)^{-1}$, $c_0 = c / \epsilon_0^{1/2}$.

$\Delta = \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$ - радиальная часть оператора Лапласа; $\text{Re}[\Theta]$ реальная часть комплексного выражения Θ . e , m - заряд и масса электрона, c - скорость света. Нижние индексы "p" и "b" обозначают величины, относящиеся к плазме и к пучку электронов (например, ω_p и ω_b частота пламенных (ленгмюровских) колебаний плазмы и пучка; r_p - граница плазмы). u - скорость невозмущенного пучка; v_z - скорость частицы (электрона пучка). При выводе системы (1)-(8) были использованы поляризационные потенциалы ψ_I и ψ_{II} . Продольные электрические поля в плазме (E_{zI}) и в диэлектрике (E_{zII}) вычисляются по формулам: $E_{zI} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_I$, $E_{zII} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_{II}$, а сами потенциалы представляются в виде: $\psi_{I,II}(z, t, r) = (A_{I,II}(z, r) \exp(-i\omega t + i\omega z / u) + \text{к.с.}) / 2$. Параметр α_b можно выразить через ток пучка J_b и предельный вакуумный ток J_0 системы без диэлектрика [2]: $\alpha_b = 2 \frac{J_b}{J_0} \frac{R^2}{r_p^2 \gamma^2} \left(\frac{\gamma^{2/3} - 1}{\gamma^2 - 1} \right)^{3/2} \frac{1}{1 + 2 \ln(R / r_p)}$. Система уравнений (1)-(8) является двумерной ($\varphi = \varphi(\xi, r)$) и описывает динамику волноводного поля с нефиксированной структурой.

3. Преобразование уравнений поля к матричной форме.

Уравнения (1) и (2) для комплексных амплитуд $\varphi = \varphi_r + i\varphi_{Im}$ в двух областях (плазмы и диэлектрика) являются уравнениями типа Шредингера. Для нахождения численного решения этих уравнений удобно перейти к уравнениям для действительных величин φ_r и φ_{Im} . и записать (1) и (2) в матричном виде

$$\Omega \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi} + I(\eta_\alpha - b_\alpha \Delta) \varphi_\alpha = -V_\alpha \Omega \rho, \quad (9)$$

где $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_r \\ \varphi_{Im} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Omega = \sigma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\eta_\alpha = \{1, \eta_0\}$, $b_\alpha = \{b_I, b_{II}\}$, $V_\alpha = \{\alpha_b / (x^2 - \alpha_p), 0\}$.

Индекс α принимает два значения: I - область плазмы; II - область диэлектрика. Условие сопряжения (3) на границе плазма-диэлектрик ($r = r_p$) при-

нимает следующий вид: $\left(1 - \Omega \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \varphi_I \Big|_{\eta=r_p} = \left(\eta_0 - \Omega \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \varphi_{II} \Big|_{\eta=r_p}$.

4. Аппроксимация радиальной части оператора Лапласа на неравномерных сетках со вторым порядком $O(h^2)$.

Численное решение задачи проводилось на дискретной сетке по ξ и r . Узлы равномерной сетки по ξ ($\xi^k = (k-1)\Delta\xi$, $k=1,2,3,\dots$) задавались постоянным шагом $\Delta\xi$. В поперечном направлении (по r) использовалась неравномерная сетка, что было связано с наличием особенностей в рассматриваемой задаче. В цилиндрической системе координат радиальная часть оператора Лапласа (Δ) имеет особенность на оси ($r=0$). Кроме того имеются разрывы в условиях сопряжения (3), (4). Если разрыв нормальной производной (4) имеет место всегда на границе раздела двух сред с различными диэлектрическими свойствами, то разрыв в условии непрерывности тангенциальных компонент электрического поля (3) возникает за счет использования поляризационных потенциалов ψ_I и ψ_{II} . При численной реализации разрыва первого рода (3) на дискретной сетке точка разрыва ($r=r_p$) представлялась в виде двух узлов сетки с номерами "np" и "nd" ($r_{np}=r_{nd}=r_p$; $nd=np+1$) (рис.2). При этом области I (плазма) соответствовали индексам сетки $1 \div np$, а области II (диэлектрик) - $nd \div nR$ ($r_1=0$, $r_{np}=r_{nd}=r_p$). Сгущение сетки проводилось как в начале координат ($r=0$; слева), так и с обеих сторон границы раздела сред ($r=r_p$). Ниже используются обозначения: $h_i^+ \equiv r_{i+1}-r_i$, $h_i^- \equiv r_i-r_{i-1}$ - шаги неравномерной сетки соответственно справа и слева от узла с номером i ; $r_i^+ \equiv r_i+0.5h_i^+$, $r_i^- \equiv r_i-0.5h_i^-$.

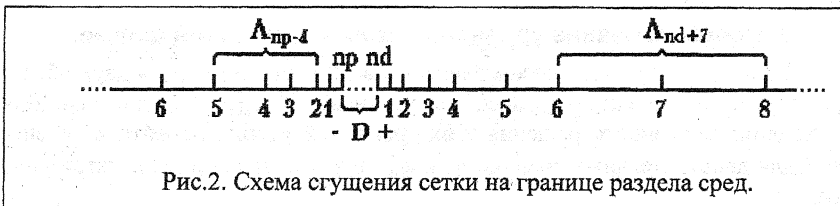


Рис.2. Схема сгущения сетки на границе раздела сред.

На равномерных (регулярных) сетках с постоянным шагом h ($h_i^+ = h_i^- = h$) радиальная часть оператора Лапласа Δ аппроксимируется со вторым порядком $O(h^2)$ [3]: для i -го узла сетки используется трехточечный шаблон узлов (симметричный относительно номера i ; на рис.2 показан шаблон оператора Λ_{nd+7}) с последовательными номерами ($i-1$, i , $i+1$):

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx \frac{1}{r_i} \Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{r_i} \left[\frac{1}{h^2} (r_i^+ \varphi_{i+1} - 2r_i \varphi_i + r_i^- \varphi_{i-1}) \right]. \quad (10)$$

На нерегулярных сетках ($h_i^+ \neq h_i^-$) порядок аппроксимации снижается до первого $O(h)$:

$$\Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left[\frac{r_i^+}{h_i^+} \varphi_{i+1} - 2r_i \frac{\tilde{h}_i}{h_i^+ h_i^-} \varphi_i + \frac{r_i^-}{h_i^-} \varphi_{i-1} \right], \quad \tilde{h}_i \equiv (h_i^+ + h_i^-) / 2. \quad (11)$$

