А.А. Канцель, Е.С. Куркина

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСТВОРЕНИЯ В ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Введение

Способ подземного выщелачивания (СПВ) является одним из наиболее экологически чистых и распространенных геотехнологических методов добычи полезных ископаемых [1]. Он заключается в том, что в подземный рудоносный пласт из ряда скважин закачивается кислотный или щелочной раствор. Раствор просачивается сквозь пористую среду, или, как говорят, фильтруется. Соприкасаясь с раствором, минералы полезных ископаемых растворяются и откачиваются из откачных скважин. СПВ может быть применен только в том случае, если рудоносный пласт представлен водопроницаемыми породами и обводнен, а полезные компоненты в руде представлены минералами, легко растворяемыми слабыми водными растворами кислот или солей щелочных металлов. Наиболее благоприятным для применения СПВ является преимущественно кварцевый состав рудовмещающих пород с низким содержанием вредных примесей и преобладанием полезных компонентов в минеральных формах. По степени проницаемости наиболее пригодными для подземного выщелачивания являются однородные (до 75%) водоносные горизонты, представленные породами с коэффициентом фильтрации 1.0 м/сут и более. Хорошо, когда проницаемость руды больше или равна проницаемости породы. Неблагоприятными для СПВ являются месторождения, в которых руды сосредоточены в слабопроницаемых породах окруженных хорошо проницаемыми безрудными песками. В этом случае рабочие растворы фильтруются по пустым породам в обход рудных тел.

В настоящей работе рассматривается однородный хорошо проницаемый рудоносный пласт, в котором выщелачиваемое вещество равномерно распределено по всему объему.

Целью работы является исследование математических моделей процессов растворения. В процессе растворения происходит изменение химического состава породы за счет замещения одних минералов другими. Такие процессы называются метасоматическими. Теория метасоматической зональности была разработана акад. Д.С. Коржинским в середине прошлого века [2]. Замещение совершается обычно при участии поровых растворов, которые растворяют одни минералы и немедленно отлагают другие минералы, так что в течение замещения порода в целом сохраняет твердое состояние.

Метасоматоз бывает диффузионный и инфильтрационный. При чисто диффузном метасоматозе перенос вещества осуществляется посредством диффузии через застойные поровые растворы. Обычно его действие проявляется на расстояниях нескольких метров в зоне циркуляции растворов.

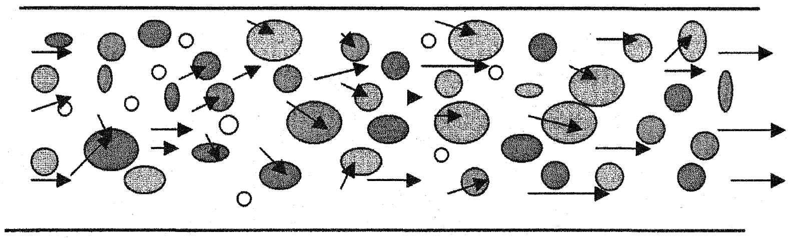

Рис. 1

При инфильтрационном метасоматозе компоненты переносятся течением водных растворов, просачивающихся через поры горных пород. Инфильтрационные метасоматические процессы могут захватывать многокилометровые толщи горных пород. В природе инфильтрационные процессы всегда сочетаются с диффузионными. Растворы просачиваются вдоль стыков зерен или обтекают отдельные более плотные участки породы (см. рис. 1), тогда как замещение этих зерен и участков породы происходит в результате диффузии компонентов.

Таким образом, математические модели метасоматоза должны учитывать фильтрацию раствора между зерен, диффузию раствора внутри зерен, уменьшение концентрации вещества в твердой фазе за счет процесса растворения и увеличение концентрации растворенного вещества по мере движения раствора. Объемное растворение различно в разных участках пласта, так как оно определяется разницей между концентрацией в данной точке и концентрацией в насыщенном растворе. Вблизи закачивающих скважин растворение происходит быстрее всего, и вскоре образуется зона полного растворения минерала, которая с течением времени разрастается. Возникает задача о движении границы зоны полного растворения. В работе рассматриваются несколько моделей, описывающих процессы растворения в разных приближениях, и разрабатывается новая более полная модель. Проведено сравнение с экспериментальными данными. Показано, что новая модель отражает все самые существенные черты процессов выщелачивания полезных ископаемых сернокислыми растворами. Получены автомодельные решения, описывающие движение переднего фронта раствора, выдавливающего естественные воды, и заднего фронта, описывающего смещение области активного растворения. Найдена эффективная ширина зоны растворения и скорости ее смещения в зависимости от скорости фильтрации, пористости, концентрации насыщенного раствора и других характеристик среды. Построено распределение концентрации выщелачиваемого вещества вдоль потока в случае одномерного точения с постоянной скоростью.

