

## **О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ОДНОЙ СИСТЕМЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА <sup>1</sup>**

### **Введение**

В работе рассматривается задача восстановления неизвестных характеристик в системе нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих процессы в биореакторе с подпиткой. Указывается ориентированный на компьютерную реализацию алгоритм решения этой задачи.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем и в более общем контексте вкладывается в проблематику теории некорректных задач [1, 2]. В апостериорной постановке – в отсутствие требования динамичности алгоритма восстановления – теория подобного типа задач развита достаточно глубоко [3]. Требование динамичности – особенность рассматриваемой постановки – проявляется в ситуациях, когда текущие значения входа используются для принятия решений по ходу процесса.

Представляемая в данной работе методика идейно следует теории устойчивого динамического обращения, развитой в [4 – 7]. Последняя основана на соединении методов теории некорректных задач [1, 2] и теории позиционного управления [8]. Суть этой теории состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой – моделью; такой алгоритм, выходом которого служит в частности реализация управления в модели, по своему определению, является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени подпадает под условия какого-либо принципа регуляризации; тем самым обеспечивается устойчивость алгоритма. Предлагаемый ниже алгоритм управления моделью основан на модифицированном принципе сглаживающего функционала, трактуемого как подходящий функционал типа Ляпунова. Управление в модели строится таким образом, чтобы обеспечить малую скорость возрастания этого функционала.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Международного института прикладного системного анализа (ИАСА). Для второго автора также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00359), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН "Процессы управления", Программы поддержки ведущих научных школ России (проект НШ-7581.2006.1).

## 1. Динамическая модель биореактора с подпиткой

Содержательный пример, который исследуется в данной работе, связан с работами [9, 10], которые фокусируются на задаче оптимального планирования эксперимента при моделировании биореактора. Настоящая статья может рассматриваться как продолжение указанных работ.

Не теряя общности, будем полагать, что концентрация растворенного кислорода в подпитке соответствует уровню насыщения, т.е. она не подвергается воздействию бактерий, которые, по предположению, отсутствуют в подпитке. Потребление субстрата бактериями в реакторе является аэробным и непосредственно влияет на концентрацию растворенного кислорода в реакторе. Следующая нелинейная динамическая модель описывает биохимические процессы в реакторе [9 - 11]

$$\begin{aligned}\frac{dC_{DO}(t)}{dt} &= k_{La}(C_{sat}^{en} - C_{DO}(t)) - \\ &\quad - OUR(t) + \frac{F_{in}(t)}{V(t)}(C_{sat} - C_{DO}(t)), \\ \frac{dC_X(t)}{dt} &= \mu(C_S(t))C_X(t) - \frac{F_{in}(t)}{V(t)}C_X(t), \\ \frac{dC_S(t)}{dt} &= -\frac{\mu(C_S(t))}{Y}C_X(t) + \frac{F_{in}(t)}{V(t)}(C_{S,in}(t) - C_S(t)),\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}V(t) &= \int_0^t F_{in}(\tau) d\tau + V(t_0), \\ OUR(t) &= \frac{(1-Y)}{Y}\mu(C_S(t))C_X(t), \\ \mu(C_S(t)) &= \mu_{max}(t)\frac{C_S(t)}{K_S + C_S(t)}, \quad t \in T = [t_0, \vartheta],\end{aligned}$$

Здесь и ниже,  $k_{La}$  – коэффициент аэрирования,  $V(t)$  – объем реактора,  $C_{sat}^{en}$  – концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения, включая малую (постоянную) коррекцию для эндогенного дыхания биомассы,  $C_{sat}$  – (нормальная) концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения в подпитке,  $\mu_{max}(t)$  – коэффициент максимальной скорости роста,  $K_S$  – постоянная полунасыщения,  $Y$  – коэффициент текучести биомассы на субстрате,  $OUR(t)$  – скорость поглощения кислорода биомассой в реакторе,  $C_{DO}(t)$  – концентрация

растворенного кислорода в реакторе,  $C_X(t)$  – концентрация биомассы,  $C_S(t)$  – скорость роста биомассы. Заметим, что в (1) величина  $\mu_{\max}(t)$  является меняющимся во времени параметром. Чаще всего этот параметр меняется вследствие адаптации организмов, дополнительных ограничений на субстрат или, в общем, вследствие погрешностей кинетического моделирования.

