Раздел I.
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Ильинский А.С., Галишникова Т.Н., Бережная И.В.

Исследование характеристик отражения электромагниного поля от волнистой периодической границы раздела прозрачных сред

Данная работа продолжает исследования задач отражения поля плоской электромагнитной волны от нерегулярной границы раздела сред. Авторами разработаны различные математические модели, учитывающие геометрию границы раздела сред, близкую к проводимым натурным экспериментам [1,2]. Построены численные алгоритмы решения задач отражения поля плоской двухмерной волны как от периодической волнистой границы раздела двух прозрачных сред [3-5], так и от достаточно протяженного конечного участка взволнованной поверхности, на которой выполняются импедансные граничные условия [4]. Проведены вычислительные эксперименты для задачи отражения плоской E-поляризованной электромагнитной волны от прозрачной волнистой границы раздела сред [3]. Основой для построения численных алгоритмов является метод интегральных уравнений. В данной работе исследуются характеристики отражения и распределение магнитного поля на волнистой прозрачной периодической границе раздела сред в случае, когда падающее поле H-поляризовано.

Постановка задачи. Исследуем задачу дифракции поля двумерной плоской H-поляризованной электромагнитной волны на периодической прозрачной границе раздела двух сред. Для построения математической модели выберем декартову систему координат xyz таким образом, чтобы ось z была параллельна цилиндрической образующей поверхности раздела, периодической в направлении оси x. Пусть среда над границей (область D_1) и под границей (область D_2) определяется диэлектрическими $\varepsilon_{1,2}$ и магнитными $\mu_{1,2}$ проницаемостями соответственно. Волновые числа $k_{1,2}$ определяются по формуле $k_{1,2} = \omega\sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$, где ω - круговая частота. Будем предполагать, что ε_1 - действительное число. Зависимость от времени есть $\exp(-i\omega t)$.

Обозначим через $v_0(x,y)$ нормированное поле падающей плоской волны вида

$$v_0(x,y) = \exp(-ik_1 \sin\theta_0 x - ik_1 \cos\theta_0 y), \tag{1}$$

где θ_0 - угол между отрицательным направлением оси y и проекцией на плоскость $z=0$ направления распространения падающего поля.

Пусть $v_{1,2}(x,y) = H_z^{(1,2)}(x,y)$ - значения проекций на ось z магнитных полей в областях $D_{1,2}$ соответственно. Можно показать [6], что искомые функции $v_{1,2}(x,y)$ в областях $D_{1,2}$ удовлетворяют двухмерным уравнениям Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{1,2}^2\right) v_{1,2}(x,y) = 0. \tag{2}$$

Условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля при переходе через границу раздела сред (обозначим ее через S) записываются в виде

$$v_1(x,y) = v_2(x,y), \qquad \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial n}; \tag{3}$$

здесь $\partial/\partial n$ - производная по нормали $\mathbf{n}$, внешней к области D_1. Рассеянное поле должно удовлетворять условиям излучения, которые в области D_1 имеют вид:

$$v_1(M) = v_0(M) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m \frac{1}{\sqrt{b}} \exp\left\{i\frac{t+2\pi m}{b}x_M\right\} \exp\left\{i\sqrt{k_1^2 - \left(\frac{t+2\pi m}{b}\right)^2}\, y_M\right\}, \tag{4}$$

где $t = k_1 b \sin\theta_0$, b - период граничной поверхности, R_m - коэффициенты отражения.

С учетом геометрии структуры и характера падающего поля исследуемая во всем пространстве R^2 задача дифракции сводится к решению внутри одного периода, границу раздела в котором обозначим S_0.

Для получения интегральных уравнений используем формулы Грина и квазипериодические фундаментальные решения $g_{1,2}(M,P)$ для неоднородного уравнения Гельмгольца в областях $D_{1,2}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{1,2}^2\right) g_{1,2}(M,P) = -2\pi\,\delta(M,P). \tag{5}$$

Функции $g_{1,2}(M,P)$ определены во всем пространстве R^2, удовлетворяют условиям излучения и имеют вид [1,2,6]:

$$g_{1,2}(M,P) = \frac{i\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda_n \Delta x)\exp\left(i\gamma_n^{(1,2)}|\Delta y|\right)}{\gamma_n^{(1,2)}},$$

$$\lambda_n = (t+2\pi n)/b, \quad \gamma_n^{(1,2)} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \lambda_n^2}, \ \operatorname{Im}\gamma_n^{(1,2)} > 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{Im}\gamma_n^{(1,2)} = 0, \ \operatorname{Re}\gamma_n^{(1,2)} > 0,$$

$$M = (x_M, y_M),\ P = (x_P, y_P),\ \Delta x = x_M - x_P,\ \Delta y = y_M - y_P.$$