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА РАСТВОРИТЕЛЯ И ВЕЩЕСТВА

Будем считать, что в пласте песков, сквозь которые сочится раствор, руда находится в виде небольших зерен, равномерно распределенных по всему объему. Внутри зерен компоненты растворенных солей могут перемещаться только за счет диффузии в поровых растворах. Система пор тонкая и равномерная, а объем пор незначительный. Замещение идет с сохранением объема. Отдельные компоненты диффундируют независимо друг от друга. Хотя любой метасоматический процесс в целом необратим и неравновесен, однако он допускает локальное равновесие и некоторые равновесные соотношения [2], [3]. Будем считать, что температура, давление и др. факторы не изменяются, и условия локального термодинамического равновесия соблюдаются.

Рассмотрим одномерную задачу о фильтрации жидкости в однородной пористой среде, которая растворяет один минерал и одновременно выпадает в осадок другой минерал, так что пористость среды σ не изменяется. Пусть C_p – концентрация некоторого вещества в твердой фазе, C – концентрация этого же вещества в жидкой фазе. Уменьшение во времени $C_p(x,t)$ дает увеличение $C(x,t)$. На этот процесс влияет и диффузия, и перенос вещества в движущейся среде. Пусть чистый раствор подается в точке $x=0$ и течет с постоянной скоростью в положительном направлении оси x. Сначала прокачки чистого раствора сквозь пористую среду процесс растворения идет очень быстро, и концентрация в растворе становится насыщенной. Затем растворение будет идти только вблизи границы с чистым раствором, и зона растворения будет смещаться. Мы будем исследовать установившиеся процессы.

Общее уравнение, которое получается из баланса массы, имеет вид:

$$-\frac{\partial C_p(x,t)}{\partial t}=\sigma\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)+v\frac{\partial C}{\partial x},\quad x\in\left(0,l(t)\right). \tag{1}$$

где D – коэффициент диффузии, v – скорость фильтрации раствора, $l(t)$ – движущаяся граница зоны растворения. При $x \ge l(t)$ имеем $C = C_n$ – насыщенный раствор. К уравнению (1) добавляются начальное и граничное условия:

$$C(x,0) = C_n; \qquad C(0,t) = 0. \tag{2}$$

Из дополнительного условия

$$C(l(t),t) = C_n = const \tag{3}$$

находится уравнение движения границы $l(t)$.

Из (1) можно получать различные модели метасоматоза в зависимости от скорости растворения вещества V_d и соотношения между скоростью движения v и скоростью диффузии:

$$q = \frac{D}{vC}\left|\frac{\partial C}{\partial x}\right|. \tag{4}$$

1. Модель I (диффузионный метасоматоз)

Сначала рассмотрим чисто диффузионный метасоматоз, когда скорость переноса много меньше скорости диффузии ($q >> 1$). Тогда переносом за счет движения среды можно пренебречь. Считаем, что скорость растворения велика $V_d = \infty$, это означает, что растворение идет только на границе $x = l(t)$, и границей раздела двух фаз является плоскость. В результате получаем задачу:

$$\begin{cases} \sigma \dfrac{\partial C}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_0 \dfrac{\partial C}{\partial x}\right), \quad x \in (0, l(t)), \quad t \in (0, \infty) \\ C(0,t) = 0; \quad C(x,0) = C_n \end{cases}. \tag{5}$$

Если $D_0(x) = const$, то задача имеет известное автомодельное решение, которое получается аналитическим путем [2], [3]. Найдем его. Пусть

$$C(x,t) = C(\xi), \qquad \text{где} \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{6}$$

Найдем производные автомодельной переменной ξ по x и по t:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{x}{2t\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{dC}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=-\frac{x}{2t\sqrt{t}}\frac{dC}{d\xi};$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{dC}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dC}{d\xi};$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}=\frac{1}{t}\frac{d^2 C}{d\xi^2},$$

и уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{\xi}{2}\frac{dC}{d\xi}+D\frac{d^2 C_i}{d\xi^2}=0; \quad C(\xi=0)=0; \quad C(\xi=\infty)=C_n, \tag{7}$$

где $D=D_0/\sigma$.

Решение задачи (7) имеет вид:

$$C(x,t)=\frac{C_n-C_0}{\sqrt{\pi D}}\int_0^{\xi} e^{-\alpha^2/4D}d\alpha+C_0; \quad \xi=\frac{x}{\sqrt{t}} \tag{8}$$

Из дополнительного условия (3) имеем:

$$C(x=l(t),t)=\frac{C_n-C_0}{\sqrt{\pi D}}\int_0^{l(t)/t} e^{-\alpha^2/4D}d\alpha+C_0=C_n.$$

Для того, чтобы $C(x=l(t),t)$ была бы постоянной необходимо, чтобы граница двигалась по закону:

$$l(t)=p\sqrt{t}, \quad p=const \tag{9}$$

Тогда получаем условие

$$\frac{C_n-C_0}{\sqrt{\pi D}}\int_0^{p} e^{-\alpha^2/4D}d\alpha+C_0=C_n, \qquad C_0=0$$

