***В.П. Горьков, В.А. Андрианов***

# ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ СТРИПОВОГО ДЕТЕКТОРА С ДВУМЯ ТУННЕЛЬНЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

## Введение

Криогенные детекторы на основе сверхпроводящих туннельных переходов (СТП-детекторы) обладают высоким разрешением по энергии и низким энергетическим порогом регистрации. Для рентгеновского излучения энергетическое разрешение СТП-детекторов более чем на порядок превосходит разрешение традиционных полупроводниковых детекторов [1]. В оптическом диапазоне СТП-детекторы способны регистрировать отдельные световые кванты [2]. Однако, существует целый ряд физиических процессов, ведущих к ухудшению характеристик детекторов и, прежде всего, их энергетического разрешения [3]. Существенным недостатком СТП- детекторов являются их малые рабочие площади. Для увеличения площади разрабатываются матрицы детекторов.

В [4] была предложена альтернативная конструкция СТП-детектора. Она получила название стрипового детектора. Он состоит из длинной сверхпроводящей полоски, которая на концах заканчивается ловушками квазичастиц и туннельными переходами (рис.1). Фотон, поглощенный в сверхпроводящей полоске, генерирует неравновесные квазичастицы, число которых пропорционально его энергии. Квазичастицы диффузионно распространяются по полоске-поглотителю и при достижении ее концов захватываются в области ловушек. Там они туннелируют, образуя сигналы детектора $Q_l$ и $Q_r$ пропорциональные числу квазичастиц, попавших в ловушки. Поскольку величины $Q_l$ и $Q_r$ зависят от места поглощения фотона, они несут информацию и о месте поглощения. Стриповые детекторы рассматриваются как наиболее перспективные для создания прецизионных детекторов фотонов в рентгеновской и оптической области энергий [5]. Имея множество пар чисел $\{Q_l, Q_r\}$ при случайных попаданиях фотонов в полоску детектора, нужно указать алгоритм оценки энергии фотонов и точность этой оценки.

В [4,6,7] рассматривались одномерные модели стриповых СТП- детекторов. В настоящей работе представлена двумерная модель, в которой рассмотрено влияние на энергетическое разрешение таких факторов как геометрические размеры полоски-поглотителя, потери квазичастиц в

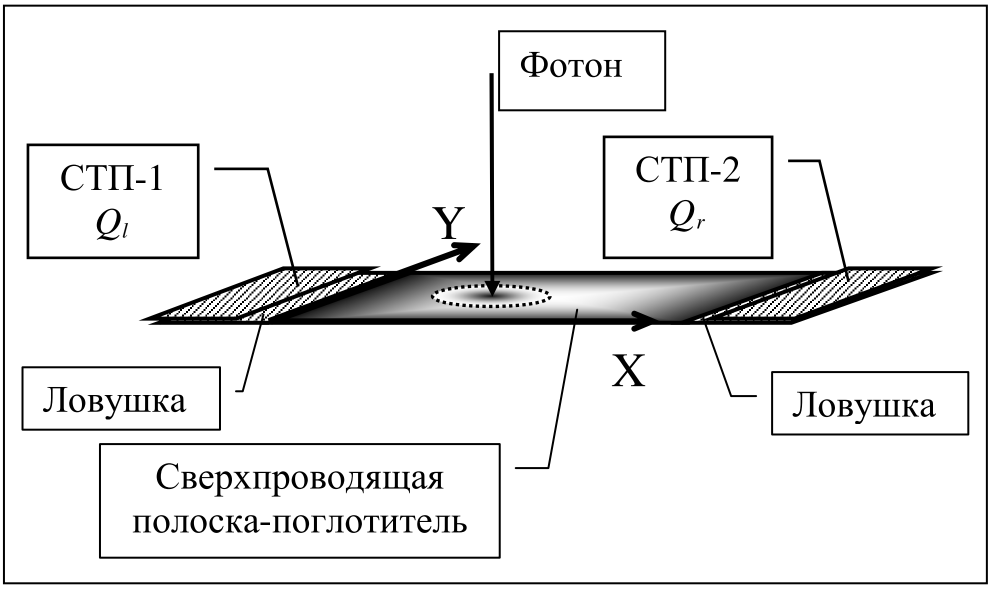


Рис.1. Стриповый СТП-детектор с двумя сверхпроводящими туннельными переходами.

области полоски-поглотителя и на её боковых границах, эффективность захвата квазичастиц в область туннельного перехода, а также процессов собственной рекомбинации квазичастиц.