В работе рассматриваются сетки с монотонным увеличением (“разгоняющаяся” сетка) или уменьшением (“сгущающаяся” сетка) шага. В дальнейшем изложении термин “сгущающаяся” сетка будет применяться в ряде случаев для обоих типов сеток. На сетках “сгущения” желательно иметь аппроксимацию $\Delta \varphi$ со вторым порядком, так же как и на регулярных сетках. Аппроксимацию $O(h^2)$ можно получить с помощью несимметричного (относительно i) шаблона дискретного оператора Λ_i , в котором используются три узла с одним пропуском в номерах ($i-2, i, i+1$ для “разгона” и $i-1, i, i+2$ для “сгущения”; последний случай показан на рис.2, на котором отмечены точки шаблона оператора Λ_{np-4}) при условии, что шаг с одной стороны i -го узла равен сумме двух ближайших шагов с другой стороны (соответственно, $h_i^+ = h_{i-1}^+ + h_{i-2}^+$ и $h_i^- = h_{i+1}^- + h_{i+2}^-$). При этом дискретный оператор Λ_i записывается следующим образом:

“разгоняющаяся” сетка ($0 \leftarrow r, r_{nd} \leftarrow r; h_i^+ = h_{i-1}^+ + h_{i-2}^+$)

$$\Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{(h_i^+)^2} (r_i^+ \varphi_{i+1} - 2r_i \varphi_i + \tilde{r}_{i-1} \varphi_{i-2}), \quad (12)$$

“сгущающаяся” сетка ($r \rightarrow r_{np}; h_i^+ = h_{i+1}^+; h_i^- = h_{i+1}^- + h_{i+2}^-$)

$$\Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{(h_i^-)^2} (\tilde{r}_{i+1} \varphi_{i+2} - 2r_i \varphi_i + r_i^- \varphi_{i-1}). \quad (13)$$

$$\tilde{r}_{i-1} \equiv r_i - 0.5h_i^+ = r_i - 0.5(r_i - r_{i-2}) = 0.5(r_i + r_{i-2}),$$

$\tilde{r}_{i+1} \equiv r_i + 0.5h_i^- = r_i + 0.5(r_{i+2} - r_i) = 0.5(r_i + r_{i+2})$. Для сеток “удвоения” ($h_i^- = h_{i-1}^-$ или $h_i^+ = h_{i+1}^+$; см. ниже) $\tilde{r}_{i-1} = r_{i-1}$ и $\tilde{r}_{i+1} = r_{i+1}$.

5. Неравномерная сетка “удвоения шагов” для аппроксимации радиальной части оператора Лапласа.

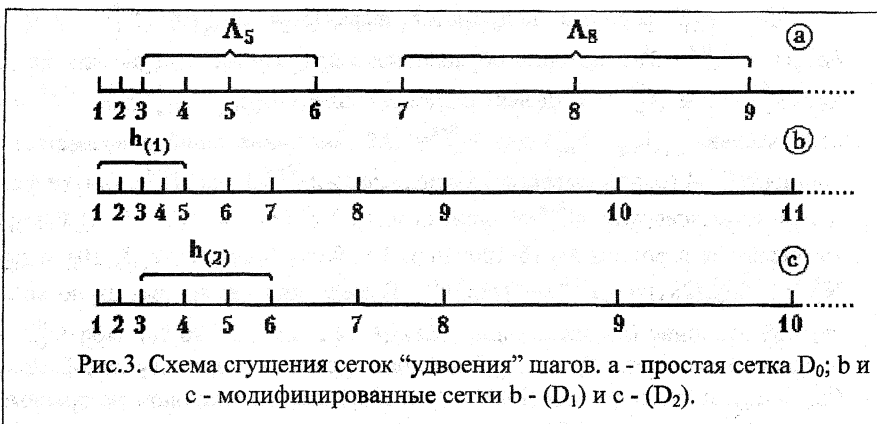
Условие применения аппроксимаций (12), (13) (например, $h_i^+ = h_{i-1}^+ + h_{i-2}^+$) можно реализовать двумя способами. При неравенстве шагов ($h_i^- \neq h_{i-1}^-$) это условие является фактически определением рекуррентной последовательности (в частности, чисел Фибоначчи [4]: $\Phi_1 = \Phi_2 = 1, \Phi_i = \Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}$; Φ_i - число Фибо-

наччи с номером i). Величина i -го шага равняется $h_i^+ = \Phi \cdot h_m$, а два первых шага имеют одинаковую длину ($h_1^+ = h_2^+ = h_m$). Другая возможность возникает при $h_i^- = h_{i-1}^-$. В этом случае происходит “удвоение” шага сетки $h_i^+ = 2h_{i-1}^+$. В данной работе для аппроксимации радиальной части оператора Лапласа применяется именно такое “сгущение” сетки (сетка “удвоения” шагов). На рис.2 показано двухстороннее “сгущение” сетки к границе раздела сред ($r_{np} = r_{nd} = r_p$, в области I $D=pr$, в области II $D=nd$, а на оси системы ($r=0$) $D=1$). Использование чисел Фибоначчи для “сгущения” сетки было подробно рассмотрено в работе [5], где было показано, что как сетки “Фибоначчи”, так и сетки “удвоения” приводят к одинаковым погрешностям численного решения. В дальнейшем рассматриваются только сетки “удвоения” и используются следующие обозначения: L_I, L_{II} - длина областей I и II; N_{Reg}, h_{reg} - число и длина шагов регулярной части сетки (при необходимости нижний индекс дополняется символами I и II для соответствующих областей);

неравномерная часть сетки (сетка “сгущения”): L_D - длина; N_g - число шагов; N_D - число удвоений шага; h_m - минимальный шаг сетки. В нижний индекс величин N_g, h_m, L_D могут добавляться символы, конкретизирующие положение особенности: при $r=0$ “0”; в точке $r=r_p$ слева (со стороны плазмы) “p”, справа (со стороны диэлектрика) “d”. Если не оговорено противное, нумерация узлов нерегулярной сетки начинается с точки особенности (т.е. r_1 соответствует или $r=0$ или $r=r_p$).

Сетка “удвоения” шагов (рис. 3а) состоит из N_D+1 пар ячеек одинакового размера $h_{(K)} = 2^{K-1} h_m$, $K=1 \div N_D+1$. Полное число шагов $Ng = 2N_D+2$. Структура сетки компактно записывается в виде $\{h\}_{N_D}^{D_0} = \{2 \times h, 2 \times (2h), \dots, 2 \times (2^{N_D} h)\} = \{2 \times h_{(K)}, h_{(K)} = 2^{K-1} h, K=1, 2, \dots, N_D+1\}$. Сетка содержит узлы с номерами от 1 до $Ng+1$. Обозначим через $\{R\}_{N_D}^{D_0}$ множество узлов сетки, для которых шаги справа и слева равны ($h_i^- = h_i^+ = h_{(K)}$). В этих узлах для аппроксимации $\Delta\phi$ используется формула с одинаковыми шагами (10). В рассматриваемом случае простой сетки “удвоения” шагов $\{R\}_{N_D}^{D_0} = \{2K, K=1, 2, \dots, N_D+1\}$. Длина сетки “удвоения” вычисляется по формуле

$$L_D = 2 \sum_{K=1}^{N_D+1} h_{iD} = 2h_m \sum_{K=1}^{N_D+1} 2^{K-1} = 2(2^{N_D+1} - 1)h_m.$$