Заметим, что первое уравнение в (1) описывает концентрацию растворенного кислорода в реакторе, причем первое слагаемое в правой части представляет естественное аэрирование, второе – поглощение кислорода аэробной биомассой и последнее – подпитку и разбавление растворенного кислорода. Второе уравнение в (1) описывает динамику биомассы; здесь первое слагаемое в правой части описывает рост биомассы, а последнее – разбавление. Это, первое слагаемое, отвечающее за рост, с некоторым коэффициентом текучести ( $Y$ ) также присутствует в третьем уравнении в (1), но в качестве слагаемого, характеризующего элемент поглощения в балансе субстрата.

Далее полагаем, что имеются *данные только по растворенному кислороду* и нет никакой информации ни по биомассе, ни по субстрату. Эти ограниченные информативные возможности являются причиной некорректности задачи реконструкции  $\mu_{\max}(t)$  и состояний  $C_X(t)$ ,  $C_S(t)$ . В дальнейшем основное внимание будет уделено одновременному оцениванию параметра  $\mu_{\max}(t)$ , концентрации биомассы  $C_X(t)$  и скорости роста биомассы  $C_S(t)$  на основе неточных измерений концентрации растворенного кислорода  $C_{DO}(t)$ . Поэтому будем считать, что параметры  $V(t_0)$ ,  $Y$ ,  $K_S$ ,  $C_X(t_0)$ ,  $C_S(t_0)$ ,  $C_{sat}^{en}$ ,  $C_{sat}$ ,  $k_{La}$  и функции  $F_{in}(t)$ ,  $C_{S,in}(t)$  либо уже оценены априори, либо взяты из литературы, имеющейся в достаточном количестве.

## 2. Постановка задачи и описание алгоритма решения

Рассматриваемая в данной работе задача состоит в следующем. Неизвестная функция ( коэффициент )  $\mu_{\max}(t)$  действует на систему (1), порождая этим некоторое ( неизвестное ) решение

$$C(t) = C(t; C_0, \mu_{\max}) = (C_{DO}(t), C_X(t), C_S(t)),$$

где  $C_0 = (C_{DO}(t_0), C_X(t_0), C_S(t_0))$  - начальное состояние системы, которое мы считаем известным. Промежуток времени  $T$  разбит на подинтервалы  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $i \in [0 : m]$ ,  $\tau_0 = t_0$ ,  $\tau_m = \vartheta$ . В дискретные (достаточно частые) моменты времени  $\tau_i$  координата  $C_{DO}(\tau_i)$  измеряется с ошибкой, т. е., находятся числа  $\xi_i^h = \xi(\tau_i) \in \mathbb{R}$  такие, что справедливы неравенства

$$|C_{DO}(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h \quad (2)$$

для всех  $i = 1, \dots, m$ . Здесь и всюду ниже символ  $|x|$  означает абсолютную величину числа  $a$ . Требуется сконструировать алгоритм вычисления функций  $v(t) = v^h(t)$  и  $w^h(t) = \{w_1^h(t), w_2^h(t)\}$ , аппроксимирующих  $\mu_{\max}(t)$  и  $C_X(t), C_S(t)$  соответственно.

В дальнейшем полагаем известным число  $K \in (0, +\infty)$  такое, что неизвестные функции  $\mu_{\max}(t)$  и  $OUR(t)$  стеснены следующими ограничениями:

$$\begin{aligned} OUR(t), \quad \mu_{\max}(t) \in L_\infty(T; \mathbb{R}), \quad |OUR(t)| \leq K \\ \text{при п.в. } t \in T. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем считать в дальнейшем выполненным следующее

