

А.В. Гулин

ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ*

Введение. Рассмотрим уравнение теплопроводности с нелокальными граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) &= 0, \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где γ – заданный вещественный параметр. Аппроксимируем задачу (1) разностной схемой

$$\begin{aligned} y_{t,i}^n - y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad \frac{h}{2} y_{t,N}^n + y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \mathcal{Y}_{x,0}^{(\sigma)} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначено [1] $\omega_h = \{x_i = ih\}_{i=0}^N$, $\omega_\tau = \{t_n = n\tau\}_{n=0}^K$, $y_i^n = y(x_i, t_n)$,

$$\begin{aligned} y_i^{(\sigma)} &= \sigma y_i^{n+1} + (1-\sigma) y_i^n, \quad y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}, \\ y_{\bar{x},i}^n &= \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}, \quad y_{x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h}. \end{aligned}$$

При решении (1) методом разделения переменных возникает задача на собственные значения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = 0, \quad \gamma X'(0) = X'(1). \quad (3)$$

Спектр задачи (3) существенно зависит от параметра γ . Если $|\gamma| \leq 1$, то все собственные значения вещественные и положительные. В дальнейшем будем рассматривать случай $\gamma > 1$. Не выписывая явных формул, отметим следующие свойства собственных значений и собственных функций.

1. При каждом $\gamma > 1$ существует дискретный спектр $\{\lambda_r(\gamma)\}_{r=0}^\infty$ задачи (3). Все собственные значения – различные комплексные числа. Каждому λ_r отвечает одна (с точностью до произвольного множи-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00908)

теля) собственная функция $X^{(r)}(x)$. Расположим $\lambda_r(\gamma)$ в порядке возрастания вещественных частей. Вещественным является только собственное значение $\lambda_0(\gamma) < 0$, остальные собственные значения представляют собой комплексно сопряженные числа $\lambda_{2k-1}(\gamma)$ и $\lambda_{2k}(\gamma)$ с отличной от нуля мнимой частью.

2. Самая левая точка спектра, а именно $\lambda_0(\gamma) = -\ln^2\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)$, является отрицательным числом, монотонно возрастающим по модулю с ростом γ . Для каждого $\gamma > 1$ последовательность $\{\lambda_r(\gamma)\}_{r=0}^{\infty}$ неограниченно возрастает при $r \rightarrow \infty$.

Наличие собственных значений с отрицательной действительной частью приводит к неустойчивости нестационарной задачи (1). Говорят, что задача (1) устойчива на k -й гармонике ($k = 1, 2, \dots$), если выполнено неравенство $\operatorname{Re} \lambda_{2k} \geq 0$. Для дифференциальной задачи (1) устойчивость или неустойчивость на гармониках целиком определяется спектром основного дифференциального оператора – оператора второй производной, подчиненного нелокальным граничным условиям. Для разностных схем ситуация усложняется из-за того, что устойчивость определяется не только спектром основного разностного оператора, но и спектром оператора перехода.

Спектр основного разностного оператора. Основной разностный оператор схемы (2) определяется как

$$\begin{aligned} (Ay)_i &= -y_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \\ (Ay)_N &= \frac{2}{h}(y_{\bar{x},N} - \gamma y_{x,0}). \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор A – несамосопряженный и зависит всего от двух параметров: γ и h . Оператор перехода задается как $S = E - \tau B^{-1}A$, где $B = E + \sigma \tau A$, E – тождественный оператор. Оператор перехода S зависит от четырех параметров: γ , h , τ и σ . Устойчивость или неустойчивость разностной схемы определяется именно оператором перехода.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора (4):

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x},j} + \lambda \mu_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad \mu_0 = 0, \\ \frac{2}{h}(\lambda \mu_{x,0} - \mu_{\bar{x},N}) + \lambda \mu_N &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Собственные значения и собственные векторы разностной задачи (5) можно выписать в явном виде (см. [2]). Однако для дальнейшего существенными являются не явные выражения, а свойства собственных значений и собственных векторов. Перечислим эти свойства, предполагая, что $\gamma > 1$. Для простоты изложения считаем, что число точек N кратно 4.