В узлах сетки "удвоения" с четными номерами выполняется равенство $h_i^- = h_i^+ = h_i$ и $\Delta\varphi$ определяется по формуле на равномерной сетке (10). Для сетки с нарастанием шагов в узлах с нечетными номерами ($i=2K-1$, $K=2, 3, \dots, N_D+1$) $h_i^- = h_{i-1}^- = h_{(K-1)} = 0.5h_K = 0.5h_i^+$ (т.е. $h_i^- + h_{i-1}^- = h_i^+$) и $\Delta\varphi$ аппроксимируется с $O(h^2)$ по формуле (12). Таким образом, на сетке "удвоения" $\Delta\varphi$ аппроксимируется со вторым порядком $O(h^2)$ по формулам:

- (10) - для равномерной сетки (шаблон: $i-1, i, i+1$) $i \in \{R\}_{N_D}^{D_0}$;
- (12) - для "разгоняющейся" сетки ($i-2, i, i+1$), $i \in [2, Ng] - \{R\}_{N_D}^{D_0}$;
- (13) - для "сгущающейся" сетки. ($i-1, i, i+2$), $i \in [2, Ng] - \{R\}_{N_D}^{D_0}$.

Наибольший шаг $h_{(ND)}$ сетки "удвоения" обозначим через h_{reg}^D . Желательно, чтобы этот шаг совпадал с шагом регулярной части сетки $h_{reg}^D = h_{reg}$. Рассмотрим возможность размещения сетки "удвоения" на целом числе (N_D^{Reg}) шагов h_{reg} . Используя равенства

$$N_D^{Reg} h_{reg} = L_D = 2(2^{N_D+1} - 1)h_m \quad (14)$$

и $h_{reg} = 2^{N_D} h_m$, получим соотношение $N_D^{Reg} = 4 \cdot 2^{1-N_D}$, из которого следует, что N_D^{Reg} - целое только при $N_D=0$ (равномерная сетка) и $N_D=1$ (однократное "удвоение"; $N_D^{Reg}=3$). При $N_D>1$ дисбаланс составляет $\delta N_D^D h_{reg} = 2^{1-N_D} h_{reg} = 2h_m$. Относительная ошибка шага для сетки удвоения равняется

$$\delta h_{reg}^D(N_D) = \frac{(h_{reg}^D - h_{reg})}{h_{reg}} = \frac{2^{N_D-1}(N_D^{Reg} - 4) + 1}{2^{N_D+1} - 1} = \frac{2^{N_D-1}(N_D^{Reg} - 3) - 2^{N_D-1} + 1}{2^{N_D+1} - 1}$$

Из этой формулы получаются выражения $\delta h_{\text{reg}}^D(0) = (N_D^{\text{Reg}} - 2)/2$ и $\delta h_{\text{reg}}^D(1) = (N_D^{\text{Reg}} - 3)/3$, которые обращаются в нуль соответственно для значений $N_D^{\text{Reg}} = 2$ и $N_D^{\text{Reg}} = 3$. Дефект шага положителен ($h_{\text{reg}}^D > h_{\text{reg}}$) для $N_D^{\text{Reg}} \geq 4$ и отрицательный ($h_{\text{reg}}^D < h_{\text{reg}}$) для $N_D^{\text{Reg}} = 1, 2, 3$. Величина ошибки возрастает с ростом $N_D^{\text{Reg}} - 4$ (соответственно с уменьшением $N_D^{\text{Reg}} - 3$ для $N_D^{\text{Reg}} \leq 3$). При фиксированном значении $N_D^{\text{Reg}} = 4$ ошибка шага $\delta h_{\text{reg}}^D(N_D) = 1 / (2^{N_D+1} - 1)$ быстро уменьшается с ростом N_D ($\delta \bullet 100 = 14.3, 1.6, 0.05$ % для $N_g = 2, 5, 10$), а при $N_D^{\text{Reg}} = 3$ $\delta h_{\text{reg}}^D(N_D) = -(2^{N_D-1} - 1) / (2^{N_D+1} - 1)$ медленно увеличивается по абсолютной величине (соответственно, $|\delta| \bullet 100 = 14.3, 23.8, 24.96$ %). При $N_D^{\text{Reg}} = 4$ последний шаг сетки “удвоения” немного превышает шаг регулярной сетки ($h_{\text{reg}}^D > h_{\text{reg}}$) и на ее границе ($i = 2N_D + 2$) необходимо использовать аппроксимацию по формуле (11) с $O(h)$.

Добавление $\delta N_{N_D}^D h_{\text{reg}}$ в правую часть (14) приводит к модифицированному соотношению: $N_D^{\text{Reg}} h_{\text{reg}} = L_D + \delta N_{N_D}^D h_{\text{reg}} = L_D + 2h_m = 2^{N_D+2} h_m = 4 h_{\text{reg}}$, из которого следует $N_D^{\text{Reg}} = 4$. В области заданного размера для любого значения N_D можно сформировать сетку с “фиксированной” регулярной частью, используя для этого:

- 1) сетку “удвоения” при $N_D = 1$ ($\{h\}_{N_D}^{D_0} = \{2 \times (2^{K-1} h), K = 1, 2, \dots, N_D + 1\}$; $L_D = 3h_{\text{reg}}$);
- 2) модифицированные сетки “удвоения” длиной $L_D = 4h_{\text{reg}}$ (при $N_D > 1$), у которых по сравнению с сеткой $\{h\}_{N_D}^{D_0}$ добавляется
 - a) или два минимальных шага h_m ($\{h\}_{N_D}^{D_1} = \{4 \times h, 2 \times (2^{K-1} h), K = 2, 3, \dots, N_D + 1\}$ (рис.3b)),
 - b) или один шаг длиной $2h_m$ ($\{h\}_{N_D}^{D_2} = \{2 \times h, 3 \times (2h), 2 \times (2^{K-1} h), K = 3, 4, \dots, N_D + 1\}$ (рис.3c)).

Узлы равномерной аппроксимации $\Delta\phi$ (10) для сеток “удвоения” составляют множества:

- для $\{h\}_{N_D}^{D_0} - \{R\}_{N_D}^{D_0} = \{2K, K = 1, 2, \dots, N_D + 1\}$, число шагов $N_g = 2N_D + 2$;
- для $\{h\}_{N_D}^{D_1} - \{R\}_{N_D}^{D_1} = \{2 + 4, 2K, K = 3, 4, \dots, N_D + 2\}$, $N_g = 2N_D + 4$;
- для $\{h\}_{N_D}^{D_2} - \{R\}_{N_D}^{D_2} = \{2, 4, 5, 2K + 1, K = 3, 4, \dots, N_D + 1\}$, $N_g = 2N_D + 3$.

