

С.Г. Головина, А.М. Денисов, В.И. Дмитриев

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗОН МАЛОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ*

При эксплуатации нефтяных месторождений крайне важно знать расположение зон малой проницаемости, где бурение нецелесообразно. Обычно при разведке нефтяных месторождений зоны малой проницаемости определяются с помощью градиентных методов электроразведки. Однако при эксплуатации нефтяного месторождения, когда имеется большое число пробуренных скважин, возникает возможность определения зон малой проницаемости по измерениям давления в скважинах. Именно этой задаче и посвящена настоящая статья.

Постановка задачи

Рассмотрим распределение давления $P(x, y)$ внутри слоя, которое не изменяется поперек слоя. Пусть внутри этого слоя проницаемость постоянна за исключением некоторой зоны полной непроницаемости S , которая ограничена контуром C . В слое пробурено N скважин, устья которых заданы координатами $M_n = (x_n, y_n)$, $n \in [1, N]$. На большом расстоянии от исследуемой области давление равно постоянному пластовому давлению P_0 . Если работает лишь одна n -ая скважина, в которой давление равно P_n , то давление в пласте $P^{(n)}(x, y)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta P^{(n)}(x, y) = -P_n \cdot \delta(x - x_n) \delta(y - y_n), \\ \left. \frac{\partial P^{(n)}}{\partial n} \right|_C = 0, \\ P^{(n)} \Big|_{C_{R_0}} = P_0, \end{cases} \quad (1)$$

где C_{R_0} — окружность большого радиуса R_0 .

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 05-01-00232 и 05-01-00244.

Обратная задача состоит в определении контура C по дополнительным данным, измеренным давлениям в закрытых скважинах:

$$P_m^{(n)} = P^{(n)}(x_m, y_m), \quad m \in [1, N], \quad m \neq n, \quad n \in [1, N]. \quad (2)$$

Таким образом, мы имеем $N(N-1)$ измеренных данных \hat{P} при различных работающих скважинах:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_2^{(1)} & \dots & P_N^{(1)} \\ P_1^{(2)} & P_2^{(2)} & \dots & P_N^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1^{(N)} & P_2^{(N)} & \dots & P_N^{(N)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Редукция краевой задачи к интегральному уравнению

Рассмотрим функцию Грина для задачи Дирихле в круге радиуса R_0 :

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d(M, M_0)}{r_0 \cdot R_0 \cdot \rho(M, M_0)}, \quad (4)$$

где M – точка с координатами (x, y) , M_0 – точка с координатами

$$(x_0, y_0), \quad \rho(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

$$d(M, M_0) = \sqrt{(r_0^2 x - R_0^2 x_0)^2 + (r_0^2 y - R_0^2 y_0)^2}.$$

Будем искать решение задачи (1) в виде:

$$P^{(n)}(M) = P_0 + P_n \cdot G(M, M_n) + P_n \cdot \oint_C \mu(M_0) \cdot G(M, M_0) dl_{M_0} \quad (5)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению и краевому условию на внешнем контуре C_{R_0} . Подставив (5) в краевые условия на C , получим

интегральное уравнение для плотности потенциала $\mu(M)$:

$$\frac{1}{2} \mu(M) - \oint_C \mu(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} = \frac{\partial G(M, M_n)}{\partial n_M}, \quad M \in C, \quad (6)$$

Определив из уравнения (6) $\mu(M)$, находим давление $P(M)$ в точках M_m с координатами (x_m, y_m) , когда источник расположен в точке M_n с координатами (x_n, y_n) (для такого давления введено обозначение $P_m^{(n)}$), тогда согласно (5)

$$P_m^{(n)} = P_0 + P_n \cdot G(M_m, M_n) + P_n \cdot \oint_C \mu(M_0) \cdot G(M_m, M_0) dl_{M_0} \quad (7)$$

Заметим, что интегральное уравнение (6) если $R_0 \gg D$, где D – максимальный диаметр области S , может быть записано в виде:

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x - x_0}{\rho^2(M, M_0)}; \quad \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y - y_0}{\rho^2(M, M_0)} \quad (8)$$

Решение интегрального уравнения (6) не зависит от R_0 . Однако расчет давления по формуле (5) зависит от R_0 , т.к. при больших $R_0 \gg D_0$ (D_0 – диаметр области, где рассчитывается давление) функция Грина (4) имеет вид

$$G(M, M_0) \cong \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R_0}{\rho(M, M_0)} \quad (9)$$