**Условие 1**  $b_0 \leq F_{in}(t) \leq b_1$  при почти всех  $t \in T$ ,  $0 \leq b_0 \leq b_1$ ,

$$Y \in (0, 1), \quad V(t) \geq V_0 > 0,$$

$$C_{S,in}(t) \in C^1(T; \mathbb{R}), \quad F_{in}(t) \in L_\infty(T; \mathbb{R}),$$

$$C_X(t) \geq C_X > 0, \quad C_S(t) \geq C_S > 0.$$

Здесь  $\mathbb{R}$  означает множество всех действительных чисел;  $C^1(T; \mathbb{R})$  – пространство непрерывно дифференцируемых функций  $x(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой

$$\|x(t)\|_{C^1} = \max\{\max_{t \in T} |x(t)|, \max_{t \in T} |\dot{x}(t)|\};$$

$L_\infty(T; \mathbb{R})$  – пространство измеримых по Лебегу функций  $x(t) : T \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой  $\|x(t)\|_{L_\infty} = \text{vrai sup}_{t \in T} |x(t)|$ . В дальнейшем полагаем функцию  $V(t)$  известной.

Для решения рассматриваемой задачи применим метод вспомогательных позиционно-управляемых моделей, развитый в работах [4 – 7]. Следуя этому методу, сначала выберем и зафиксируем семейство

$$\begin{aligned} \Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \\ \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad m_h = (\vartheta - t_0)\delta^{-1}(h) \end{aligned} \quad (4)$$

разбиений промежутка времени  $T$  с диаметрами

$$\delta(h) = \delta(\Delta_h), \quad \delta(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Здесь  $h$  означает величину погрешности измерения. Затем введем вспомогательную систему  $M$ , функционирующую синхронно с реальной системой (1). Заметим, что (i)  $\frac{F_{in}(t)}{V(t)} = \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \approx \frac{\ln\left(\frac{V(\tau_{i+1})}{V(\tau_i)}\right)}{\delta}$ , (ii)  $F_{in}(\tau_i) \approx \frac{V_i - V_{i-1}}{\delta}$ . Поэтому в качестве  $M$  возьмем дискретную линейную систему вида

$$\begin{aligned} w_0^h(\tau_{i+1}) &= w_0^h(\tau_i) + \delta \{k_{La}(C_{sat}^{en} - \xi_i^h) - \varphi_i^h\} + \\ &\quad + \ln(V(\tau_{i+1})V^{-1}(\tau_i))(C_{sat} - \xi_i^h), \\ w_1^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_X(t_0) + V^{-1}(\tau_{i+1})\delta \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h, \\ w_2^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_S(t_0) + C_{S,in}(\tau_{i+1}) - W(\tau_{i+1})C_{S,in}(t_0) - \\ &\quad - V^{-1}(\tau_{i+1}) \left[ \sum_{j=0}^i (C_{S,in}(\tau_{j+1}) - C_{S,in}(\tau_j))V(\tau_j) + \right. \\ &\quad \left. + \delta Y^{-1} \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h \right], \end{aligned} \quad (5)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = \xi_0^h, \quad w_1^h(t_0) = C_X(t_0), \quad w_2^h(t_0) = C_S(t_0).$$

Здесь

$$\psi_i^h = Y\varphi_i^h/(1-Y), \quad \varphi_i^h = \varphi^h(\tau_i), \quad W(\tau_j) = V^{-1}(\tau_j)V(t_0).$$

Таким образом, модель  $M$  имеет в качестве входа управление  $\varphi^h(\cdot)$ , а в качестве выхода – траекторию  $w^h(\cdot)$

$$\begin{aligned} \varphi^h(t) &= \varphi_i^h, \quad w^h(t) = \{w_0^h(t), w_1^h(t), w_2^h(t)\} = w^h(\tau_i), \\ &\quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \end{aligned}$$

где вектора  $w^h(\tau_i)$  находятся по формулам (5), а закон определения  $\varphi_i^h$  указан ниже.

Перейдем к описанию алгоритма. До момента  $t_0$  фиксируются величина  $h \in (0, 1)$ , функция

$$\alpha = \alpha(h) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\},$$

разбиение  $\Delta = \Delta_h$  (4) с диаметром  $\delta = \delta(\Delta_h)$  и модель (5).