Применение модифицированных сеток “удвоения” шагов позволяет создавать сетки, имеющие регулярную часть с заданным шагом h_{reg} и началом в определенном узле ($i = N_g - 1$).

6. Аппроксимация уравнения поля, краевого условия на оси системы и условий сопряжения.

Известно, что разностные схемы для оператора Шредингера с весом <0.5 являются абсолютно неустойчивыми [3]. Для численного решения полевой части задачи (9) применялась полностью неявная разностная схема:

$$\Omega \varphi_i^{k+1} + \Delta \xi \left(\eta_\alpha - \frac{b_\alpha}{r_i} \Lambda_i \right) \varphi_i^{k+1} = \Omega \varphi_i^k - \Delta \xi B_\alpha \Omega \tilde{\rho}_i, \quad (15)$$

$\tilde{\rho}_i$ - аппроксимация плотности объемного заряда ρ . В общем случае используется представление с весом v : $\tilde{\rho}_i = (1-v)\rho_i^k + v\rho_i^{k+1}$. В простейшем случае значения ρ берутся на нижнем уровне по ξ ($\tilde{\rho}_i = \rho_i^k$; $v=0$).

На оси системы ($r=0$; $i=1$) оператор Λ_1 , действующий на равномерной сетке, записывается в виде $\Lambda_1 \varphi_1 = \frac{1}{h^2} (r_1^+ \varphi_2 - (r_1^+ + r_1^-) \varphi_1 + r_1^- \varphi_{-2})$, $r_1^+ = r_1^- = h/2$, т.е. с учетом аксиальной симметрии ($\varphi_{-2} = \varphi_2$) получаем $\Lambda_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)/h$. В результате аппроксимация уравнения поля представляется в виде $\varphi_2 - \varphi_1 = r_1 f(\varphi_1, \rho_1) = 0$. Отсюда следует $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, что согласуется с условием ограниченности решения при $r=0$ (5).

Условие сопряжения (3) (условие непрерывности продольной компоненты поля на границе раздела сред ($r_p = r_{np} = r_{nd}$)) перепишем в виде $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -\frac{1}{\sigma} \phi - \frac{i}{\sigma} (1 - \eta_0) \varphi_{nd}$, $\phi = \varphi_{np} - \varphi_{nd}$. Решением дифференциального уравнения на интервале $\Delta \xi = \xi^{k+1} - \xi^k$ является функция

$$\phi^{k+1} \equiv \phi(\xi^{k+1}) = -\frac{i}{\sigma} (1 - \eta_0) \int_{\xi^k}^{\xi^{k+1}} \varphi_{nd} e^{\frac{i}{\sigma}(\xi' - \xi^{k+1})} d\xi' + \phi^k e^{-\frac{i}{\sigma} \Delta \xi}.$$

После аппроксимации интеграла по формуле трапеции и введения обозначений $\delta \equiv \frac{1 - \eta_0}{2\sigma} \Delta \xi$, $\zeta \equiv \frac{\Delta \xi}{\sigma}$, это решение записывается в виде соотношения $\varphi_{np}^{k+1} - \varphi_{nd}^{k+1} = (\varphi_{np}^k - \varphi_{nd}^k) e^{-i\zeta} - i\delta (\varphi_{nd}^k e^{-i\zeta} + \varphi_{nd}^{k+1})$, из которого после использования формулы Эйлера ($e^{iz} \equiv \cos(z) + i \sin(z)$) получается аппроксимация условия (3) в матричной форме ($i\sigma \rightarrow \Omega$):

$$\varphi_{np}^{k+1} - (1 - \delta \Omega) \varphi_{nd}^{k+1} = [\cos(\zeta) - \sin(\zeta) \Omega] \varphi_{np}^k - \{ [\cos(\zeta) + \delta \sin(\zeta)] + [\delta \cos(\zeta) - \sin(\zeta) \Omega] \} \varphi_{nd}^k. \quad (16)$$

Второе условие сопряжения (4) не зависит от ξ . После замены в этом условии производных на конечные разности вперед (область II) и назад (область I) получается дискретная аппроксимация:

$$\varphi_{np-1}^{k+1} - \varphi_{np}^{k+1} - \tilde{\varepsilon}_0 \varphi_{nd}^{k+1} + \tilde{\varepsilon}_0 \varphi_{nd+1}^{k+1} = 0, \quad (17)$$

где $\tilde{\varepsilon}_0 \equiv \varepsilon_0 \frac{\Delta r_I}{\Delta r_{II}}$, $\Delta r_I = r_{np} - r_{np-1}$, $\Delta r_{II} = r_{nd+1} - r_{nd}$.

Таблица 1.

	Формула аппроксимации $\Delta\varphi$	Номера узлов сетки	Сетка
Краевое условие при $r=0$	$\varphi_2 = \varphi_1$	1, 2	-
“Разгон” сетки от $r_1=0$	(10)	$i-1, i, i+1 \{iD\}$	$h = \text{const}$
	(12)	$i-2, i, i+1$	$h_i^+ \neq h_i^-$
Равномерная сетка	(10)	$i-1, i, i+1$ $N_{g0} \leq i \leq n_p - N_{gp} + 1$	$h = \text{const}$
Сгущение сетки к $r_{np} = r_p$	(13)	$i-1, i, i+2$	$h_i^+ \neq h_i^-$
	(10)	$i-1, i, i+1 \{iD\}$	$h = \text{const}$
1-ое условие сопряжения	(16)	np, nd	-
2-ое условие сопряжения	(17)	$np-1, np, nd, nd+1$	-
“Разгон” сетки от $r_{nd} = r_p$	(10)	$i-1, i, i+1 \{iD\}$	$h = \text{const}$
	(12)	$i-2, i, i+1$	$h_i^+ \neq h_i^-$
Равномерная сетка	(10)	$i-1, i, i+1$ $nd + N_{gd} - 1 \leq i \leq nR - 1$	$h = \text{const}$
Краевое условие при $r=R$	$\varphi_{nR} = 0$	nR	-

В табл. 1 представлена последовательность различных аппроксимаций оператора Δ и дополнительных условий в узлах сетки по r от $i=1$ до $i=nR$. Во второй колонке указан номер формулы аппроксимации, а в третьей показаны номера узлов сетки (шаблон), на которых осуществляется аппроксимация оператора Δ . В этой же колонке указаны диапазоны номеров узлов, для которых используется данная формула аппроксимации. В областях “сгущения” формула (10) применяется для узлов с номерами $i \in \{iD\}$ для соответствующей сетки; для оставшихся узлов этих областей используются формулы аппроксимации (12) или (13). В последней колонке показан характер сетки:

$h = \text{const}$ - равномерная сетка; $h_i^+ \neq h_i^-$ - нерегулярная сетка.