В результате давление при $\rho(M, M_0) \leq D_0$, согласно (5), имеет вид:

$$P^{(n)}(M) = P_0 + \frac{P_n}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{\rho(M, M_n)} + \frac{P_n}{2\pi} \cdot \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{1}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0} + C, \quad (10)$$

где $C = \frac{P_n \ln R_0}{2\pi} \left(1 + \oint_C \mu(M_0) dl_{M_0} \right)$. Присутствие множителя $\ln R_0$ существенно влияет на точность расчетов, т.к. при больших R_0 необходимо решать интегральное уравнение (6) с высокой точностью.

Иначе возникает существенная погрешность. В связи с этим естественно видоизменить постановку задачи (1) для случая больших значений R_0 .

Постановка внешней задачи Неймана

Рассмотрим распределение давления в слое $P(x, y)$ при больших R_0 , тогда $P(x, y)$ будет решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta P^{(n)}(x, y) = -P_n \cdot \delta(x - x_n) \delta(y - y_n), \\ \left. \frac{\partial P^{(n)}}{\partial n} \right|_C = 0, \\ P^{(n)}(x, y) - u_0(x, y) \rightarrow P_0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$u_0(M) = \frac{P_n}{2\pi} \cdot \ln \frac{1}{\rho(M, M_n)} \quad (12)$$

— давление в точке M с координатами (x, y) в окрестности источника M_n в отсутствие зоны непроницаемости.

Будем искать решение задачи (11) в виде:

$$P_m^{(n)} = P_0 + u_0(M) + u(M), \quad (13)$$

где $u(M)$ — давление, возникающее в результате наличия зоны непроницаемости S , а P_0 — пластовое давление.

Давление $u(M)$ удовлетворяет внешней задаче Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, \\ \left. \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right|_C = - \left. \frac{\partial u_0}{\partial n} \right|_C, \end{cases} \quad (14)$$

$u(M) \rightarrow 0$ на бесконечности.

Полученная задача сводится к интегральному уравнению. Для того чтобы удовлетворить условию на бесконечности, решение задачи (14) представим в виде:

$$u(M) = \frac{P_n}{2\pi} \oint_C \mu(M_0) \ln \frac{r(M, O)}{\rho(M, M_0)} dl_{M_0}. \quad (15)$$

При этом считается, что начало координат O принадлежит неоднородности S . Это представление является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности, т.к. $\frac{r(M, O)}{\rho(M, M_0)} \rightarrow 1$ при $M \rightarrow \infty$.

Подставив (15) в граничное условие, получим интегральное уравнение:

$$\pi \mu(M) - \oint_C \mu(M_0) K(M, M_0) dl_{M_0} = f(M), \quad (16)$$

где $K(M, M_0) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{r(M)}{\rho(M, M_0)}$, $f(M) = \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{\rho(M, M_n)}$.

Для случая, когда неоднородность представляет собой круг радиуса a , решение получается аналитически. Оно представляется в виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{P_n}{2\pi} \ln \frac{r}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi}} \quad (17)$$

где $\left\{ r_1 = \frac{a^2}{r_0}, \varphi_1 = 0 \right\}$ — точка положения сопряженного источника,

$\left\{ r_0, \varphi_0 = 0 \right\}$ — точка положения источника. Функция (17) является решением уравнения Лапласа и стремится к нулю на бесконечности. Остается проверить выполнение граничного условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{P_n}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \frac{r-r_1 \cos \varphi}{r^2+r_1^2-2rr_1 \cos \varphi} \right\} = \frac{P_n}{2\pi} \left\{ \frac{1}{a} \frac{r_0(r_0-a \cos \varphi)}{a(r_0^2+a^2-2ar_0 \cos \varphi)} \right\} = \\ &= \frac{P_n}{2\pi} \frac{a-r_0 \cos \varphi}{r_0^2+a^2-2ar_0 \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычислим теперь, согласно (14),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} &= - \frac{P_n}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=a} \ln \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0 \cos \varphi} = \\ &= - \frac{P_n}{2\pi} \frac{a-r_0 \cos \varphi}{r_0^2+a^2-2ar_0 \cos \varphi} = - \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r=a}. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказано, что граничное условие задачи (14) выполняется, т.е. (17) является решением задачи (14) для круга.