Затем организуется процесс управления по принципу обратной связи моделью  $M$  синхронно с развитием процесса функционирования системы (1). Работа алгоритма начинается в момент  $t_0$  и разбивается на  $m_h - 1$  идентичных шагов. Во время  $i$ -го шага, осуществляемого на промежутке времени  $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ , осуществляются следующие операции. Сначала находится управление в модели

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad t \in \delta_i, \quad (6)$$

согласно принципу обратной связи ( $\alpha(h)$  и  $K$  – вспомогательные параметры)

$$\varphi_i^h = \varphi_i^h(\xi_i^h, w_0^h(\tau_i)) = \begin{cases} -s_i \alpha^{-1}(h), & \text{если } |s_i| \leq \alpha(h)K \\ -K \operatorname{sign} s_i, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$s_i = \xi_i^h - w_0^h(\tau_i).$$

Затем находится фазовое состояние  $w^h(\tau_{i+1})$  модели в момент  $\tau_{i+1}$  согласно (5). После этого функция  $v^h(\cdot)$  – приближение функции  $\mu_{\max}(\cdot)$  – находится по правилу

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где

$$v_i^h = v_i^h(\xi_i^h, \varphi_i^h, w^h(\tau_i)) = \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1 - Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)}.$$

Алгоритм заканчивает работу в момент  $\vartheta$ .

Сходимость алгоритма устанавливается в теореме 1 (см. ниже).

Введем

**Условие 2** *Найдутся числа  $w_1 > 0$  и  $w_2 > 0$  такие, что для всех  $h \in (0, 1)$  и  $t \in T$  выполнены неравенства:*

$$w_1^h(t) \geq w_1, \quad w_2^h(t) \geq w_2.$$

Итак, имеет место

**Теорема 1** *Пусть выполнены условия 1, 2, а также следующие условия согласования параметров алгоритма*

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (7)$$

*Тогда имеют место сходимости*

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \rightarrow 0, \quad \sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \rightarrow 0,$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Как видно из этой теоремы, функция  $v^h(t) = v^h(\xi(t), \varphi^h(t), w^h(t))$  может рассматриваться в качестве "приближения" неизвестного переменного коэффициента  $\mu_{\max}(t)$  при соответствующем значении  $h$ , а функции  $w_1^h(t)$ ,  $w_2^h(t)$  — приближениями  $C_X(t)$  и  $C_S(t)$  соответственно.

### 3. Доказательство сходимости алгоритма

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 1 приведем вспомогательные оценки.

Пусть  $c^{(0)} = 2F_{\max}(C_{S,in}(t_0) + C_{\max}(\vartheta - t_0))$  и  $i(t) = \kappa((t - t_0)/\delta)$ , где  $\kappa(a)$  означает целую часть числа  $a$ . Введем величину

$$a(t) = d(\ln V(t))/dt.$$

**Лемма 1** Пусть  $|\dot{C}_{S,in}(t)| \leq C_{\max}$  и  $0 < F_{in}(t) \leq F_{\max}$  при почти всех  $t \in T$ . Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_0}^t V(\tau) a(\tau) C_{S,in}(\tau) d\tau - [C_{S,in}(\tau_{i(t)}) V(\tau_{i(t)}) - C_{S,in}(t_0) V(t_0)] - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^{i(t)-1} (C_{S,in}(\tau_{i+1}) - C_{S,in}(\tau_i)) V(\tau_i) \right| \leq c^{(0)} \delta \quad \text{при всех } t \in T. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Из неравенства

$$|V(t) - V(t + \delta)| \leq \int_t^{t+\delta} |F_{in}(\tau)| d\tau \leq F_{\max} \delta, \quad t, t + \delta \in T,$$

следует оценка

$$\left| \int_{t_0}^t \dot{C}_{S,in}(\tau) (V(\tau) - V_\delta(\tau)) d\tau \right| \leq F_{\max} (t - t_0) C_{\max} \delta, \quad (8)$$