1. Собственные значения зависят от параметра $a = \text{ch}\left(h \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)\right)$.
2. При каждом $a > 1$ существует N различных собственных значений $\lambda_0(a), \lambda_1(a), \dots, \lambda_{N-1}(a)$, расположенных в порядке возрастания вещественных частей. Соответствующие собственные векторы обозначим как $\mu^{(0)}(a), \mu^{(1)}(a), \dots, \mu^{(N-1)}(a)$.
3. Вещественными являются только собственные значения $\lambda_0(a) < 0$, $\lambda_{N-1}(a) > 0$ и отвечающие им собственные векторы. Остальные собственные значения входят комплексно сопряженными парами. Таким образом, собственные значения $\lambda_{2k-1}(a)$ и $\lambda_{2k}(a)$ ($k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$) являются комплексно сопряженными.

Сеточные подпространства. Областью определения оператора (4) является сеточное пространство H размерности N , состоящее из комплексных векторов

$$y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^T, \quad y_i = y(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad hN = 1$$

с покоординатным сложением и умножением на число. Введем подпространства, натянутые на собственные векторы оператора A . Обозначим через $H^{(0)}(a)$ и $H^{(N/2)}(a)$ одномерные подпространства векторов, коллинеарных векторам $\mu^{(0)}(a)$ и $\mu^{(N/2)}(a)$ соответственно. Под $H^{(k)}(a)$ ($k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$) будем понимать двумерное подпространство, натянутое на комплексно сопряженные собственные векторы $\mu^{(2k-1)}(a)$ и $\mu^{(2k)}(a)$. Таким образом, все пространство H представляется в виде прямой суммы подпространств $H^{(k)}(a)$, инвариантных относительно оператора A , то есть

$$H = H^{(0)}(a) \oplus H^{(1)}(a) \oplus \dots \oplus H^{(N/2-1)}(a) \oplus H^{(N/2)}(a).$$

Подпространство $H^{(k)}(a)$ назовем *устойчивым подпространством* (относительно оператора A), если $\text{Re } \lambda_{2k}(a) \geq 0$ и неустойчивым – в противном случае. Свойство устойчивости или неустойчивости подпространства зависит как от номера k , так и от величины параметра a .

Определим возрастающую конечную последовательность

$$z_k = \sin^2(\pi kh), \quad k = 0, 1, \dots, N/2, \quad (6)$$

для которой $z_0 = 0$, $z_{N/4} = 0.5$, $z_{N/2} = 1$.

Рассмотрим также последовательность положительных чисел

$$a_k = (1 - 2z_k)^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N/4 - 1. \quad (7)$$

Доказано (см. [2]), что неравенство $\operatorname{Re} \lambda_{2k}(a) \geq 0$

1. Не выполнено при $k = 0$ и любом $a > 1$.
2. Для $k = 1, 2, \dots, N/4 - 1$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \leq a_k$.
3. Для $k = N/4, N/4 + 1, \dots, N/2$ выполнено при любом $a > 1$.

Иными словами,

1. Все пространство H неустойчиво при любом $a > 1$.
2. Подпространство $H^{(k)}(a)$ ($k = 1, 2, \dots, N/4 - 1$) устойчиво тогда и только тогда, когда $a \leq a_k$.
3. Подпространства $H^{(k)}(a)$ ($k = N/4, N/4 + 1, \dots, N/2$) устойчивы при любом $a > 1$.

Наряду с $H^{(k)}(a)$ будем рассматривать подпространства

$$H_k(a) = H^{(k)}(a) \oplus H^{(k+1)}(a) \oplus \dots \oplus H^{(N/2)}(a), \quad k = 0, 1, \dots, N/2.$$

При этом $H_0(a)$ и $H_{N/2}(a)$ совпадают с H и с $H^{(N/2)}(a)$ соответственно. Подпространство $H_k(a)$ представляет собой линейную оболочку собственных векторов $\mu^{(2k-1)}(a), \mu^{(2k)}(a), \dots, \mu^{(N/2)}(a)$ и является инвариантным подпространством оператора A .