Численное исследование прямой задачи

Численное исследование прямой задачи проводилось для случая одной звездной области непроницаемости, контур S которой задан в полярных координатах $r=r(\varphi)$. В этом случае ядро интегрального уравнения (16) можно представить в виде

$$-K(M, M_0) = \frac{K(\varphi, \varphi_0)}{2 \cdot l(\varphi)} \quad \text{при } M=(r(\varphi), \varphi); M_0=(r(\varphi_0), \varphi_0) \quad (20)$$

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{\rho^2(\varphi, \varphi_0)} \{ (r(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi_0) \cos \varphi_0) \cdot (r(\varphi) \cos \varphi + r'(\varphi) \sin \varphi) +$$

$$+ (r(\varphi) \sin \varphi - r(\varphi_0) \sin \varphi_0) \cdot (r(\varphi) \sin \varphi - r'(\varphi) \cos \varphi) \},$$

$$\text{где } l(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2},$$

$$\rho^2(\varphi, \varphi_0) = r^2(\varphi) + r^2(\varphi_0) - 2r(\varphi)r(\varphi_0)\cos(\varphi - \varphi_0). \quad (21)$$

После преобразования получаем, окончательно, ядро интегрального уравнения:

$$K(\varphi, \varphi_0) = \frac{1}{\rho^2(\varphi, \varphi_0)} \left\{ r^2(\varphi) - r(\varphi_0) \left[r(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_0) + r'(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0) \right] \right\}. \quad (22)$$

Заметим, что ядро интегрального уравнения не имеет особенностей при совпадении аргументов:

$$K(\varphi, \varphi_0) \rightarrow \frac{r^2(\varphi) + 2r'(\varphi)r(\varphi) - r(\varphi)r''(\varphi)}{2l^2(\varphi)} \text{ при } \varphi_0 \rightarrow \varphi.$$

Правая часть интегрального уравнения (16) равна

$$f(M) = -\frac{f(\varphi)}{2l(\varphi)},$$

M – точка с координатами $(r(\varphi), \varphi)$, M_n – точка с координатами (R_n, φ_n) , где $f(\varphi) = K(\varphi, \varphi_n)$, при $r(\varphi_n) = R_n$, или

$$f(\varphi) = \frac{r^2(\varphi) - R_n(r(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_n) + r'(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_n))}{r^2(\varphi) + R_n^2 - 2R_nr(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_n)}. \quad (23)$$

Учитывая, что $dl_{M_0} = l(\varphi_0)d\varphi_0$, можем записать интегральное уравнение

(16) в виде:

$$\pi \mu(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) \mu(\varphi_0) \frac{l(\varphi_0)}{l(\varphi)} d\varphi_0 = -\frac{f(\varphi)}{l(\varphi)}. \quad (24)$$

Если ввести новую неизвестную $U(\varphi) = \mu(\varphi)l(\varphi)$ получим интегральное уравнение:

$$\pi U(\varphi) + \int_0^{2\pi} K(\varphi, \varphi_0) U(\varphi_0) d\varphi_0 = -f(\varphi). \quad (25)$$

Необходимые для обратной задачи данные, согласно (15), вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} P^n(M) - u_0(M) &= u^{(n)} = \\ &= P_0 + \frac{P_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\varphi) \ln \frac{R_{m-1}^2 + r^2(\varphi) - 2R_{m-1}r(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_{m-1})}{R_m^2 + r^2(\varphi) - 2R_mr(\varphi)\cos(\varphi - \varphi_m)} d\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Расчеты проводились для случая, когда контуром C является эллипс:

$$r(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (21)$$

где a, b – полуоси эллипса, а $\varepsilon = b/a$ – эксцентриситет эллипса. При этом считалось, что точки измерения и возбуждения находятся на окружности радиуса R_u , т.е. $R_m = R_u$ для любого m . Поэтому результаты расчета $u^{(n)}$ зависят от безразмерного параметра $\varepsilon = b/a$, места расположения источника φ_n и измерения φ_m .

На рисунке 1 приведены значения давления $u^{(n)}$ в зависимости от φ_m при различных значениях φ_n при $\varepsilon = 0,5$, $R_u = 3$.