## Постановка задачи

Полагаем, что облако неравновесных квазичастиц в области полоски-поглотителя характеризуется концентрацией $u(x, y, t)$. Функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \gamma u - Ru^2, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t < \infty \qquad (1)$$

с однородными граничными условиями третьего рода при $x = 0$ и $x = a$

$$Du_x(a, y, t) = -\beta_1 u(a, y, t), \qquad Du_x(0, y, t) = \beta_1 u(0, y, t) \qquad (2)$$

при $y = 0$ и $y = b$

$$Du_y(x, 0, t) = \beta_2 u(x, 0, t), Du_y(x, b, t) = -\beta_2 u(x, b, t). \qquad (3)$$

Начальное условие задается функцией

$$u(x, y, 0) = N_0 \varphi(x, y). \qquad (4)$$

Здесь $D$ – коэффициент диффузии, $\gamma$ – коэффициент поглощения частиц в полоске-поглотителе, $R$ – коэффициент рекомбинации квазичастиц, $N_0$ – число квазичастиц, образовавшихся при поглощении фотона в точке $(x_0, y_0)$.

В нашей модели часть квазичастиц, достигающих границ $x=0$ и $x=a$, выходят из области полоски и попадают в ловушки, где туннелируют, образуя сигналы детектора $Q_l$ и $Q_r$. Эфективность захвата квазичастиц в ловушку определяется коэффициентом $\beta_1$ и краевыми условиями (2). Сигнал на левом конце полоски вычисляется по формуле

$$Q_l = D\int_0^\infty dt\int_0^b u_x(0,y,t)dy, \tag{5}$$

а на правом –

$$Q_r = -D\int_0^\infty dt\int_0^b u_x(a,y,t)dy. \tag{6}$$

Коэффициент $\beta_2$ определяет потери частиц на боковых границах при $y=0$ и $y=b$ согласно условию (3).

Область полосы $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ покроим сеткой с шагами $\hat{h}_x$ и $\hat{h}_y$, в узлы которой $x_0 = i\cdot\hat{h}_x, y_0 = j\cdot\hat{h}_y, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$ будем направлять падающие фотоны. В результате счета по формулам (5-6) будем иметь $n\times m$ пар $(Q_l, Q_r)$ сигналов детектора и на этих значениях проанализируем влияние различных параметров на работу детектора.

## Точечный источник

Решение задачи (1)-(4) для случая точечного источника $\varphi(x,y)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ и отсутствия рекомбинации квазичастиц $(R=0)$ можно получить методом разделения переменных [8]. Оно имеет вид:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} X_n(x)\cdot Y_m(y)\cdot T_{nm}(t), \tag{7}$$

$$X_n(x)=\cos(\lambda_n x)+\frac{\beta_1}{D\lambda_n}\sin(\lambda_n x),\ \ Y_m(y)=\cos(\mu_m y)+\frac{\beta_2}{D\mu_m}\sin(\mu_m y),$$

$$T_{nm}(t)=e^{-t\left(\gamma+D\left(\lambda_n^2+v_m^2\right)\right)}, \qquad A_{nm}=N_0\frac{X_n(x_0)}{\|X_n\|^2}\frac{Y_m(y_0)}{\|Y_m\|^2},$$

$$\|X_n\|^2=\frac{a(\lambda_n^2+\beta_1^2)+2\beta_1\alpha}{2\lambda_n^2}, \qquad \|Y_m\|^2=\frac{b(\mu_m^2+\beta_2^2)+2\beta_2}{2\mu_m^2},$$

где $\lambda_n$ и $\mu_m$ - положительные корни уравнений

$$ctg(\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right), \qquad ctg(\mu)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{g}-\frac{g}{\mu}\right).$$

Выражения для собираемых зарядов (5) и (6) для третьей краевой задачи имеют вид:
для левого конца

$$Q_l(x_0, y_0) = 2N_0 ha \cdot gb \sum_n \frac{X_n(x_0)}{\|X_n\|^2} \sum_{m'} \frac{Y_m(y_0)}{\|Y_m\|^2} \frac{1}{\nu_m^2 \left( \frac{a^2}{\Lambda^2} + u_n^2 + \nu_m^2 r_{ab}^2 \right)}, \qquad (8)$$