или, сделав замену $\alpha=2\sqrt{D}z$, имеем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{p/2\sqrt{D}} e^{-\alpha^2/4D}d\alpha=1. \tag{10}$$

Строго говоря, условие (10) выполняется при $p=\infty$. Это связано с недостатками диффузионной модели, когда при любом конечном значении времени изменения происходят для всех $x\in(0,\infty)$. Надо выбрать p так, чтобы условие (10) выполнялось приблизительно. При $p\geq 4\sqrt{D}$ имеем

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^2 e^{-\alpha^2/4D}d\alpha \cong 1$$

Таким образом, получаем закон движения границы:

$$l(t) = 4\sqrt{Dt} \tag{11}$$

Скорость движения границы уменьшается со временем и равна:

$$\frac{dl}{dt} = 2\sqrt{\frac{D}{t}}. \tag{12}$$

2. Модель II (динамическая модель без диффузии).

Рассмотрим теперь противоположный случай, когда скорость переноса много больше скорости диффузии ($q << 1$), и по-прежнему растворение считаем очень быстрым процессом ($V_d = \infty$). Тогда границей раздела двух фаз является плоскость $x = l(t)$. Пренебрегая диффузией по сравнению с переносом, получаем задачу для уравнения переноса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + V\dfrac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, l(t)), \quad t \in (0, \infty) \\ C(0,t) = 0; \quad C(x,0) = C_n \end{cases} \tag{13}$$

Полученная задача также имеет известное автомодельное решение:

$$C(x,t) = C(\xi), \quad \xi = x - Vt. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13) получаем $\dfrac{dC}{d\xi} = 0$. Следовательно $C(\xi) = const$ при $x \in [0, l(t)]$. Это возможно только при условии

$$l(t) = Vt.$$

С учетом начальных и граничных условий окончательно получаем:

$$C(x - Vt) = \begin{cases} C_0 = 0, & 0 \le x < l(t) = Vt \\ C_n, & x \ge l(t) = Vt \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, решение (15) описывает движение со скоростью V границы раздела двух фаз. С одной стороны границы вещество полностью растворилось, и $C = 0$. С другой стороны $C = C_n$, и процесс растворения не идет. Процесс растворения происходит очень быстро в очень узкой области; здесь в одной точке $x = l(t)$.

3. Модель III (динамическая модель с учетом диффузии).

Модель II можно улучшить, считая, что процесс растворения происходит не мгновенно в одной точке, а в некотором тонком слое. Учтем, что вблизи границы фазового перехода имеется очень большой градиент концентрации, поэтому при $x \approx l(t)$ имеем $q >> 1$, в то время как в остальной области $q << 1$. Таким образом, вблизи границы при $x \approx l(t)$ имеется тонкий переходной слой от $q << 1$ к $q >> 1$. Этот слой называется диффузионным, так как там главную роль играет диффузионная кинетика. Толщина слоя Δ определяется из условия:

$$q = \frac{D}{VC_n}\frac{C_n - C_0}{\Delta} \approx 1; \quad \text{или} \quad \Delta \approx \frac{D}{V} \quad (\text{при } C_n >> C_0) \tag{16}$$

Так как Δ – мало, то в диффузионном слое имеем линейное распределение концентрации

$$C(x,t) = C_n - (C_n - C_0)\frac{l(t) - x}{\Delta}, \quad \text{при} \quad l - \Delta \le x \le l \tag{17}$$

Вне диффузионного слоя имеем постоянную концентрацию:

$$C(x,t) = C_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l(t) - \Delta, \quad l(t) = Vt \tag{18}$$

Таким образом, автомодельное распределение концентраций имеет вид:

$$C(x,t) = \begin{cases} C_0, & \text{при} \quad 0 \le x \le Vt - \dfrac{D}{V} \\ C_n - \dfrac{V(C_n - C_0)}{D}(Vt - x), & \text{при} \quad Vt - \dfrac{D}{V} \le x \le Vt. \\ C_n, & \text{при} \quad x \ge Vt \end{cases} \tag{19}$$

4. Модель IV (динамическая модель при конечной скорости растворения).

Теперь учтем, что скорость растворения конечна $V_d < \infty$. В этом случае необходимо описать процесс растворения и разработать математическую модель. Сначала рассмотрим случай, когда скорость диффузии много меньше скорости переноса, то есть $q << 1$, и изменением запасов вещества в твердой фазе можно пренебречь (это справедливо на начальной стадии процесса растворения). Тогда можно считать, что

$$-\frac{\partial C_p}{\partial t} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sigma}(C_n - C(x,t)), & \text{при} \quad C(x,t) < C_n \\ 0, & \text{при} \quad C(x,t) \ge C_n \end{cases} \tag{20}$$

где $\alpha > 0$ – некоторая константа, определяемая свойствами среды.