Исследуемая задача дифракции (1)-(4) сводится к решению системы из двух интегральных уравнений относительно неизвестных магнитных полей $v(P) = v_1(P)$, $\partial v(P)/\partial n = \partial v_1(P)/\partial n$ на S_0 в области D_1, которые записываются следующим образом [1,2]:

$$v(M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0}\left[v(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(g_2(M,P)-g_1(M,P)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}\left(g_1(M,P)-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}g_2(M,P)\right)\right]ds_P+v_0(M),\quad M\in S_0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\frac{\partial v(M)}{\partial n}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0}\left[v(P)\frac{\partial^2}{\partial n_M\partial n_P}\left(g_2(M,P)-g_1(M,P)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial v(P)}{\partial n_P}\frac{\partial}{\partial n_M}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}g_2(M,P)-g_1(M,P)\right)\right]ds_P+\frac{\partial v_0(M)}{\partial n_M},\quad M\in S_0, \tag{8}$$

где $v_0(M)$ - падающее поле (1). Система интегральных уравнений (7)-(8) решается сведением к системе линейных алгебраических уравнений, для получения которой неизвестные функции $v(P)$ и $\partial v(P)/\partial n$ приближались сплайнами первого порядка на равномерной сетке [3].

Численные результаты. Проведены исследования характеристик отражения и распределения магнитного поля на границе раздела двух прозрачных сред. Численные расчеты проводились для различных частот, углов падения плоской Н-поляризованной волны и диэлектрической проницаемости, характеризующей отражающую среду. Рассмотрены случаи, когда отраженное поле имеет как одно-, так многоволновый характер.

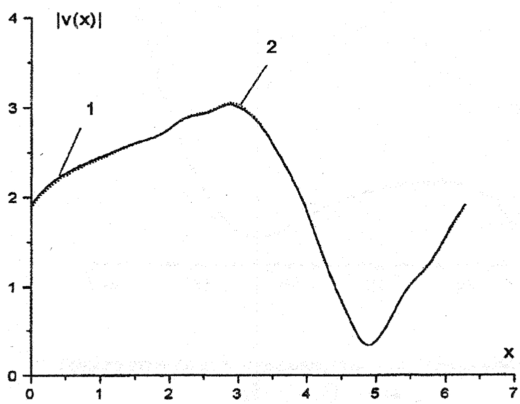

Рис. 1. Зависимость $|v(x)|_{S_0}$ от порядка системы для наклонного падения плоской волны $(k_1=0.75,\quad \theta_0=20^\circ)$

Исследованы зависимости коэффициентов отражения электромагнитного поля от угла падения плоской волны в диапазоне $0^\circ \le \theta_0 \le 89^\circ$. Детально исследованы распределение поля на границе раздела сред и поведение коэффициентов отражения в окрестности критических углов, при переходе через которые происходит перераспределение отраженного поля по гармоникам. Приведенные ниже численные расчеты выполнены для случая, когда период решетки $b = 2\pi$, контур S_0 задавался формулой $f(x) = 1 - \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$. Для задачи отражения E-поляризованной плоской волны от прозрачной границы раздела сред результаты таких исследований приведены в работе [3].

На рис. 1 показана сходимость искомого решения $|v(x)|_{S_0}$ в зависимости от порядка решаемой системы линейных алгебраических уравнений. Волновое число для среды D_1 есть $k_1 = 0.75$, диэлектрическая проницаемость среды D_2: $\varepsilon_2 = 50 + 4i$. Плоская волна падает под углом $\theta_0 = 20^\circ$, следующим сразу за критическим $\theta_{kp} = \arcsin(1/3)$. Отраженное поле содержит две распространяющиеся гармоники $(n = 0,-1)$. Кривые 1 и 2, полученные путем решения систем линейных алгебраических уравнений порядка 80 и 100, практически не отличаются, что говорит о точности численных результатов.