для правого конца

$$Q_r(x_0, y_0) = 2N_0 ha \cdot gb \sum_n \frac{(-1)^{n+1} X_n(x_0)}{\|X_n\|^2} \sum_{m'} \frac{Y_m(y_0)}{\|Y_m\|^2} \frac{1}{\nu_m^2 \left( \frac{a^2}{\Lambda^2} + u_n^2 + \nu_m^2 r_{ab}^2 \right)}. \qquad (9)$$

Здесь введены безразмерные параметры $u_n = \lambda_n a$, $\nu_m = \mu_m b$, $h = \dfrac{\beta_1 a}{D}$,

$g = \dfrac{\beta_2 b}{D}$, $\alpha = \dfrac{a}{\Lambda}$, $r_{ab} = \dfrac{a}{b}$, суммирование проводится по нечетным $m'$.

Параметр $\Lambda = \sqrt{\dfrac{D}{\gamma}}$ представляет диффузную длину.

Если потери квазичастиц на боковых границах полоски отсутствуют $(g = 0)$, то сигналы детектора не зависят от координаты $y_0$. При этом (8) и (9) преобразуются в выражения, зависящие только от $x_0$ [6]:

$$Q_l(x_0) = N_0 \frac{\sinh\alpha(1 - x_0/a) + \varepsilon\cosh\alpha(1 - x_0/a)}{(1+\varepsilon^2)\sinh(\alpha) + 2\varepsilon\cosh(\alpha)}, \qquad (10)$$

$$Q_r(x_0) = N_0 \frac{\sinh\alpha(x_0/a) + \varepsilon\cosh\alpha(x_0/a)}{(1+\varepsilon^2)\sinh(\alpha) + 2\varepsilon\cosh(\alpha)}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{\alpha}{h}. \qquad (11)$$

Если на границах $x = 0$ и $x = a$ параметр $h \to \infty$ ($\varepsilon = 0$), то выражения (10) и (11) принимают вид [4]:

$$Q_l(x_0) = N_0 \frac{\sinh\alpha(1 - x_0/a)}{\sinh\alpha} \text{ и } Q_r(x_0) = N_0 \frac{\sinh\alpha(x_0/a)}{\sinh\alpha}. \qquad (12)$$

Для изучения влияния параметров $\alpha$, $h$ и $g$ на характеристики детектора были рассчитаны $Q_l$ и $Q_r$, а также заряд $Q_\Sigma = Q_l + Q_r$ для различных координат поглощения фотона ($x_0$,$y_0$). На рис. 2. представлены результаты расчета при g=0, $\alpha = 1$ и $\varepsilon = 0$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют наборам $Q_l(x_0)$, $Q_r(x_0)$ и $Q_\Sigma(x_0)$ в зависимости от координаты поглощения кванта $x_0$. При увеличении параметра $\alpha$ $Q_\Sigma(x_0)$ опускается вниз (кривая 4). Уменьшение параметра $h$ приводит к уменьшению $Q_\Sigma(x_0)$ (кривая 7).