Подпространство $H_k(a)$ назовем *устойчивым подпространством* относительно оператора A , если $\operatorname{Re} \lambda_{2l}(a) \geq 0$ для $l = k, k + 1, \dots, N/2$. Устойчивость $H_k(a)$ эквивалентна устойчивости подпространства $H^{(k)}(a)$.

Спектральная устойчивость разностной схемы. Собственные значения $s_r(a)$ оператора перехода связаны с собственными значениями $\lambda_r(a)$ основного разностного оператора равенствами

$$s_r(a) = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau \lambda_r(a)}{1 + \sigma\tau \lambda_r(a)}. \quad (8)$$

Пусть k – любое из чисел $k = 0, 1, \dots, N/2$. Назовем разностную схему (2) *спектрально устойчивой в подпространстве $H_k(a)$* , если выполнены неравенства

$$|s_{2l}(a)| \leq 1, \quad l = k, k + 1, \dots, N/2 - 1. \quad (9)$$

Поскольку $s_{2l-1}(a)$ и $s_{2l}(a)$ – комплексно сопряженные числа, условие $|s_{2l-1}(a)| \leq 1$ эквивалентно (9).

Таким образом, в отличие от [3], приняты два формально независимых определения: устойчивости подпространства и устойчивости разностной схемы в этом подпространстве.

В приведенных ниже условиях устойчивости разностной схемы фигурирует функция

$$f(a, z) = \frac{1 - a(1 - 2z)}{(1 - a - 2z)^2}, \quad a \neq 1 - 2z, \quad a > 1, \quad (10)$$

которая при $z = z_k$ равна (с точностью до положительного коэффициента) отношению $\operatorname{Re} \lambda_{2k}(a) / |s_{2k}(a)|^2$. Наряду с (10) будем рассматривать функции

$$F_k(a) = \min\{f(a, z_k), f(a, z_{N/2})\}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2. \quad (11)$$

Заметим, что $F_0(a) = f(a, z_0) = 1/(1 - a) < 0$, $F_{N/2}(a) = f(a, z_{N/2}) = 1/(1 + a)$.

Свойство устойчивости подпространства $H_k(a)$ состоит в выполнении неравенств $\operatorname{Re} \lambda_{2l}(a) \geq 0$, $l = k, k + 1, \dots, N/2$, эквивалентных условию

$$\operatorname{Re} \lambda_{2k}(a) \geq 0. \quad (12)$$

Спектральная устойчивость разностной схемы в подпространстве $H_k(a)$ означает выполнение неравенств $|s_{2l}(a)| \leq 1$, $l = k, k + 1, \dots, N/2$, эквивалентных, как показано в [3], одному неравенству

$$(2\sigma - 1)\kappa + F_k(a) \geq 0, \quad \text{где } \kappa = \tau/h^2. \quad (13)$$

Границы устойчивости. Итак, условие спектральной устойчивости в подпространстве $H_k(a)$ записывается в виде неравенства (13). *Границей устойчивости разностной схемы в подпространстве $H_k(a)$* назовем поверхность в пространстве переменных σ , $a > 1$, $\kappa > 0$, заданную равенством

$$(2\sigma - 1)\kappa + F_k(a) = 0. \quad (14)$$

В дальнейшем ограничимся отдельными сечениями поверхности (14), а именно, рассмотрим случаи $\sigma = 0$, $\sigma = 0.5$ и $\sigma = 1$.

Явная схема. При $\sigma = 0$ условие устойчивости (13) принимает вид

$$0 < \kappa \leq F_k(a). \quad (15)$$

Таким образом, в случае явной схемы из спектральной устойчивости в подпространстве $H_k(a)$ следует устойчивость самого подпространства.