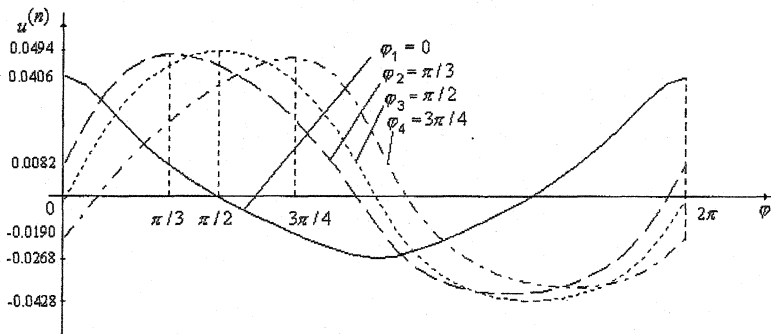


Рис.1

Для исследования чувствительности измеряемых величин к положению и размерам области непроницаемости, проводились расчеты значений $u^{(n)}$ в m точках окружности радиуса $R_u = 3$. При различных формах эллипса (меняется эксцентриситет ε), вычислялась величина $q(\varepsilon) = u_{\min}^{(n)} / u_{\max}^{(n)}$, где $u_{\min}^{(n)}, u_{\max}^{(n)}$ – минимальное и максимальное значения $u^{(n)}$ в точках измерения соответственно.

На рисунке 2 приведены графики зависимости q от ε при различных положениях источника: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2, \varphi_3 = 3\pi/4$.

Источники и приемники расположены на окружности радиуса $R_u = 3$. Результаты расчетов при $\varepsilon = 1$, т.е. когда область непроницаемости принимает форму круга, для различных положений источников совпадают.

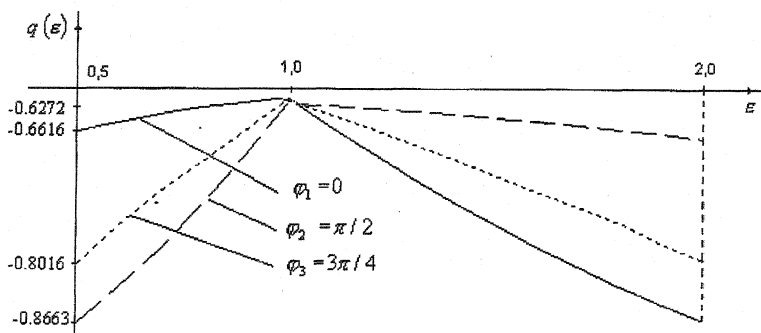


Рис. 2

Из приведенных рисунков видна чувствительность измеряемых величин к положению и размерам области непроницаемости.

Для проверки точности решения прямой задачи, проводилось сравнение численных расчетов для области непроницаемости, имеющей форму круга по формуле (17) и решение, полученное с использованием интегрального уравнения (16) и формулы (15). Проведенное исследование показало, что давление, вычисленное с использованием аналитического решения задачи и полученное с использованием интегрального уравнения, совпадают с достаточно большой точностью (погрешность вычислений составляет менее 0,0001%).

На Рис. 3 изображены результаты решения модельной обратной задачи.

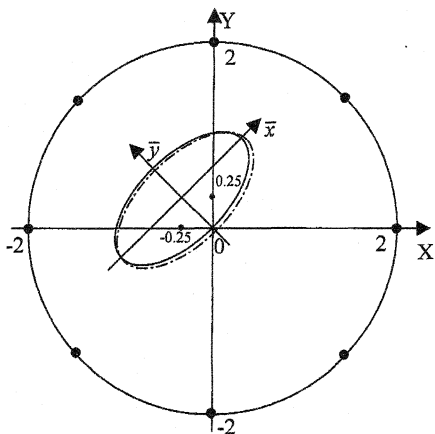


Рис. 3

На Рис. 3 сплошной линией показано точное расположение эллиптической неоднородности, пунктирной линией – восстановленное расположение неоднородности для давления с внесенной погрешностью 2,5%.

При решении модельной задачи источник располагался в скважине с координатами $(0.0, 2.0)$, в семи скважинах, расположенных на окружности с радиусом 2.0 и шагом $\pi/4$ проводилось измерение давления, эллиптическая неоднородность имела параметры $a = 1.5$, $b = 0.8$, $\theta = \pi/4$ – угол поворота эллипса, с центром $(-0.25, 0.25)$.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. М.: Наука, 1972.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. М.: Изд-во Моск. Унта, 2004.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.