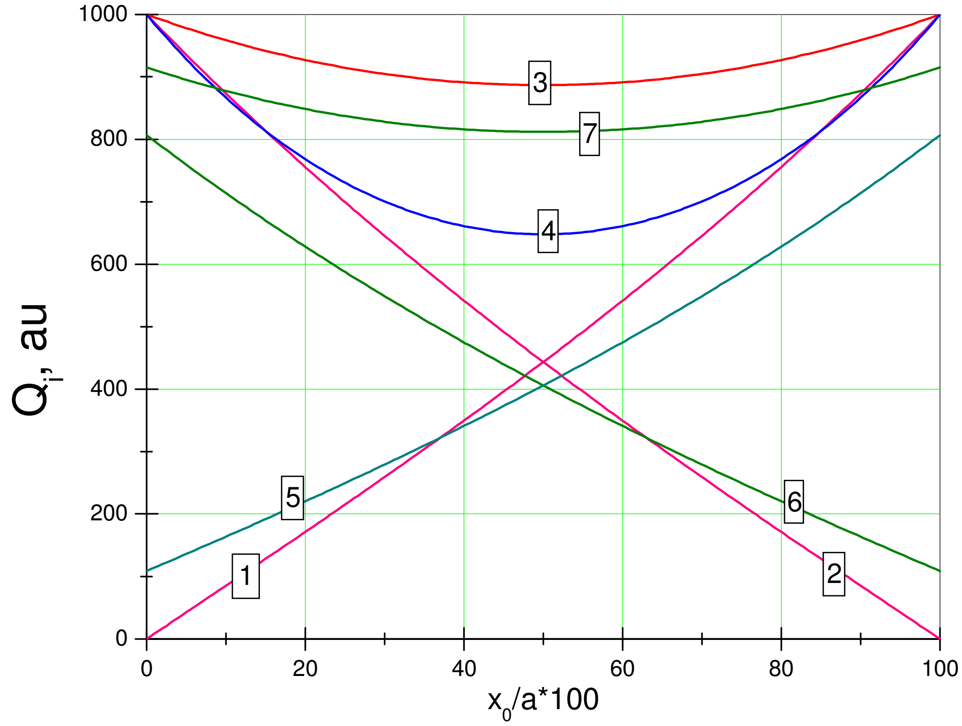


**Рис. 2.** Сигналы детектора $Q_l$, $Q_r$ и суммарный сигнал $Q_\Sigma$ в зависимости от координаты поглощения кванта $x_0$ при $g=0$, $R=0$. Кривые 1, 2 и 3 – $\alpha=1$, $\varepsilon=0$; кривая 4 – $\alpha=2$, $\varepsilon=0$; кривые 5, 6 и 7 – α=1, $\varepsilon=0.02$.

При учете краевых потерь ($g \neq 0$) возникает зависимость сигналов от координаты $y_0$.На рис. 3 приведен 3-х мерный график суммарного сигнала $Q_\Sigma$ от координат $(x_0, y_0)$. При фиксированном $x_0$ максимальный сигнал образуется при поглощении фотона в центре полосы ($y_0 = b/2$). На рис. 4 приведены расчетные зависимости $Q_\Sigma$ от координаты $x_0$ для различных значений $g$. Кривая 1 соответствует малым краевым потерям ($g=0.01$) и практически совпадает с одномерным случаем. Увеличение параметра $g$ приводит к уменьшению и к размытию $Q_l$, $Q_r$,

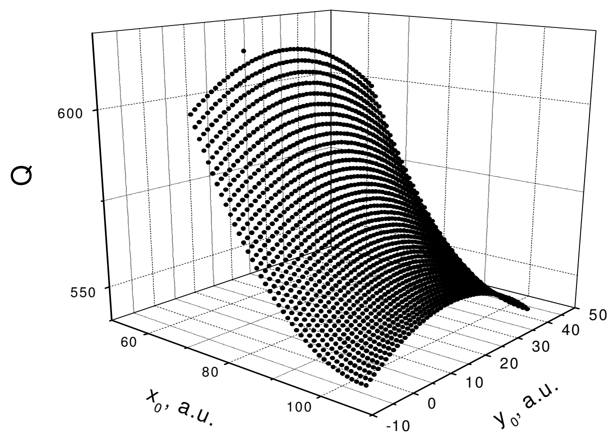


Рис. 3. 3-х мерное изображение зависимости суммарного заряда $Q_\Sigma$ от координат поглощения кванта $(x_0,y_0)$ (фрагмент).

и $Q_\Sigma$, которые отображаются областями значений (области 2 и 3). На вставке рис. 4 часть области 3 приведена в увеличенном масштабе. Зависимость $Q_\Sigma$ от $y_0$ изображается вертикальными отрезками.