На равномерной части сетки в шаблон оператора Λ_i входят 3 последовательных узла сетки (10). Хотя на нерегулярной части сетки шаблон Λ_i также содержит 3 узла, однако такой шаблон не является симметричным относительно i : последовательность номеров этих узлов оказывается нарушенной ($i-2, i, i+1$ или $i-1, i, i+2$). Аппроксимации (12), (13) содержат фактически 4 узла сетки с пропуском номера одного узла. Кроме того, в аппроксимацию второго условия сопряжения (17) входит 4 последовательных узла сетки. Таким образом, часть дискретных уравнений включает значения искомой функции ϕ^{k+1} в 4-х точках, что делает невозможным использование для нахождения ϕ^{k+1} трехточечной прогонки. Поэтому для решения полевой части задачи была использована пятиточечная прогонка (см., например, [6]) в форме матричной прогонки для матриц размером 2×2 .

Пятиточечная прогонка применяется для решения разностных уравнений:

$$a_i Y_{i-2} - A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1} + e_i Y_{i+2} = f_i.$$

Здесь обозначения коэффициентов A_i, C_i, B_i являются "стандартными" для уравнений, для решения которых используется трехточечная прогонка.

Введем обозначения: $g_i = a_i \alpha_{i-1} - A_i$; $D_i = C_i - a_i \gamma_{i-1} + g_i \alpha_i$; $i = 2, 3, \dots, nR$. Тогда коэффициенты прогонки ($\alpha_i, \gamma_i, \beta_i$) вычисляются в прямом "проходе" по формулам:

$$\alpha_{i+1} = D_i^{-1} [B_i + g_i \gamma_i];$$

$$\gamma_{i+1} = D_i^{-1} e_i;$$

$$\beta_{i+1} = D_i^{-1} [f_i - a_i \beta_{i-1} - g_i \beta_i], i = 2, 3, \dots, nR.$$

Решение дискретного уравнения получается при "проходе" в обратном направлении

$$Y_i = \alpha_{i+1} Y_{i+1} - \gamma_{i+1} Y_{i+2} + \beta_{i+1}, i = nR, nR-1, \dots, 1.$$

Алгоритм пятиточечной прогонки в матричной форме был применен для решения разностного уравнения полевой части задачи (15) с соответствующими дополнительными условиями (табл. 1). При этом Y_i, f_i, β_i - векторы с двумя компонентами, $a, a_i, A_i, C_i, B_i, e_i, g_i, D_i, \alpha_i, \gamma_i$ - матрицы размером 2×2 . Верхний индекс "-1" в D_i^{-1} обозначает обратную матрицу, компоненты которой в случае матриц 2×2 находятся по аналитическим формулам:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} d_{22} & -d_{12} \\ -d_{21} & d_{11} \end{pmatrix}, |D| = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}.$$

В рассматриваемой задаче на границе $\Gamma = \Gamma_{nR}$ задается условие первого рода $\phi_{nR} = 0$. Поэтому коэффициенты прогонки ($\alpha_i, \gamma_i, \beta_i$) с номерами $i = nR + 1$ в

расчете не используются. В узлах сетки, в которых аппроксимация оператора Лапласа осуществляется по формуле (10) $i \in \{iD\}$, $a_i = e_i = 0$ (т.е. для дискретного уравнения применима фактически трехточечная прогонка) и следовательно $\gamma_{i+1} = 0$. В частности для первых двух шагов сетки $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$. γ_1 входит только в выражение для D_2 и фактически не используется поскольку перед ним стоит множитель $a_1 = 0$ (т.е. можно положить $\gamma_1 = 0$). По той же причине можно положить $\beta_1 = 0$ в формуле для β_3 . Из краевого условия при $r = 0$ ($\varphi_2 = \varphi_1$) следует $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$.

7. Численное интегрирование уравнений движения частиц пучка.

Траектории частиц (6), (7) вычисляются только в области плазмы ($\alpha = 1$). В бесконечно сильном магнитном поле движение электронов пучка в поперечном направлении отсутствует. Траектории электронов имели радиальные координаты, совпадающие с узлами сетки по r ($r_{\text{пат}} = r_i$; $i = 1 \div np$). В каждом узле вычислялось движение группы из $N_{\text{пат}}$ частиц с начальными "фазами" y_0 , равномерно распределенными на отрезке $(0, 2\pi)$: $y_0^{(M)} = (M - 0.5)\Delta y_0$, $M = 1, 2, \dots, N_{\text{пат}}$; $\Delta y_0 = 2\pi/N_{\text{пат}}$. Плотность электронов пучка ρ вычислялась по формуле (8), в которой интегралы аппроксимировались по формуле прямоугольников:

$$\rho_r = \frac{\Delta y_0}{\pi} \sum_{M=1}^{N_{\text{пат}}} \cos(y^{(M)}), \rho_{\text{Im}} = \frac{\Delta y_0}{\pi} \sum_{M=1}^{N_{\text{пат}}} \sin(y^{(M)}).$$

Введем обозначения $U \equiv 1/(1 - \sigma\eta)^{1/2}$ ($\eta = 1/\sigma U^2 - 1/\sigma$) и перепишем (6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\xi} &= F(\xi; r_i) = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re} \left[\exp(-iy) \left(1 - i\sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varphi \right] = \\ &= \frac{\sigma}{2} \left[\left(\varphi_r + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{\text{Im}} \right) \cos(y) + \left(\varphi_{\text{Im}} - \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_r \right) \sin(y) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя $\partial\varphi/\partial\xi$ из уравнения (1) в первое равенство (18) получим другое представление правой части $F(\xi; r_i)$:

$$\begin{aligned} F(\xi; r_i) &= \frac{\sigma}{2} \operatorname{Re} \left[\exp(-iy) (\Delta\varphi + iB\rho) \right] = \\ &= \frac{\sigma}{2} \left[(\Delta\varphi_r - B\varphi_{\text{Im}}) \cos(y) + (\Delta\varphi_{\text{Im}} + B\varphi_r) \sin(y) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где $B \equiv \sigma V_i$. Представление (19) применимо только во внутренних точках области ($0 < r_i < r_p$, $i = 2 \div np - 1$), в то время как (18) остается справедливым также и на границах области I ($i = 1, np$).

Правая часть уравнений движения (6), (7) в форме (18) (или (19)) $F(\xi; r_i)$ не содержит переменной U . Поэтому для численного решения этих уравне-

ний можно использовать известную схему с перешагиванием (leap-frog), в которой значения U определяются в полуцелых точках ξ ($\xi^{k+1/2}=(k-1/2)\Delta\xi$):

$$U^{k+1/2}=U^{k-1/2}+F^k\Delta\xi, \\ \eta^{k+1/2}=1/[\sigma(U^{k+1/2})^2]-1/\sigma, \quad (20)$$

$$y^{k+1}=y^k+\eta^{k+1/2}\Delta\xi.$$

В работе для внутренних точек области I ($i=2+np-1$) используется представление (19) правой части $F(\xi; r_i)$, а на границах области ($i=1, np$) представление (18). В последнем случае производная по ξ аппроксимировалась по формуле $(\partial\varphi/\partial\xi)\approx(\varphi^{k+1}-\varphi^k)/\Delta\xi$. Входящие в $F(\xi; r_i)$ значения плотности заряда ρ брались на нижнем уровне ($\tilde{\rho}_i=\rho_i^k; v=0$).