Исследуемая задача принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + V\dfrac{\partial C}{\partial x} = \tilde{\alpha}(C_n - C), \quad x \in (0,\infty), \;\; t \in (0,\infty) \\ C(0,t) = C_0; \quad C(x,t) \to C_n, \;\; \text{при} \quad x \to \infty \end{cases} \tag{21}$$

Задача (21) имеет стационарное решение

$$C(x,t) = C_n - (C_n - C_0)e^{-\frac{\tilde{\alpha}}{V}x}. \tag{22}$$

Можно получить общее решение задачи (21), представив решение в виде:

$$C(x,t) = C_n - U(x,t)e^{-\frac{\tilde{\alpha}}{V}x}. \tag{23}$$

Подставим представление (23) в (22), тогда найдем, что функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению переноса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

общее решение, которого есть

$$U(x,t) = \varphi(x - Vt), \tag{24}$$

где $\varphi(\xi)$ – произвольная дифференцируемая функция. Таким образом, общим решением уравнения (21) является функция.

$$C(x,t) = C_n - \varphi(x - Vt)e^{-\frac{\alpha}{v}x} \tag{25}$$

Стационарное решение (22) получается при $\varphi(\xi) = C_n - C_0$.

5. Модель V. Исследование движения переднего фронта зоны растворения.

Рассмотрим установившееся движение переднего фронта растворения, вытесняющего естественные грунтовые воды. Будем считать, что скорость растворения велика, и зона растворения движется со скоростью движения жидкости. Пусть раствор в момент времени $t = 0$ достиг сечения $x = 0$. Туда, куда просочился раствор, пошел процесс растворения. На движущейся со скоростью фильтрации границе $x_g(t) = v \cdot t$ раствора с грунтовыми водами концентрация равна нулю $C(x_g) = 0$. В фиксированном сечении x, в которое уже просочился раствор, концентрация растворенного вещества увеличивается и стремится к насыщенной. Для уравнения (21) такая задача не имеет решения, поскольку граничное условие задано на характеристике.

Отметим, что в зоне растворения мы имеем большой градиент концентрации и уточним уравнение, описывающее процесс растворения. В этом случае необходимо учитывать диффузию. В результате получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + v\dfrac{\partial C}{\partial x} - D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \alpha(C_n - C), \quad vt - L \le x \le vt, \\ C(x = vt, t) = C_0; \quad C(x = vt - L, t) = C_n, \end{cases} \tag{26}$$

где L – ширина зоны растворения, которая определяется скоростью растворения V_d. Если скорость растворения очень большая, то ширина диффузионного слоя стремится к нулю, и имеем Модель II (13).

Найдем установившееся, автомодельное решение задачи (26) типа бегущей волны:

$$C(x,t) = C(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = x - vt. \tag{27}$$

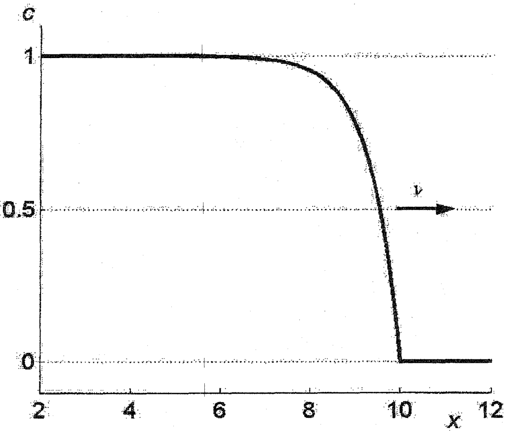

Рис. 2

Подставляя вид (27) в (26) для функции $C(\xi)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} D\dfrac{d^2 C(\xi)}{d\xi^2} + \alpha(C_n - C(\xi)) = 0, \quad \xi \in [-L, 0] \\ C(0) = C_0; \quad C(-L) = C_n \end{cases}$$

Решение данной задачи имеет вид:

$$C(\xi) = C_n - (C_n - C_0)\frac{sh\sqrt{\tilde{\alpha}/D}(-L+\xi)}{sh-\sqrt{\tilde{\alpha}/D}L}$$

Окончательно получаем:

$$C(x,t) = \begin{cases} C_n, & -\infty \le x \le vt - L \\ C_n - (C_n - C_0)\dfrac{sh\sqrt{\tilde{\alpha}/D}(-L-vt+x)}{sh-\sqrt{\tilde{\alpha}/D}L}, & vt - L \le x \le vt \\ 0, & x \ge vt \end{cases}$$

На рис. 2 показано распределение концентрации вещества вдоль потока за фронтом движения раствора в некоторый фиксированный момент времени. (Здесь $c = C(x)/C_n$, $C_0 = 0$.) Мы видим, что концентрация при удалении от точки фронта асимптотически приближается к насыщенной.