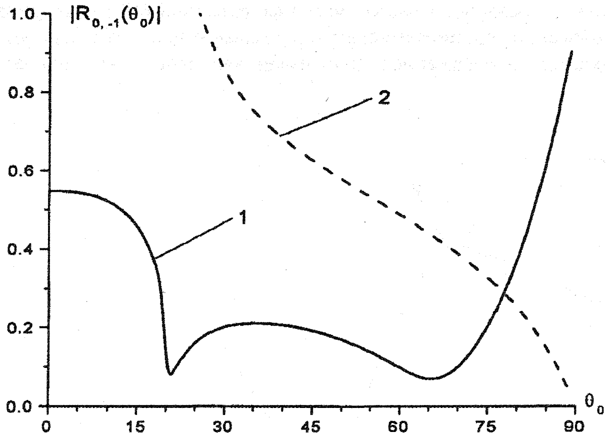

Рис. 2. Зависимость коэффициентов отражения от угла падения плоской волны $(k_1 = 0.75)$

На рис. 2 исследована зависимость коэффициентов отражения от угла падения плоской волны. Расчеты проводились для $k_1 = 0.75$, $\varepsilon_2 = 50 + 4i$. В этом случае при $\theta_0 \in [0^\circ; \theta_{kp})$ отраженное поле содержит одну распространяющуюся нулевую гармонику, при $\theta_0 \in \left(\theta_{kp};90^\circ\right)$ распространяются две гармоники $(n=0,-1)$. Угол θ_{kp} находится в окрестности $19^\circ < \theta_{kp} < 20^\circ$, где наблюдается резкое изменение значений амплитуды нулевой гармоники поля, что объясняется и значительным изменением распределения функции $\left|v(x)\right|_{S_0}$ при переходе угла падения плоской волны через θ_{kp}.

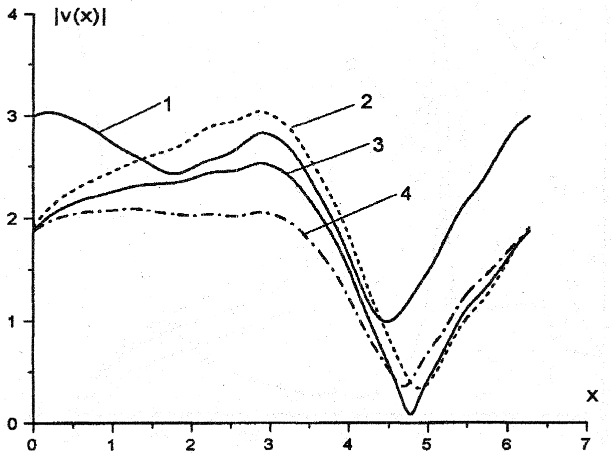

Рис. 3. Изменение распределения наводимых токов при переходе через критические углы ($k_1 = 0.75$)

На рис. 3 представлены результаты расчетов распределения $\left|v(x)\right|_{S_0}$ для $\theta_0 = 19^\circ, 20^\circ, 21^\circ, 25^\circ$ (кривые 1-4) до и после угла θ_{kp}. Кривая 1 соответствует току на S_0 до θ_{kp}, а кривые 2-4 – после θ_{kp}. Из приведенных на рис. 3 численных результатов видно, что незначительное изменение угла падения плоской волны в окрестности критических углов влечет за собой существенное изменение поведения функции $\left|v(x)\right|_{S_0}$.

На рис. 4 для $k_1 = 1.75$ и $\varepsilon_2 = 36 + 4i$ исследована частотная зависимость коэффициентов отражения от угла падения плоской волны. В отличие от результатов, приведенных на рис. 2, для рассматриваемого значения частоты распределение отраженного поля по гармоникам изменяется при переходе через 3 критических угла: $\theta_{kp,1} = \arcsin(1/7) \approx 8^\circ 12''$, $\theta_{kp,2} = \arcsin(3/7) \approx 25^\circ 21''$, $\theta_{kp,3} = \arcsin(5/7) \approx 45^\circ 35''$.

В диапазоне $\theta_0 \in [0^\circ; \theta_{kp,1})$ отраженное поле содержит 3 распространяющиеся гармоники $(n=0,\pm1)$;в диапазоне $\theta_0 \in (\theta_{kp,1}, \theta_{kp,2})$ содержит 4 распространяющихся гармоники $(n=0,\pm1,-2)$; в диапазоне $\theta_0 \in (\theta_{kp,2}, \theta_{kp,3})$ содержит 3 распространяющихся гармоники $(n=0,-1,-2)$ и наконец при $\theta_0 \in (\theta_{kp,3}, 90^\circ)$ распространяются 4 гармоники $(n=0,-1,-2,-3)$.