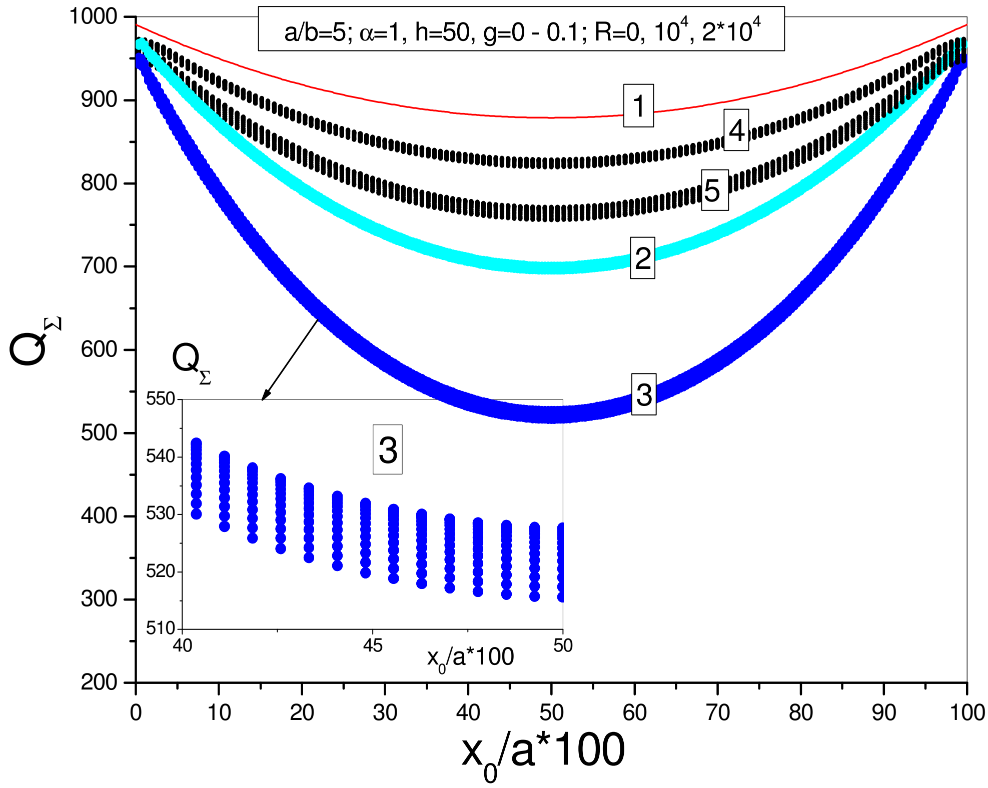


Рис.4. Зависимость суммарного заряда $Q_\Sigma$ от координаты поглощения кванта $x_0$. Расчеты выполнены при $a/b = 5$, $N_0 = 10^3$, $h = 50$. 1) $g = 0$, $R = 0$; 2) $g = 0.04$, $R = 0$; 3) $g = 0.1$, $R = 0$; 4) $g = 0.002$, $R = 10^4$, $a_0 = 0.03a$; 5) $g = 0.002$, $R - 2\cdot 10^4$, $a_0 = 0.03a$.

## Учет рекомбинационных потерь

Для учета рекомбинационных потерь решение уравнения (1) и расчет собираемых зарядов $Q_l$ и $Q_r$ проводились численными методами. Начальное распределение квазичастиц задавалось гауссовой функцией:

$$u(x, y, 0) = \frac{N_0}{2\pi a_0 ab} \exp\left(\frac{-(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{2a_0^2}\right) \tag{14}$$

где $a_0$ – радиус начального распределения квазичастиц. Отметим, что распределенный источник квазичастиц необходим для правильного учета рекомбинационных потерь.

В расчетах использовались сеточные методы [9]. Дифференциальные операторы заменялись разностными. Использовалась согласованная сетка по оси $x$ с шагом $h_x$ и по оси $y$ с шагом $h_y$, сетка по переменной $t$ с шагом $\tau$. Оператор Лапласа аппроксимировался на пятиточечном шаблоне. Производные по пространственным переменным в точке заменялись второй разностной производной, а производная по времени – первой. Для нахождения решения на следующем слое использовалась явная схема. В результате получались разностные уравнения для сеточных функций $u_{ij}^{k+1}$. Разностные выражения имели точность аппроксимации $O\left(\tau + h_x^2 + h_y^2\right)$. Детальные выражения для разностных уравнений и граничных условий приведены в работе [10].

Выражения (5)-(6) для собираемых зарядов имели вид

$$Q_l = D\tau \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n-1} \left(u_{1j}^k - u_{0j}^k\right) h_x h_y, \quad Q_r = D\tau \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n-1} \left(u_{n-1j}^k - u_{nj}^k\right) h_x h_y. \quad (15)$$