Однако вблизи закачивающей скважины всегда чистый раствор. Здесь происходит быстрое растворение и, как уже отмечалось, образуется зона полного растворения, которая увеличивается со временем. Вернемся снова к задаче (21), описывающей движение заднего фронта растворения. Учтем теперь, что количество вещества в твердой фазе ограничено. Тогда к выражению (20) необходимо добавить условие:

$$\frac{dC_p}{dt} = 0, \quad \text{при} \quad t \ge t_p, \text{ если } \tilde{\alpha}\left(C_n t_p - \int_0^{t_p} C(x,t)dt\right) = M,$$

где t_p – время полного растворения вещества в сечении x, если в начальный момент его концентрация в твердой фазе была M.

Рассмотрим установившийся процесс, описываемый автомодельным решением: $C(x,t) = C(\xi)$, $C_p(x,t) = C_p(\xi)$, $\xi = x - V_p t$, где V_p – скорость движения фронта выщелачивания. Автомодельное уравнение имеет вид:

$$-V_p\frac{dC}{d\xi} + V\frac{dC}{d\xi} = \frac{1}{\sigma}V_p\frac{dC_p}{d\xi}, \tag{28}$$

Проинтегрируем уравнение (28) на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ активного выщелачивания, на котором концентрация растворенного вещества возрастает от фонового $C_0 \approx 0$ при $\xi = \xi_1$ достигает насыщенной $C = C_n$ при $\xi = \xi_2$, а содержание твердого вещества в породе убывает до нуля. Тогда получим:

$$-V_p C_n + VC_n = \frac{1}{\sigma}V_p M. \tag{29}$$

Соотношение (29) дает связь между скоростью фильтрации $v = \sigma \cdot V$ и скоростью движения фронта выщелачивания $v_p = \sigma \cdot V_p$:

$$v_p = \frac{v}{1 + \frac{1}{\sigma}\frac{M}{C_n}}. \qquad (30)$$

Таким образом, скорость движения фронта выщелачивания всегда меньше скорости фильтрации и линейным образом от нее зависит. При низком содержании в твердой фазе вещества $M << C_n$ скорость движения фронта приблизительно равна скорости фильтрации.

Формула (30) во многих случаях правильно отражает закон движения фронта выщелачивания. Практически линейная зависимость скорости движения фронта выщелачивания от скорости фильтрации установлена в фильтрационном выщелачивании урана и других полезных ископаемых сернокислыми растворами [1].

Для того, чтобы найти распределение концентрации вещества вдоль фильтрационного потока надо построить модель самого процесса растворения.

6. Модель VI (динамическая распределенная модель при конечной скорости растворения).

Построим теперь распределенную математическую модель метасоматоза, за основу взяв модель (21) с ограниченными запасами (27), в которой коэффициент α, характеризующий скорость растворения, выведем, рассматривая конкретный механизм растворения.

Будем считать, что полезное ископаемое, растворение которого мы хотим описать, представлено в руде в виде мелких зернышек, равномерно распределенных по пласту. Раствор, просачиваясь сквозь пласт, обтекает эти зерна и растворяет их с поверхности. Будем считать, что все зерна одинаковые и имеют форму шара радиусом r_0. Поскольку зерно маленькое можно считать, что оно находится в точке x, и концентрация $C_v(x,t)$ в потоке, омываемом зерно, одинакова у всей поверхности зерна. Пусть C_p – концентрация этого вещества в твердой фазе. При растворении радиус шарика уменьшается до нуля, пока все вещество не растворится. Выведем уравнение изменения радиуса зерна $r(t)$ из уравнения баланса массы. Количество растворенного вещества, вытекающего из зерна за время Δt пропорционально площади поверхности, разности между концентрацией в растворе и концентрацией в насыщенном растворе, и равно:

$$\Delta Q_R = -\alpha \cdot (C_n - C_v) \cdot \Delta t \cdot 4\pi r^2, \qquad (31)$$

(значение параметра α зависит от состава раствора и других характеристик), а количество перешедшего вещества из твердой фазы в раствор за это время равно:

$$\Delta Q_g = C_p \times \Delta r \times 4\pi r^2(t). \tag{32}$$

Приравняв эти количества, найдем:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{C_p}(C_n - C_v). \tag{33}$$

Вводя безразмерный радиус:

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad 0 \le \rho \le 1,$$

и нормируя концентрацию вещества в растворе на насыщенную:

$$\tilde{c}_v = \frac{C_v}{C_n}, \quad 0 \le \tilde{c}_v \le 1,$$

и, устремляя $\Delta t \to 0$ и $\Delta r \to 0$, получаем уравнение, определяющее закон изменения радиуса $\rho(t)$ при растворении:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\beta \cdot (1 - \tilde{c}_v), \quad \beta = \frac{\alpha \cdot C_n}{r_0 C_p}. \tag{34}$$