На k -ом уровне по ξ известны (уже вычислены) значения $U^{k-1/2}$, y^k , ρ^k , φ^k . Переход к следующему уровню $\xi^k \rightarrow \xi^{k+1}$, осуществлялся с помощью следующей последовательности вычислений:

- 1) с помощью пятиточечной матричной прогонки (для матриц 2×2) решалось дискретное уравнение для φ^{k+1} (15) с условиями сопряжения (16), (17) и соответствующими краевыми условиями (см. табл. 1);
- 2) по схеме перешагивания (20) находились траектории частиц;
- 3) вычислялись компоненты вектора плотности ρ_i^{k+1} (8).

Далее последовательность вычислений повторялась на следующем шаге $\Delta\xi$ ($\xi^{k+1} \rightarrow \xi^{k+2}$). Схему вычислений на каждом шаге можно представить в виде:

$$\rho_i^k \rightarrow \varphi_i^{k+1} (15) \rightarrow U^{k+1/2}, y^{k+1} (20) \rightarrow \rho_i^{k+1} \quad (8).$$

Вычисления на каждом шаге $\Delta\xi$ можно начинать также с нахождения траекторий частиц. В этом случае дискретная аппроксимация правой части уравнения (18) $F(\xi; r_i)$ в граничных точках ($i=1, np$) содержит еще не вычисленные значения φ^{k+1} . В следствии этого для нахождения решения φ^{k+1} на шаге $\Delta\xi$ необходимо применять итерации. При этом для получения $\tilde{\rho}_i$ разумно использовать формулу с весами (например, $v=0.5$). При проведении итераций во всех переменных, соответствующих верхнему уровню по ξ , верхний индекс "k+1" заменяется на номер итерации "s". За начальное приближение берутся значения на нижнем (k-ом) уровне: $\varphi^{s=0}=\varphi^k$, $\rho_i^{s=0}=\rho_i^k$ (т.е. $\tilde{\rho}_i^{s=0}=(1-v)\rho_i^k+v\rho_i^k=\rho_i^k$). Итерационный процесс строится по схеме: $\varphi^s \rightarrow U^s, y^s$ (20) $\rightarrow \tilde{\rho}^{s+1}$ (8) $\rightarrow \varphi^{s+1}$ (15). Такая процедура решения является более сложной по сравнению с приведенной выше и в данной работе не использовалась.

В работе также не реализовывался вариант решения задачи без приме-

нения представления (18) в граничных точках. В этом случае повсюду в области I, в том числе и на границе, используется представление (19), не содержащее производной по ξ . При этом считается, что поскольку "начальный" шаг неравномерных сеток достаточно мал, то значения $\Delta\phi$ в крайних точках области мало отличаются от значений в ближайших узлах (т.е. $(\Delta\phi)_1 \cong (\Delta\phi)_2$, $(\Delta\phi)_{np} \cong (\Delta\phi)_{np-1}$). Поэтому при дискретной аппроксимации уравнения (19) в этих точках используются соответственно разностные операторы Λ_2 и Λ_{np-1} . Поскольку производная $\partial\phi/\partial\xi$ не входит в правую часть (18), то для аппроксимации ρ можно использовать формулу с весами v . На каждом шаге по ξ численное решение задачи проводится по следующей схеме:

Таблица 2

N	ω $\times 10^{10} \text{ c}^{-1}$	ω_p $\times 10^{10} \text{ c}^{-1}$	$1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$	$\frac{b_I}{b_{II}}$
I	6.1	1.0	0.973	1.028
II	8.25	10.0	-0.469	-2.13
III	12.75	1.0	0.99939	1.0006
IV	14.85	10.0	0.5465	1.82

- 1) схема перешагивания (20) применяется для нахождения траекторий частиц;
- 2) вычисляются компоненты вектора плотности ρ_i^{k+1} (8) и следовательно $\tilde{\rho}_i^{k+1}$;
- 3) с помощью пятиточечной матричной прогонки находятся новые значения ϕ^{k+1} из дискретного уравнения (15).

Краткая схема вычислений записывается в виде: $\phi_i^k \rightarrow U^{k+1/2}, y^{k+1}$ (20) $\rightarrow \rho_i^{k+1}$ (8), $\tilde{\rho}_i^{k+1} \rightarrow \phi_i^{k+1}$ (15).

8. Результаты тестовых расчетов для выбора параметров сеток сгущения.

При численном решении задачи (1)-(8) важным моментом является корректное разрешение особенностей (главным образом на границе раздела сред), т.е. выбор параметров сеток сгущения. Заметим, что коэффициенты перед оператором Δ в уравнениях поля (1), (2) могут иметь различные знаки, а их величина может отличаться в несколько раз. В таблице 2 для некоторых значений частот ω и ω_p приведены отношения этих коэффициентов $b_I/b_{II} = x^2/(x^2 - \alpha_p) = 1/[1 - (\omega_p/\omega)^2]$. В области (плазмы) b_I может иметь как положи-

тельные, так и отрицательные значения (табл.2; во второй строке $b_I/b_{II} \approx -2$). В области II всегда $b_{II}=1/x^2 > 0$.

Модельная задача для выбора параметров сеток сгущения естественным образом получается из полевой части рассматриваемой задачи, если в уравнениях (1), (2) положить $\sigma \rightarrow 0$ и $|b_\alpha|=1$. В результате получается система дифференциальных уравнений для функций Бесселя:

$$(\Delta + 1)\varphi_I = 0, \quad (21)$$

$$(\Delta - \eta_0)\varphi_{II} = 0, \quad (22)$$

с условиями сопряжения и краевыми условиями

$$\varphi_I \Big|_{r=r_p} = \eta_0 \varphi_{II} \Big|_{r=r_p}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \Big|_{r=r_p} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_p}, \quad (24)$$

$$r \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \varphi_{II} \Big|_{r=R} = \Phi_R. \quad (25)$$

В уравнении (21) взят знак "+", что соответствует случаю $b_I < 0$.

Уравнение поля в области I (21) является дифференциальным уравнением для функций Бесселя. С учетом условия ограниченности на оси (25) решение этого уравнения может содержать только функции Бесселя 1-го рода $J_0(r)$ и общее решение можно представить в виде $\varphi(r) = C_1 J_0(r)$. В области II фундаментальная система решений уравнения Бесселя (22) состоит из двух модифицированных функций Бесселя 1-го ($I_0(x)$) и 2-го рода ($K_0(x)$), где $x = \sqrt{\eta_0} r$, а общее решение в этой области представляется в виде $\varphi(r) = C_2 I_0(x) + C_3 K_0(x)$. Таким образом аналитическое решение уравнений (21) и (22) выбиралось в виде:

- в области I $\varphi(r) = C_1 J_0(r)$;
- в области II $\varphi(r) = C_2 I_0(x) + C_3 K_0(x)$, $x = \sqrt{\eta_0} r$.