Границы устойчивости в координатах (a, κ) для $N = 12$ и $k = 0, 1, \dots, 6$ изображены на рис. 1. Границей устойчивости в подпространстве $H_k(a)$ является кривая $\kappa = F_k(a)$. Область устойчивости расположена ниже этой кривой и представляет собой множество точек (a, κ) , для которых выполнено неравенство (15).

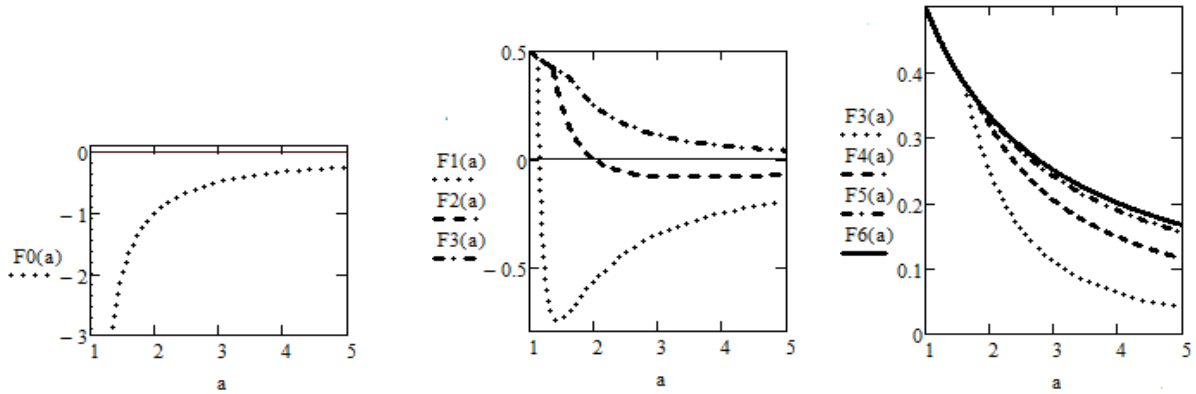


Рис. 1: Границы устойчивости в подпространствах $H_l(a)$ ($\sigma = 0$, $N = 12$)

Видно, что имеют место следующие свойства.

1. Граница устойчивости пространства $H_0(a)$ отрицательна при всех $a > 1$. Границы устойчивости в подпространствах $H_1(a)$ и $H_2(a)$ остаются положительными лишь до некоторого значения $a = a_k$, ($k = 1, 2, \dots, N/4 - 1$). Для $k = 3, 4, 5, 6 = N/2$ границы устойчивости в подпространствах $H_k(a)$ положительны при любых $a > 1$.
2. Область устойчивости каждого последующего подпространства содержит область устойчивости предыдущего подпространства. В частности, $H_0(a)$ не имеет области устойчивости, подпространство $H_1(a)$ имеет минимальную область устойчивости. Область устойчивости подпространства $H_{N/2}(a)$ содержит области устойчивости всех предыдущих подпространств.

Качественная картина, представленная на рис. 1, подтверждается непосредственными вычислениями собственных значений по формулам (8). Рассмотрим подпространство $H_1(a)$, граница устойчивости в котором определяется кривой $\kappa = F_1(a)$. Согласно (10), (11), функция $F_1(a)$ меняет знак с плюса на минус в точке $a = a_1 \approx 1.155$. Если $1 < a < a_1$, то

- схема устойчива в $H_1(a)$ при условии $\kappa < \kappa_0 = F_1(a)$,
- находится на границе устойчивости при $\kappa = \kappa_0$,
- абсолютно неустойчива в $H_1(a)$ при $\kappa > \kappa_0$.

В следующей таблице задано $a = 1.1$ и приведены модули собственных значений $|s_{2k}|$ оператора перехода, вычисленные при трех значениях κ .