где  $V_\delta(t) = V(\tau_i)$  при  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ . Заметим, что

$$\int_t^{t+\delta} |V(\tau)a(\tau)C_{S,in}(\tau)| d\tau \leq F_{\max}(C_{S,in}(t_0) + C_{\max}(\vartheta - t_0))\delta.$$

Поэтому при  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^{\tau_i} V(\tau)a(\tau)C_{S,in}(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t V(\tau)a(\tau)C_{S,in}(\tau) d\tau \right| &\leq \\ &\leq F_{\max}(C_{S,in}(t_0) + C_{\max}(\vartheta - t_0))\delta. \end{aligned} \quad (9)$$

В таком случае после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{\tau_i} V(\tau)a(\tau)C_{S,in}(\tau) d\tau = \\ &= V(\tau_i)C_{S,in}(\tau_i) - V(t_0)C_{S,in}(t_0) - \int_{t_0}^{\tau_i} V(\tau)\dot{C}_{S,in}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Нужное неравенство вытекает из (8), (9) и предыдущего равенства. Лемма доказана.

**Лемма 2** Пусть выполнены условия леммы 1,  $V(t) \geq V_0 > 0$  и

$$\tilde{b}(\tau) = \tilde{b}_j \text{ при } \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad |\tilde{b}_j| \leq d \text{ при } j \in [0 : m_h - 1].$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left| V^{-1}(t) \int_{t_0}^t V(\tau)\tilde{b}(\tau) d\tau - V^{-1}(\tau_{i(t)})\delta \sum_{j=0}^{i(t)} V(\tau_j)\tilde{b}_j \right| \leq c_1\delta \text{ при } t \in T.$$

Лемма 2 доказывается простыми алгебраическими преобразованиями.

Введем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{C}_{x\psi}(t) &= \psi(t) - a(t)C_{x\psi}(t), \quad t \in T, \\ \dot{C}_{S\psi}(t) &= -\frac{\psi(t)}{Y} + a(t)C_{S,in}(t) - a(t)C_{S\psi}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$C_{x\psi}(t_0) = C_X(t_0), \quad C_{S\psi}(t_0) = C_S(t_0)$$



и функцией  $\psi(\cdot)$  вида

$$\psi(t) = \psi_j^h = Y\varphi_j^h / (1 - Y) \quad \text{при } t \in [\tau_j, \tau_{j+1}).$$

Определим кусочно-постоянные функции

$$w_1^h(t) = w_1^h(\tau_i), \quad w_2^h(t) = w_2^h(\tau_i) \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \cap T.$$

**Лемма 3** Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Тогда верны неравенства

$$|C_{x\psi}(t) - w_1^h(t)| \leq c_2\delta, \quad |C_{S\psi}(t) - w_2^h(t)| \leq c_3\delta \quad \text{при } t \in T.$$

**Доказательство.** Заметим, что уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t) - a(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad f(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}),$$

имеет решение, которое может быть найдено по формуле Коши:

$$x(t) = V^{-1}(t)V(t_0)x_0 + V^{-1}(t) \int_{t_0}^t V(\tau)f(\tau) d\tau.$$

Поэтому решение системы (10) находится по формулам:

$$C_{x\psi}(t) = V^{-1}(t)V(t_0)C_X(t_0) + \int_{t_0}^t V^{-1}(t)V(\tau)\psi(\tau) d\tau,$$

$$C_{S\psi}(t) = V^{-1}(t)V(t_0)C_S(t_0) + \\ + \int_{t_0}^t V^{-1}(t)V(\tau)(a(\tau)C_{S,in}(\tau) - \psi(\tau)Y^{-1}) d\tau.$$

Справедливость леммы вытекает из этих равенств и лемм 1 и 2.