Подстановка этих выражений в краевое условие (25) и условия сопряжения (23), (24) приводит к системе алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, C_3 :

$$C_2 I_0(x_R) + C_3 K_0(x_R) = \Phi_R; \quad (26)$$

$$C_1 J_0(r_p) = \eta_0 [C_2 I_0(x_p) + C_3 K_0(x_p)]; \quad (27)$$

$$-C_1 J_1(r_p) = \varepsilon_0 \sqrt{\eta_0} [C_2 I_1(x_p) - C_3 K_1(x_p)]. \quad (28)$$

Хотя решение алгебраической системы (26)-(28) получается без за-

труднений, для удобства изложения, выразим C_2 и C_3 через C_1 из условий сопряжения (27), (28):

$$C_2 = C_1 \frac{\varepsilon_0 J_0(r_p) K_1(x_p) - \sqrt{\eta_0} J_1(r_p) K_0(x_p)}{D}, \quad (29)$$

$$C_3 = C_1 \frac{\varepsilon_0 J_0(r_p) I_1(x_p) + \sqrt{\eta_0} J_1(r_p) I_0(x_p)}{D}, \quad (30)$$

где $D = \varepsilon_0 \eta_0 [I_0(x_p) K_1(x_p) + I_1(x_p) K_0(x_p)]$. Следует заметить, что при $\Phi_R=0$ система (26)-(28) становится однородной и, следовательно, имеет только тривиальное решение $C_1=C_2=C_3=0$.

Для целей настоящей работы выбор конкретного значения Φ_R не имеет особого значения. Поэтому можно выбрать Φ_R "естественным" образом, положив $\Phi_R=C_2 I_0(x_R)+C_3 K_0(x_R)$ при заданных C_2 и C_3 , которые определяются из условий сопряжения (27), (28) (т.е. по формулами (29), (30)). В этом случае остается только два условия для определения двух отношений C_2/C_1 и C_3/C_1 .

Таблица 3

Модель		Относительная погрешность решения δ_{\max} %%					
		D_0		D_1		D_2	
nr	N_D	Ng	%%	Ng	%%	Ng	%%
10	0	0	0.5412				
	1	4	0.1631				
	3	8	0.0372	10	0.0206	9	0.0197
	5	12	0.0286	14	0.0244	13	0.0243
	7	16	0.0258	18	0.0247	17	0.0247
	10	22	0.0249	24	0.0247	23	0.0247
20	0	0	0.1573				
	1	4	0.0480				
	3	8	0.0128	10	0.0054	9	0.0052
	5	12	0.0083	14	0.0065	13	0.0065
	7	16	0.0070	18	0.0066	17	0.0066
	10	22	0.0066	24	0.0066	23	0.0066

Поэтому значение одного из трех коэффициентов можно выбирать произвольным образом. При этом удобно положить $C_1=1$.

Случай когда и в области I уравнение поля модельной задачи представляет собой дифференциальное уравнение для модифицированных функций Бесселя (знак “-” перед 1 в (21); решение - $\varphi_1(r)=C_1 I_0(r)$) рассматривался в работе [5]. Было показано, что для всех используемых моделей сеток “сгущения” (как простых, так и модифицированных сеток “Фибоначчи” или “удвоения” шагов) погрешность численного решения примерно одинакова и, что применение сеток сгущения с $N_D > 5$ ($Ng > 2N_D + 1$) становится менее эффективным.

Для изучения корректности разрешения особенности на оси системы при численном решении задачи в одной области, содержащей только одну эту особенность в области I ($0 \leq r \leq 1.0=R$) численно решалось уравнение (21) с краевыми условиями (25). Точное решение выбиралось в виде $\varphi(r)=J_0(r)$ (т.е. $C_1=1$) с краевым условием $\Phi_R=J_0(R=1.0)$. Результаты расчетов представлены в таблице 3, в которой приведены значения максимальной относительной ошибки численного решения задачи $\delta_{\max} = \max |(\varphi_i/\varphi_i^{\text{ex}} - 1)| \cdot 100 \%$, $\varphi_i^{\text{ex}}=J_0(r_i)$ - точное решение. В графе Ng приводится число шагов неравномерной части сетки. Значение δ_{\max} достигалось в начале координат ($r=0$; $i=1$). Из таблицы 3 видно, что использование сгущающихся сеток с $N_D > 5$ становится не эффективным: количество вычислений возрастает, в то время как погрешность решения остается практически той же самой. Все три модели сетки удвоения шагов дают примерно одинаковую точность. Наибольшая погрешность достигается на сетке удвоения без модификации (D_0).

Изучение корректности разрешения особенности на границе раздела сред проводилось при численном решении модельной задачи (21)-(25) в двух областях ($L_1=L_2=1$; $0 \leq r \leq 2$) с границей раздела сред, расположенной в точке соединения областей ($r=r_p=1$). Число шагов “начальной” равномерной сетки (nr) было одинаковым в обеих областях ($nr_1=nr_2=nr$). Сгущение сетки к точке раздела сред ($r=r_p=1$) осуществлялось симметричным образом (сетки “сгущения” слева и справа имели одинаковые параметры). На основании результатов, представленных в табл.3, для разрешения особенности в нуле использовалась сетка удвоения D_1 с $N_D=5$ (за исключением случая “чисто” равномерной сетки: $N_D=0$). В расчетах использовалось “естественное” граничное условие ($\varphi(r=2)=\Phi_R=C_2 I_0(x_R)+C_3 K_0(x_R)$, $x_R=2\sqrt{\eta_0}$), в котором коэффициенты C_2 и C_3 вычислялись по формулам (29) и (30) с $C_1=1$.

В таблице 4 представлены результаты расчетов при значениях парамет-

ров $\varepsilon_0=2$ и $\eta_0=2$. Данные, представленные в табл.4, демонстрируют достаточно высокую эффективность применения сеток сгущения. Для всех моделей сетки “удвоения” (D_0, D_1, D_2) погрешность решения приблизительно одинакова. Как и в предыдущих случаях (область с одной особенностью; результаты работы [5]), наибольшая эффективность достигается при $N_D=5$. При больших значениях N_D относительная погрешность (δ_{\max}) хотя и уменьшается, но это уменьшение становится заметно медленнее. В самом “плохом” случае ($nr=10$) для сетки сгущения D_0 с $N_D=5$ максимальная погрешность $\delta_{\max} \approx 0.4\%$.