Заметим, что со временем концентрация соли в растворе $\tilde{c}_v$, омываемом зерно, изменяется (увеличивается до насыщения), и поэтому уравнение (34) надо решать вместе с уравнением переноса вдоль линий тока. Каждое зернышко, пока оно полностью не растворится, представляет собой источник. Из (31) следует, что за единицу времени в единицу объема потока жидкости выделяется вещества:

$$\tilde{q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{\delta}{\sigma V_s} = \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma}\rho^2(1 - \tilde{c}_v), \quad \tilde{\alpha} = \frac{3\alpha \cdot \delta \cdot C_n}{r_0}, \tag{35}$$

где $V_s = \frac{4}{3}\pi r_0^{\,3}$ – объем шарика, σ – пористость, δ – доля зерен в единице объема, $\rho(t)$ берется из решения уравнения (34). И система уравнений относительно концентрации растворенного вещества $0 \le c(x,t) \le 1$ и радиуса $0 \le \rho(x,t) \le 1$ описывающая объемное растворение в движущейся среде принимает вид:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} + V\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma}\rho^2(1-c), \tag{36}$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\beta(1-c), \qquad 0 < x < l(t), \qquad t > 0. \tag{37}$$

Систему (36), (37) дополним граничными и начальными условиями:

$$c(0,t)=0 \quad \text{при} \quad t\ge 0; \quad c(x,t)=1, \; \rho(x,t)=1 \quad \text{при} \quad x\ge l(t);$$
$$c(x,0)=1, \; \rho(x,0)=1 \quad \text{при} \quad x>0. \tag{38}$$

Найдем автомодельное решение задачи (36), (37), (38), описывающее установившееся движение зоны растворения. Будем искать его в виде:

$$c(x,t)=c(\xi), \quad \rho(x,t)=\rho(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = x - V_p t, \tag{39}$$

а V_p – скорость движения фронта растворения, которую надо найти. Подставляя (39) в систему (36), (37), получим систему автомодельных уравнений:

$$-V_p \frac{dc}{d\xi} + V\frac{dc}{d\xi} = \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma}\rho^2(1-c), \tag{40}$$

$$V_p \frac{d\rho(\xi)}{d\xi} = \beta(1-c), \qquad \xi > \xi_p, \tag{41}$$

где ξ_p – граница области полного растворения. Автомодельное решение удовлетворяет следующим условиям. В области $0\le\xi\le\xi_p$, где вещество полностью растворилось:

$$c(0)=0, \; \rho(0)=0 \quad \text{при} \quad 0\le\xi\le\xi_p, \tag{42}$$

а в области насыщенного раствора:

$$c(\xi)=1, \quad \rho(\xi)=1 \quad \text{при} \quad \xi\ge\xi_n, \tag{43}$$

или

$$c(\xi)\to 1, \; \rho(\xi)\to 1 \quad \text{при} \quad \xi\to\infty. \tag{44}$$

Случай (44) имеет место, когда растворение зерна происходит за бесконечное время.

Из уравнения (41) выразим $\rho^2(1-c) = \frac{V_p}{\beta}\rho^2\frac{d\rho(\xi)}{d\xi}$ и подставим в уравнение (40), тогда получим

$$-V_p\frac{dc}{d\xi} + V\frac{dc}{d\xi} = \frac{\tilde{\alpha}}{3\sigma\cdot\beta}V_p\frac{d\rho^3}{d\xi},$$

или

$$\frac{d}{d\xi}\left(-V_p c + Vc - \frac{\alpha}{3\beta}V_p\rho^3\right) = 0, \tag{45}$$

Отсюда находим:

$$-V_p c + Vc - \frac{\alpha}{3\beta} V_p \rho^3 = const = C_0$$

Учитывая граничные условия (42)-(44), получаем, что $C_0 = 0$, а

$$V_p = \frac{V}{1 + \frac{\alpha}{3\beta}} = \frac{V}{1 + \frac{\delta}{\sigma}\frac{c_p}{c_n}}, \tag{46}$$

и

$$c(\xi) = \rho^3(\xi). \tag{47}$$

Как и следовало ожидать, выражение для скорости (46) совпадает с формулой (30) для общего случая ($M = \delta \cdot C_p$).