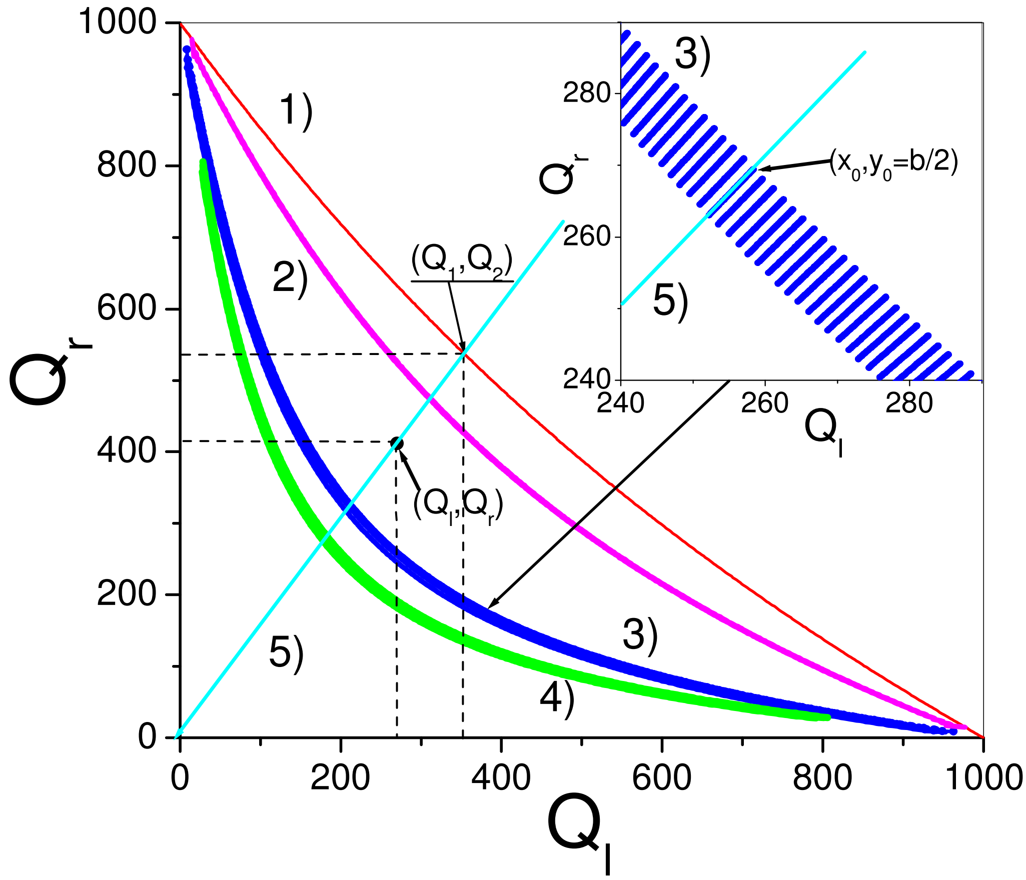


Рис. 5. Диаграмма $Q_l, Q_r$ для $a/b = 5$, $\alpha = 1$, $N_0 = 10^3$: 1) $\varepsilon = 0, g = 0$; 2) $\varepsilon = 0.02, g = 0.01$; 3) $\varepsilon = 0.02, g = 0.1$; 4) $\varepsilon = 0.1, g = 0.1$. Прямая 5 – значения ($Q_l, Q_r$), полученные при поглощении фотонов разных энергий в точках с определенным значением $x_0$.

Выбор шага по времени $\tau$ проводился из условия

$$\max\left(\frac{D\tau}{h_x^2},\frac{D\tau}{h_y^2}\right) < 1/4 . \qquad (16)$$

Оно обеспечивает сходимость итерационного процесса для линейных уравнений [9]. Тем более это условие обеспечит сходимость итераций для нелинейного уравнения (1). Поскольку квазичастицы в начальные моменты времени локализованы в малой области $a_0 << a$, то величины $h_x$ и $h_y$ выбирались достаточно малыми $(<< a_0)$. Для выполнения неравенства (16) при больших значениях $D$ требовались малые интервалы $\tau$. Соответственно, задача требовала длительного счета. Для сокращения затрат времени шаг по пространству и времени изменялся в процессе счета. На первом этапе расчеты велись с мелкими шагами $\tau, h_x, h_y$, затем, когда пространственное распределение квазичастиц становилось более гладким, шаги $\tau, h_x, h_y$ увеличивались. Выполнение соотношения (16) обеспечивалось на всех этапах счета.

Расчеты сигналов стрипового СТП-детектора были выполнены для различных значений константы рекомбинации $R$, граничных параметров $g$ и $h$. Отметим, что для случая нулевой рекомбинации ($R = 0$) было проведено сравнения численных расчетов и расчетов по аналитическим выражениям. Сравнение показало, что численные расчеты воспроизводят данные аналитических методов с точностью не хуже 0.2 %.