Таблица 4

$\varepsilon_0=2; \eta_0=2$		Относительная погрешность решения $\delta_{\max}\%$					
		Nr=10			Nr=20		
Модель		D_0	D_1	D_2	D_0	D_1	D_2
N_D	N_g	%%	%%	%%	%%	%%	%%
0	0	7.6938	$N_{D_0}=0$		3.7568	$N_{D_0}=0$	
0	0	7.9034	$N_{D_0}=5$		3.8044	$N_{D_0}=5$	
1	4	3.9574			1.9051		
3	8	1.1324	1.0840	1.0845	0.5353	0.5059	0.5060
5	12	0.3909	0.3905	0.3905	0.1628	0.1613	0.1613
7	16	0.2176	0.2182	0.2182	0.0755	0.0754	0.0754
10	22	0.1679	0.1680	0.1680	0.0504	0.0504	0.0504

8. Результаты численного моделирования процесса усиления.

Рассмотренный выше алгоритм применялся для численного моделирования процесса усиления на основе системы уравнений (1)-(8) в области ($0 \leq r \leq 1$; $r_p = 0.5$; $R^* = 1.8$ см, $r_p^* = 0.9$ см). Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\epsilon_0 = -2$, $\gamma = 2$, $u = c/2$ ($\eta_0 = 2$, $\sigma = 8$); $J_b/J_0 = 0.5$. Поскольку коэффициенты перед оператором Δ в уравнениях поля (1), (2) могут отличаться в несколько раз (см. табл. 2) в областях I и II делалась локальная замена переменных $r/\sqrt{|b_\alpha|} \rightarrow r_\alpha$. Знак абсолютной величины b_α ($|b_\alpha| = S_\alpha b_\alpha$; $S_\alpha = \text{sign}(b_\alpha)$) в подкоренном выражении относится в основном к области I, где b_I может иметь отрицательное значение (табл.2). В области II всегда $b_{II} = 1/x^2 > 0$. При такой замене переменных оператор $b_\alpha \Delta_\alpha$ переходит в $S_\alpha \Delta_\alpha$, а $\tilde{\epsilon}_0$ в дискретном аналоге второго условия сопряжения (17) дополнительно умножается на $\sqrt{|b_I|/b_{II}}$. В каждой из областей I и II использовалось 20 шагов регулярной "сетки" ($\Delta r = 0.025$); для сгущения сетки применялась простая схема удвоения шагов D_0 с $N_D = 5$; $\Delta \xi = 0.001$. Общее число узлов пространственной сетки в областях I и II равнялось соответственно 49 и 37.

На рис.4 представлены зависимости $|\Phi| = \sqrt{\Phi_r^2 + \Phi_{Im}^2}$ от безразмерной поперечной координаты r при различных значениях ξ для варианта I табл.2. На развитой стадии процесса ($\xi = 150$) поперечное поле достаточно быстро убывает с увеличением расстояния от границы раздела сред ($r = 0.5$).

Иными словами поле в плазме имеет поверхностную структуру, т.е. основная часть потока электромагнитной энергии распространяется по диэлек-

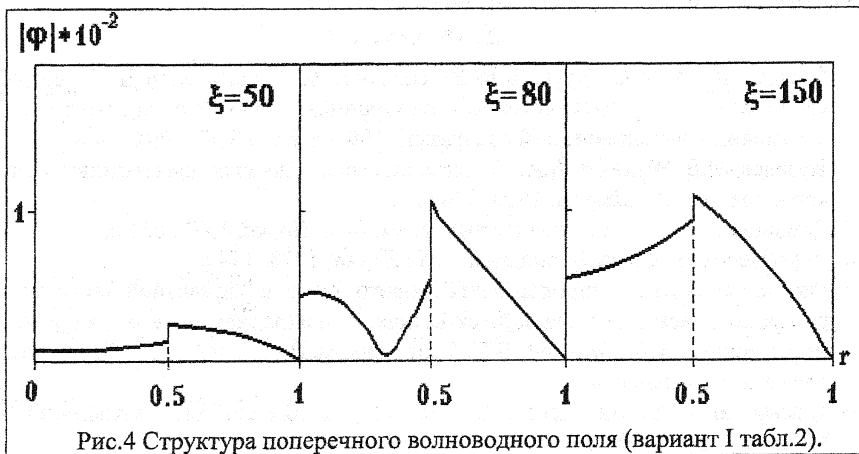


Рис.4 Структура поперечного волноводного поля (вариант I табл.2).

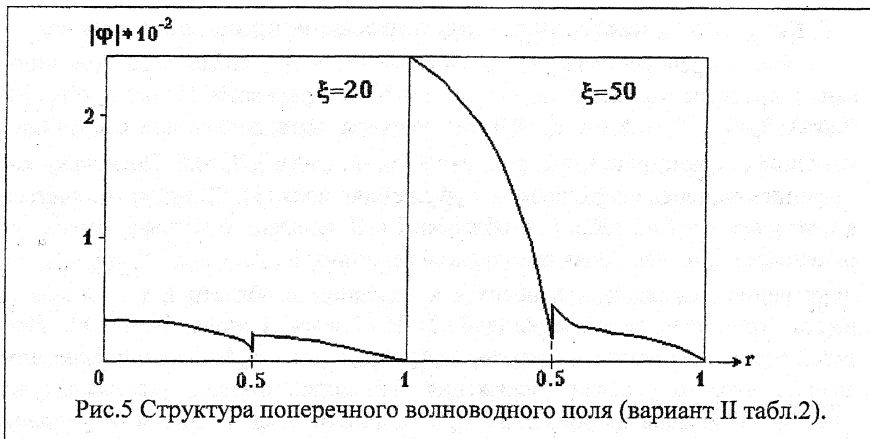


Рис.5 Структура поперечного волноводного поля (вариант II табл.2).

трику. На границе раздела сред ($r=0.5$) производная по поперечному направлению меняет знак. Иная ситуация реализуется при увеличении плазменной частоты (вариант II табл.2; $b_1 < 0$). Динамика поперечной структуры волноводного поля представлена на рис.5. В области I поле нарастает с увеличением расстояния от $r=r_p=0.5$. В этом случае основной поток электромагнитной энергии распространяется по плазме. Волноводное поле в обеих областях имеет объемную структуру. Заметим, что хотя и в этом случае число шагов “регулярной” сетки в обеих областях было одинаковым, за счет локального масштабирования в области I величина шага в поперечном направлении была меньше чем в области II в $\sqrt{2.13} \approx 1.46$ раз.

Литература

1. Красильников М.А., Кузелев М.В., Панин В.А., Филиппычев Д.С. Теория усилителя на релятивистском электронном пучке с диэлектрико-плазменным заполнением // Физ. Плазмы. 1993. т.19. N 3. С. 1061-1068.
2. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. - М.: Наука, 1990. 336 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. 656 с.
4. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978. 144 с.
5. Филиппычев Д.С. Аппроксимация второго порядка радиальной части оператора Лапласа на сгущающихся сетках. // Прикладная математика и информатика N : Сб. // Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева - М.: МАКС Пресс. 2002. в печати
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. 592 с.