Найденную связь (47) подставим в уравнение (41)

$$V_p \frac{d\rho(\xi)}{d\xi} = \beta(1 - \rho^3). \tag{48}$$

Интегрируя (48), находим функцию $\rho(\xi)$, и из соотношения (47) – функцию $c(\xi)$.

$$\int_0^\rho \frac{d\rho}{1-\rho^3} = \int_{\xi_p}^{\xi} \frac{\beta}{V_p} d\xi. \tag{49}$$

или

$$\int_0^\rho \frac{d\rho}{1-\rho^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{(1-\rho^3)}{(1-\rho)^3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\rho+1}{\sqrt{3}} = \frac{\beta}{V_p}\xi + Const \tag{50}$$

Аналитическое решение (50) определяет в неявном виде зависимость ρ от ξ. Отсюда следует, что $\rho \to 1$ (и, следовательно, $c(\xi) \to 1$) при $\xi \to \infty$. Причем концентрация вещества в растворе стремится к насыщению экспоненциально. Можно найти эффективную ширину зоны растворения отнесенную к скорости фильтрации Δ_p / ν, считая, что концентрация достигла насыщения при $1 - \rho \approx 10^{-3}$.

$$\frac{\Delta_p}{\nu} = \frac{\Delta x}{\nu} \approx \frac{V_p}{\nu\beta}\ln 10 = \frac{1}{\alpha}\frac{M}{(\sigma \cdot C_n + M)}\frac{r_0}{\delta}\ln 10. \tag{51}$$

Из формулы (51) следует, что величина Δ_p / ν не зависит от скорости фильтрации и обратно пропорциональна коэффициенту растворения α.

На рис. 3 представлен вид полученного автомодельного решения для $\beta = 1$, $\alpha = 3$. На рис. 3а показано, как происходит растворение зерна в произвольном сечении x, а на рис. 3б изображено распределение концентрации растворенного вещества вдоль потока.

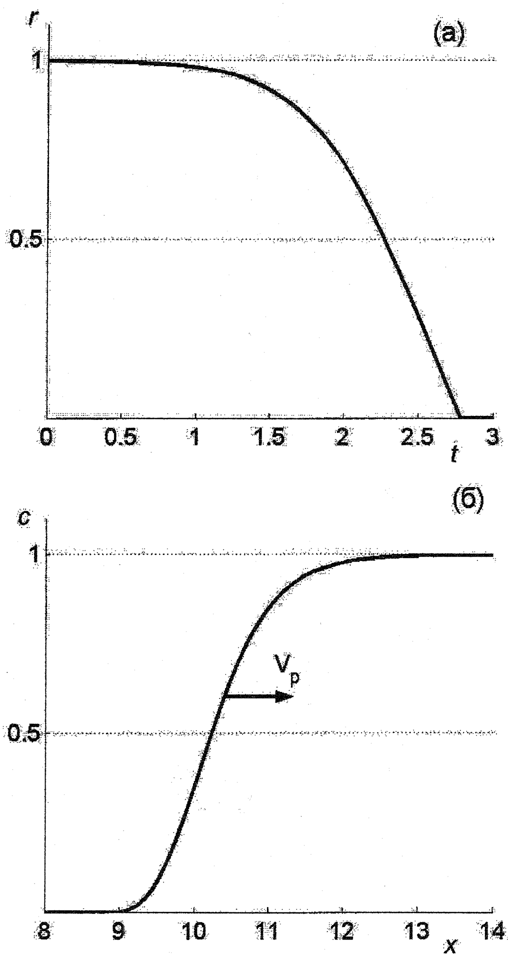

Рис. 3

7. Сравнение математической модели с эмпирическими закономерностями процессов фильтрационного выщелачивания.

На основании широкого комплекса лабораторных и опытно-промышленных геотехнологических исследований установлены следующие основные закономерности фильтрационного выщелачивания полезных ископаемых сернокислыми растворами [1].

1) Это, уже отмечавшаяся выше, *линейная зависимость скорости движения фронта выщелачивания от скорости фильтрации*, которая означает, что при увеличении скорости фильтрации концентрация в растворе не изменяется, поскольку пропорционально возрастает скорость движения фронта выщелачивания. В условиях одномерного фильтрационного потока общее количество выщелачивающего раствора, необходимое для данной степени извлечения вещества не зависит от скорости фильтрации и может выражаться отношением массы раствора к массе руды **(Ж:Т)**. Показатель **(Ж:Т)** является одним из основных геотехнологических показателях при СПВ.

2) *Прямая функциональная зависимость скорости выщелачивания от концентрации растворителя.* Процесс выщелачивания ускоряется с увеличением концентрации серной кислоты при одинаковой скорости движения растворов. Это обусловлено тем, что с увеличением концентрации серной кислоты при одинаковой концентрации растворителя возрастает и концентрация металла в фильтрующемся растворе.

3) *Экспоненциальная зависимость содержания металла в продуктивных растворах от отношения длины пути* x *к скорости фильтрации* v. Максимальная концентрация полезного компонента определяется отношением x/v. При реальных скоростях фильтрации длина зоны формирования насыщенных ураном растворов составляет первые метры.