Табл. 1: $N = 12$, $\sigma = 0$, $a_1 = 1.155$, $a = 1.1$, $F_1(a) = 0.476$

$k \setminus \kappa$	0.45	0.476	0.5
0	1.09	1.095	1.1
1	0.979	0.98	0.98
2	0.694	0.685	0.678
3	0.424	0.439	0.458
4	0.533	0.608	0.678
5	0.785	0.887	0.98
6	0.89	1	1.1

Второй столбец содержит модули собственных значений, соответствующих случаю $\kappa < \kappa_0$ (устойчивость в $H_1(a)$). Здесь имеется только одно собственное значение, большее 1 по модулю. Оно возникает вследствие неустойчивости нулевой гармоники при любом $a > 1$. Следующий столбец содержит модули собственных значений при $\kappa = \kappa_0$ (граница устойчивости в $H_1(a)$). Появилось одно собственное значение, а именно при $k = 6$, модуль которого в точности равен 1. Последний столбец отвечает случаю неустойчивости в $H_1(a)$, когда $\kappa > \kappa_0$. В этом случае модуль последнего собственного значения стал равным 1.1.

Приведем без комментариев еще две аналогичные таблицы, которые иллюстрируют случаи $a = a_1$ (граница устойчивости подпространства $H_1(a)$) и $a > a_1$ (неустойчивость схемы в $H_1(a)$).

Табл. 2. $N = 12$, $\sigma = 0$, $a = a_1 = 1.155$, $F_1(a) = 0.476$

□

$k \setminus \kappa$	0.001	0.01	0.1
0	1.0003094	1.003	1.031
1	1.0000002	1	1.002
2	0.9991552	0.992	0.921
3	0.9980007	0.98	0.808
4	0.9968458	0.969	0.692
5	0.9960002	0.96	0.603
6	0.9956906	0.957	0.569

Табл. 3. $N = 12$, $\sigma = 0$, $a_1 = 1.155$, $a = 1.9$, $F_1(a) = -0.604$

□

$k \setminus \kappa$	0.001	0.01	0.1
0	1.0018	1.018	1.18
1	1.00129	1.013	1.141
2	0.9999	0.999	1.029
3	0.99801	0.981	0.863
4	0.9961	0.961	0.671
5	0.99471	0.947	0.498
6	0.9942	0.942	0.42

Чисто неявная схема. При $\sigma = 1$ из (13) получаем условие устойчивости в $H_k(a)$ в виде

$$\kappa \geq -F_k(a). \quad (16)$$

Таким образом, если подпространство устойчиво, то схема устойчива в этом подпространстве при любом $\kappa > 0$. Более того, схема может оказаться устойчивой и в неустойчивом подпространстве $H_k(a)$, когда $F_k(a) < 0$. В этом случае устойчивость гарантирована при необычном условии ограниченности параметра κ снизу, а именно при условии $\kappa \geq |F_k(a)|$. Итак, при $\sigma = 1$ границей устойчивости в подпространстве $H_k(a)$ является кривая $\kappa = -F_k(a)$, а областью устойчивости – множество точек (a, κ) , расположенных выше этой кривой. Границы устойчивости для $N = 12$ и $k = 0, 1, \dots, 6$ изображены на рис. 2.