В целом, влияние собственной рекомбинации неравновесных квазичастиц на сигналы детектора аналогично влиянию граничных потерь. Учет рекомбинации приводит к зависимости сигнала от координаты $y_0$ и к уменьшению сигналов $Q_l$, $Q_r$ и $Q_\Sigma$. На рис. 4 приведены расчетные сигналы $Q_\Sigma$ от координаты $x_0$ для 2-х значений константы рекомбинации R (области 4 и 5). Из рисунка видно, что рекомбинация сдвигает $Q_\Sigma(x_0)$ вниз и усиливает прогиб в центре полосы. С ростом $R$ уширение областей 4 и 5 усиливается.

## Форма спектральной линии

Изложим основную идею стриповых детекторов. При облучении идеальной полоски $(\alpha = 0, \varepsilon = 0, g = 0)$ моноэнергетическими фотонами с энергией $E_0$ имеем выражения $Q_l(x_0) = N_0(1 - x_0/a)$, $Q_r(x_0) = N_0 x_0/a$, которые следуют из (12). Видно что

$$Q_l(x_0) + Q_r(x_0) = N_0 . \qquad (17)$$

На диаграмме $Q_l, Q_r$ формула (17) определяет отрезок прямой линии, проходящий через точки $(0, N_0)$ и $(N_{0,} 0)$. Прямая линия, проведенная из начала координат и пересекающая построенный отрезок, даёт набор $(Q_l, Q_r)$ в точке $x_0$. Наборы $(Q_l^{'}, Q_r^{'})$ в точке $x_0$, соответствующие другим энергиям, будут располагаться на этой прямой.

Выполним постепенный переход к реальным детекторам. Учтем объемные потери квазичастиц в полоске $\alpha \neq 0$ $(\varepsilon = 0, g = 0)$. Результаты счета можно представить кривой 1 (рис. 5), которая симметрична относительно биссектрисы прямого угла и своими концами упирается в точки $(0, N_0)$ и $(N_0, 0)$. При учете эффективности туннельных переходов $\varepsilon \neq 0, (\alpha \neq 0, g = 0)$, расчеты дадут кривую 2, которая своими концами уже не доходит в точки $(0, N_0)$ и $(N_{0,} 0)$. Во всех этих случаях результаты счета не зависят от $y_0$. Если в потоке излучения, падающего на полоску, присутствуют фотоны разных энергий $E_i, i = \overline{1, k}$, то на диаграмме $Q_l, Q_r$ будут присутствовать $k$ «параллельных» кривых. Следовательно, каждой точке $(Q_l, Q_r)$ на диаграмме можно сопоставить определенное значение энергии $E$ и таким образом откалибровать плоскость по энергии.

Учет потерь на боковой границе $g \neq 0$, $\alpha \neq 0, \varepsilon \neq 0$ превращает набор $\{Q_l, Q_r\}$ в некую область вследствие появляющейся зависимости элементов от координаты $y_0$ (кривые 3 и 4 на рис. 5). Коэффициент рекомбинации $R$ дополнительно изменяет величины элементов набора.
Все элементы набора $\{Q_l, Q_r\}$ отвечают энергии $E_0$, но изображенные на калиброванной диаграмме $Q_l, Q_r$ они будут располагаться в точках с различными значениями $E$. В результате такого подхода получим распределение фотонов по энергии $E$. В реальном детекторе каждый элемент $(Q_l, Q_r)$ фиксируется с погрешностями, определяемыми характеристиками регистрирующей аппаратуры. Положим, что погрешности измерений одинаковы и равны $\Delta Q_l = \Delta Q_r = \Delta Q$. Тогда оценка величины $E$ по измеренным значениям $(Q_l, Q_r)$ будет содержать ошибку $\Delta E$. Величина ошибки будет зависить от координат и определяться выражением

$$\Delta E(x_0, y_0) = \left| \frac{\partial E(Q_l, Q_r)}{\partial Q_l} \right| \Delta Q + \left| \frac{\partial E(Q_l, Q_r)}{\partial Q_r} \right| \Delta Q . \tag{18}$$

Расчеты показывают, что $\Delta E(x_0, y_0)$ принимает минимальные значения при постоянном $y_0$ в точке $x_0 = a/2$.

Если учесть, что интенсивность падающего излучения по энергии представляет случайную величину, распределенную по нормальному закону $N(E,\sigma)$, спектральную линию детектора можно записать в виде

$$s(E) = \frac{1}{2\pi \cdot ab}\int_0^a\int_0^b \frac{dx_0 dy_0}{\sigma(x_0, y_0)} \exp\left\{\frac{(E - E(x_0, y_0))^2}{2\sigma^2(x_0, y_0)}\right\}, \qquad (19)$$

где интеграл берется по площади полоски. Принято, что стандарт отклонения $\sigma$ равен погрешности $\Delta E$.