4) *Переотложение металлов по пути фильтрации на подвижном щелочном и восстановительном геохимических барьерах.* По длине фильтрационного потока <u>в твердой фазе выделены четыре зоны: полного выщелачивания, активного выщелачивания, переосаждения и исходного содержания металла</u>. В жидкой фазе первой зоны наблюдаются близфоновые концентрации металла, во второй и третьей – соответственно выше и ниже фоновых или равные концентрации насыщения, четвертой – близкие к фону пластовых вод. В реальных условиях (двух- и трехмерные потоки) только за счет различий в длине пути и скорости фильтрации для разных линий тока длительность каждого этапа по выделенным зонам будет больше, чем в одномерном случае, а концентрация металла в жидкой фазе соответственно меньше.

Все эти закономерности описываются предложенной моделью метасоматоза (36), (37), (38).

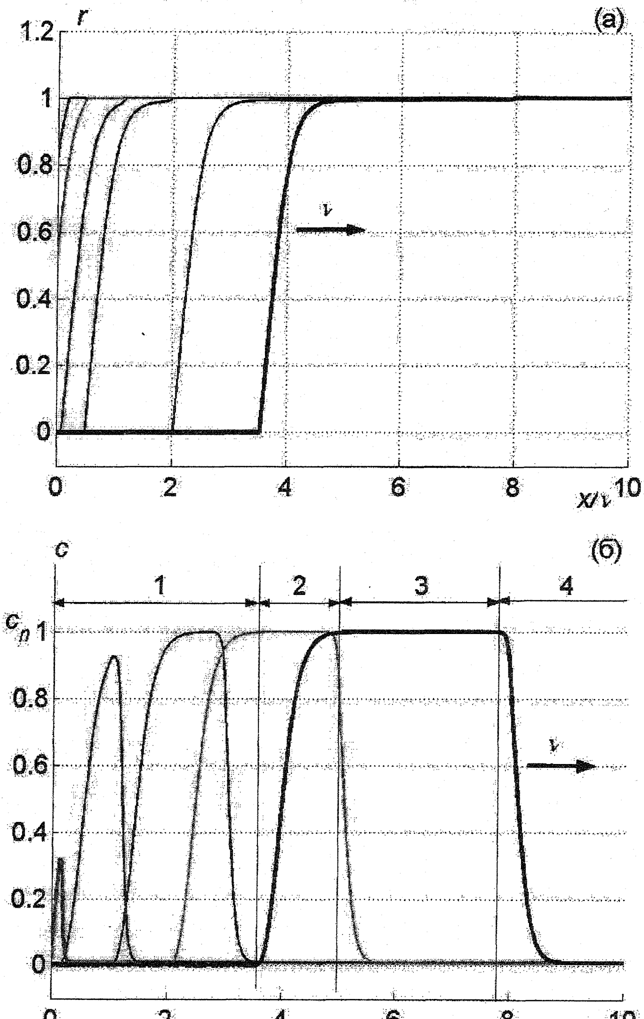

Рис. 4

1) Линейная зависимость скорости движения фронта выщелачивания от скорости фильтрации отмечалась выше. 2) Увеличение концентрации серной кислоты приводит к увеличению C_n и параметра α в модели, что и означает ускорение процесса растворения. 3) Экспоненциальное стремление концентрации в растворе к C_n в зависимости от отношения длины пути x к скорости фильтрации v обусловлено тем, что $C(x,t)=C_n$ является стационаром и описывается аналитическими решениями (26) и (50), (51). 4) Существование четырех выделенных зон по длине фильтрационного потока установлено в численных расчетах предложенной модели. На рис. 4 показано распределение запасов в твердой фазе (рис. 4а) и концентрации растворенного вещества (рис. 4б) вдоль потока для нескольких моментов времени. На рис. 6б отмечены зоны полного растворения – 1, активного растворения – 2, насыщенного раствора – 3, и фронта движения раствора – 4. Выше были найдены аналитические решения задачи, описывающие движения переднего (зоны 4-3) и заднего (зоны 1-2-3) фронтов растворения при некоторых предположениях. Как видно из рисунка, они хорошо описывают решение задачи.

Авторы выражают благодарность В.И. Дмитриеву за полезные обсуждения работы.

Литература

1. *Е.А. Толстов, Д.Е. Толстов.* Физико-химические геотехнологии. Освоения месторождений урана и золота в кызылкумском регионе. –М.: Геоинформцентр, 2002, 277 с.
2. *Д.С. Коржинский* Теория метасоматической зональности. – М.: Наука, 1969, 112с.
3. *Ю.И. Демин, В.И. Дмитриев, В.А. Жариков.* Математическая модель диффузионного метасоматоза с взаимодействием зон. // В сб. Проблемы физико-химической петрологии. Т.2. – М.: Наука, 1979, с. 97-117.
4. *П.Я. Кочина, Н.Н. Кочина.* Гидродинамика подземных вод и вопросы орошения. – М.: Физматлит, 1994, 240 с.