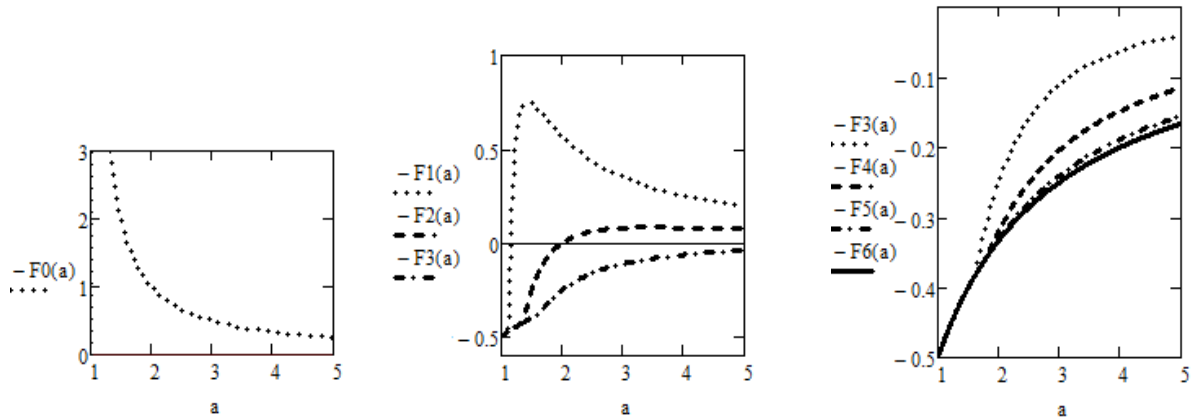


Рис. 2: Границы устойчивости в подпространствах $H_l(a)$ ($\sigma = 1$, $N = 12$)

Можно отметить следующие свойства границ устойчивости чисто неявной схемы.

1. Условие устойчивости в пространстве $H_0(a)$ ослабевает при увеличении a . Так, в случае $N = 12$ схема устойчива в $H_0(a)$ при условиях $\kappa \geq 2$, $\kappa \geq 1$ и $\kappa \geq 0.111$ при $a = 1.5$, $a = 2$ и $a = 10$ соответственно.
2. Для тех значений $a > 1$, при которых подпространства $H_1(a)$ и $H_2(a)$ устойчивы, схема устойчива при любых $\kappa > 0$. В подпространствах $H_3(a)$, $H_4(a)$, $H_5(a)$, $H_6(a)$ схема устойчива при любых $\kappa > 0$ и любых $a > 1$.

В качестве иллюстрации приведем результаты расчетов собственных значений по формуле (8) в пространстве $H_0(a)$ при $a=2$, $F_0(a)=-1$ и различных κ .

Табл. 4: $N=12$, $\sigma=1$, $a=2$, $F_0(a)=-1$

$k \setminus \kappa$	0.5	1	2
0□	4.504E + 15	1	0.333
1□	1.103	0.558	0.252
2□	0.555	0.316	0.164
3□	0.378	0.218	0.117
4□	0.298	0.171	0.092
5□	0.261	0.149	0.081
6	0.25	0.143	0.077

Таким образом, хотя пространство $H_0(2)$ и неустойчиво, схема спектрально устойчива в $H_0(2)$ при условии $\kappa > 1$. Схема неустойчива при $0 < \kappa < 1$.

Замечание. Расчеты показывают, что схема устойчива в $H_0(2)$ и при отрицательных κ . Так, при $\kappa = -0.5$ модули собственных значений следующие: 0.5, 0.516, 0.555, 0.577, 0.555, 0.516, 0.5. Если $\kappa = 2$, то модули собственных значений равны 0.2, 0.191, 0.164, 0.132, 0.108, 0.095, 0.091.

Симметричная схема и схема повышенного порядка аппроксимации. В случае $\sigma = 0.5$ условие устойчивости (13) приводит к неравенству $F_k(a) \geq 0$. Тем самым, схема спектрально устойчива в подпространстве $H_k(a)$ тогда и только тогда, когда устойчиво само подпространство. Поскольку функции $F_k(a) \geq 0$ не зависят от κ , схема устойчива при любом значении $\kappa > 0$, если только устойчиво подпространство $H_k(a)$. Границы устойчивости не существует. Графики кривых $F_k(a)$ изображены для $N = 12$ на рис. 1.

Рассмотрим еще случай, когда

$$\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\kappa}.$$

В этом случае условие устойчивости (13) принимает вид $F_k(a) \geq 1/6$. При выполнении этого условия схема устойчива в подпространстве $H_k(a)$ при

любом $\kappa > 0$. Из рис. 1 видно, что схема с $\sigma = \sigma^*$ неустойчива в $H_0(a)$ при всех $a > 1$. В остальных подпространствах $H_k(a)$ схема остается устойчивой лишь до некоторого значения $a > 1$.

Литература

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. Изд. 3, М.: Наука, 1989
2. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А. Разностные схемы для нестационарных нелокальных задач. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, 2010.
3. Гулин А. В. О спектральной устойчивости в подпространствах разностных схем с нелокальными граничными условиями. Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. № 7. С. 844-852