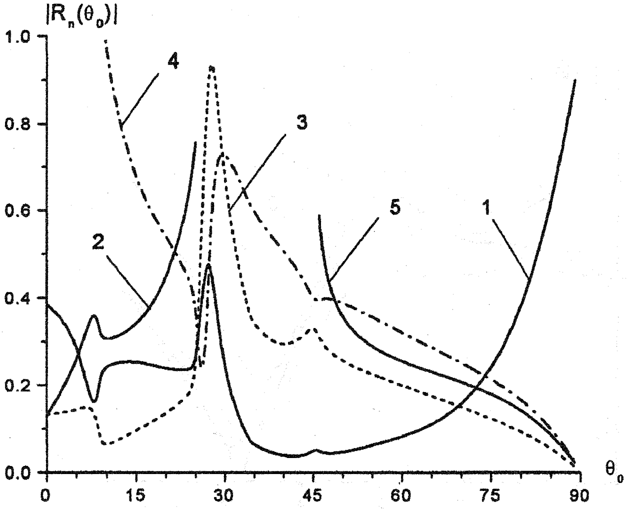

Рис. 4. Зависимость коэффициентов отражения от угла падения плоской волны $(k_1 = 1.75)$

Кривые 1-5 соответствуют $|R_i|, i=0,1,-1,-2,-3$, где R_i- амплитуды коэффициентов отражения. Как и ожидалось, вблизи критических углов плавный характер полученных кривых нарушается. Максимальное значение нулевой гармоники достигается при угле, близком к 90°.

Для тех же значений расчетных параметров, что и на рис. 4, на рис. 5 представлено изменение поведения тока при переходе через θ_{kp}. Кривые 1 и 2 соответствуют токам, когда плоская волна падает под углом до и после $\theta_{kp,1}$, т.е. $\theta_0 = 8^\circ;9^\circ$, кривые 3 и 4, 5 и 6 сответствуют углам падения плоской волны до и после $\theta_{kp,2}$ и $\theta_{kp,3}$, т.е. $\theta_0 = 25^\circ;26^\circ$ и $\theta_0 = 45^\circ;46^\circ$. Изменение угла падения на один градус в окрестности критических углов дает заметное изменение тока.

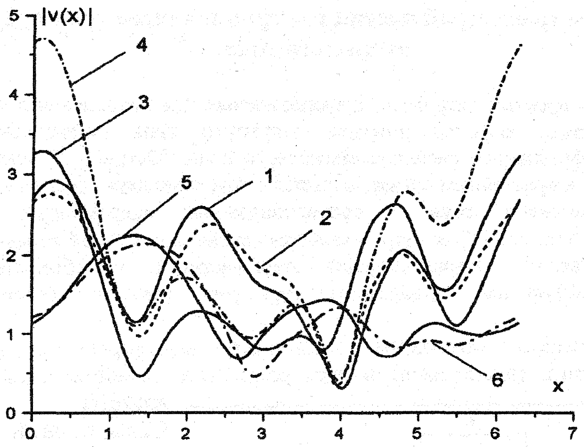

Рис. 5. Изменение распределения наводимых токов при переходе через критические углы $(k_1 = 1.75)$

Приведенные численные результаты демонстрируют высокую точность разработанного численного метода и возможность проведения вычислительных экспериментов в резонансном частотном диапазоне для расчета характеристик отражения и распределения поля на границе раздела двух прозрачных периодических сред для различных углов падения плоской волны.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (проект № 99-02-16972) и межвузовской научной программы "Университеты России – фундаментальные исследования" (проект № 990894).

Литература.

1. .Ильинский А.С., Галишникова Т.Н. Математическое моделирование процесса отражения плоской электромагнитной волны волны от волнистой поверхности // Радиотехника и электроника, 1999, т. 44, № 7. С. 773-786.

2. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Рассеяние плоской волны на волнистой поверхности // Математические модели естествознания. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 86-111.

3. Ильинский А.С., Галишникова Т.Н., Бережная И.В. Характеристики отражения от волнистой границы раздела прозрачных сред // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова, М.: Изд-во Диалог – МГУ. 1999. № 3. С. 33-42.

4. Ильинский А.С., Галишникова Т.Н., Бережная И.В. Сравнение двух математических моделей в задаче дифракции Н-поляризованной волны на нерегулярной границе раздела сред // Вестник МГУ. Сер. 15, Вычислит. Математика и кибернетика. (В печати).

5. Ilinski A.S., Galishnikova T.N. Mathematical models in EM wave scattering by wavy surfaces // Proceedings of the 1st Workshop on Electromagnetic and Light Scattering: Theory and Applications. Moscow: Moscow Lomonosov State University Edition of Computational Mathematics and Cybernetics Faculty. 1997. P. 84-88.

6. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции //. М.: Изд-во МГУ. 1987. 288 с.