На рис. 6 приведены спектральные линии стриповых СТП-детекторов, рассчитанные с помощью выражения (19). При отсутствии зависимости сигнала от координаты $y_0$ $(g = 0, R = 0)$ спектральная линия имеет форму близкую к гауссовой (кривая 1). При $g \neq 0$ или $R \neq 0$ спектральная линия приобретает асимметричную форму с характерным уступом в сторону малых энергий (кривые 2-5). В случае рекомбинационных потерь уширение линии увеличивается вместе с $R$ (кривые 4-5). Уширение спектральной линии возрастает при уменьшении начального радиуса $a_0$ и увеличении ширины полосы $b$ (кривые 4-5). Можно сделать вывод, что краевые потери и рекомбинация квазичастиц вызывают искажение формы спектральной линии, и, следовательно, ухудшают энергетическое разрешение СТП-детекторов.

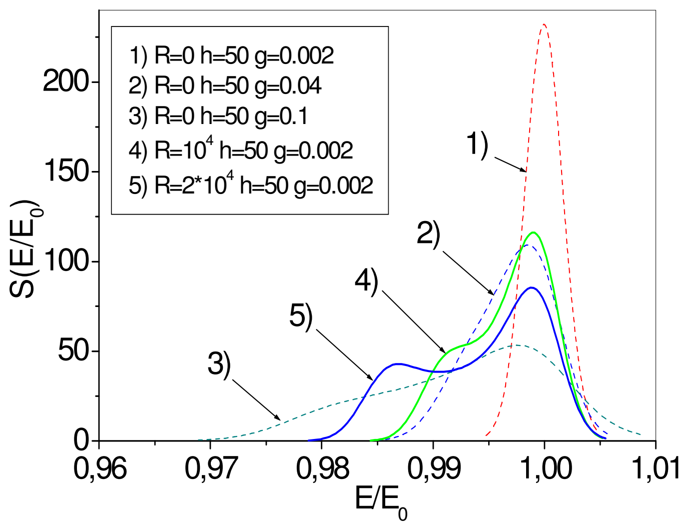


Рис.6. Форма спектральной линии стриповых СТП-детекторов при $a/b = 5, N_0 = 10^3, \alpha = 1$.

## Литература


1. Friedrich S. Superconducting tunnel junction photon detectors: theory and application // J.Low Temp.Phys. 2008, Vol. 151, P. 277-286.

2. Verhoeve P., Martin D.D.E., Hijmering R.A., Verveer J., van Dordrecht A., Sirbi G., Oosterbroek T., Peacock A. S-Cam 3: Optical astronomy with a STJ-based imaging spectrophotometer // NIM Phys. Res. A 2006, Vol. 559, P. 598.
3. Андрианов В.А., Горьков В.П., Кошелец В.П., Филиппенко Л. В. Сверхпроводящие туннельные детекторы рентгеновского излучения. Вопросы энергетического разрешения // Физика и техника полупроводников. 2007, Т. 41, № 2, с.221-228.
4. Kraus H, v. Feilitzsch F., Jochum J., Mossbauer R.L., Peterreins Th., Probst F. Quasiparticle trapping in a superconductive detector system exhibiting high energy and position resolution // Phys. Let. B 1989,Vol.231, P.195-202.
5. Hijmering R. A., Verhoeve P., Martin D. D. E., Peacock A., Kozorezov A. G., Venn R. Imaging spectroscopy with Ta/Al DROIDs: Performance for different absorber lengths //NIM Phys. Res. A 2006, Vol. 559, P. 692–694.
6. Jochum J., Kraus H., Gutsche M., Kemmather B., von Feilitzsch F. and Mossbauer P.L. Dynamics of radiation induced quasiparticles in superconducting tunnel junction detectors //Annalen der Physik, 1993, Vol. 2, P. 611-634.
7. Ejrnaes M., Nappi C., Cristiano R. Dynamics of nonequilibrium quasiparticles in a double superconducting tunnel junction detector// Supercond. Sci. Technol. 2005, 18, P. 953–960.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Методы математической физики. М.: Наука, 1972.
9. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
10. Андрианов В.А., Горьков В.П. Диффузионная модель детекторов на основе сверхпроводящих переходов.// Прикладная математика и информатика №19:Сб.// Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева – М.: МАКС Пресс, 2004, С. 5-20.