**Лемма 4** Пусть  $Y \in (0, 1)$  и выполнены условия леммы 3. Тогда справедливы неравенства

$$|C_X(t) - w_1^h(t)| \leq c_4(\delta + \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau), \quad (11)$$

$$|C_S(t) - w_2^h(t)| \leq c_5(\delta + \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau) \quad \text{при } t \in T.$$

**Доказательство.** Пусть  $\mu_1(t) = C_{x\psi}(t) - C_X(t)$ ,  $\mu_2(t) = C_{S\psi}(t) - C_S(t)$ . Второе и третье уравнения системы (1) могут быть переписаны в виде

$$\frac{dC_X(t)}{dt} = \frac{Y}{1-Y}OUR(t) - a(t)C_X(t),$$

$$\frac{dC_S(t)}{dt} = -\frac{1}{1-Y}OUR(t) + a(t)(C_{S,in}(t) - C_S(t)).$$

В таком случае, функции  $\mu_1(t)$  и  $\mu_2(t)$  являются решениями уравнений

$$\dot{\mu}_1(t) = \frac{Y}{1-Y}(\varphi^h(t) - OUR(t)) - a(t)\mu_1(t),$$

$$\dot{\mu}_2(t) = -\frac{1}{1-Y}(\varphi^h(t) - OUR(t)) - a(t)\mu_2(t),$$

с начальными условиями

$$\mu_1(t_0) = \mu_2(t_0) = 0.$$

Следовательно

$$\mu_1(t) = \frac{Y}{1-Y} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)(\varphi^h(\tau) - OUR(\tau))d\tau,$$

$$\mu_2(t) = -\frac{1}{1-Y} \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)(\varphi^h(\tau) - OUR(\tau))d\tau,$$

где  $\Phi(t, \tau) = V^{-1}(t)V(\tau)$ . В таком случае имеют место неравенства

$$|\mu_1(t)| \leq c_1 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad (12)$$

$$|\mu_2(t)| \leq c_2 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad t \in T. \quad (13)$$

Справедливость леммы вытекает из (12), (13) и леммы 3.

**Лемма 5** Пусть выполнены условия леммы 4 и  $C_X(t) \geq C_X > 0$ ,  $C_S(t) \geq C_S > 0$ . Тогда при выполнении условия 2, можно указать

такое  $h_* > 0$ , что при всех  $h \in (0, h_*)$  и всех  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i \in [0 : m_h - 1]$  справедливо неравенство

$$|v_i^h - \mu_{\max}(t)| \leq c_6(\delta + |\varphi_i^h - OUR(t)|) + \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau. \quad (14)$$

**Доказательство.** Воспользовавшись леммой 3 и условием 2, можно указать такие  $h_1$  и  $\delta_1$ , что для всех  $h \in (0, h_1)$  и  $\delta = \delta(h) \in (0, \delta_1)$  выполнены неравенства

$$C_{x\psi}(t) \geq c_\psi^{(1)} > 0, \quad C_{S\psi}(t) \geq c_\psi^{(2)} > 0 \quad \text{при } t \in T. \quad (15)$$

Введем величину

$$\Delta_{i,t}^h \equiv \left| \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1-Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)} - \frac{Y(K_S + C_{S\psi}(t))OUR(t)}{(1-Y)C_{x\psi}(t)C_{S\psi}(t)} \right|. \quad (16)$$

В силу условия 2, неравенств (15) и леммы 3 имеем оценки

$$\Delta_{i,t}^h \leq c_3(\delta + |\varphi_i^h - OUR(t)|), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad (17)$$

равномерные по всем  $i \in [0 : m_h - 1]$  и  $h \in (0, h_1)$ . Кроме того, в силу (12), (13) верны неравенства

$$\left| \frac{1}{C_X(t)C_S(t)} - \frac{1}{C_{x\psi}(t)C_{S\psi}(t)} \right| \leq c_4(|\mu_1(t)| + |\mu_2(t)|) \leq c_5 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad (18)$$

$$\left| \frac{1}{C_X(t)} - \frac{1}{C_{x\psi}(t)} \right| \leq c_6 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau, \quad (19)$$

Из (18), (19) следует

$$\Delta_t \equiv \left| \frac{K_S + C_{S\psi}(t)}{C_{x\psi}(t)C_{S\psi}(t)} - \frac{K_S + C_S(t)}{C_X(t)C_S(t)} \right| \leq c_7 \int_{t_0}^t |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)| d\tau. \quad (20)$$

Кроме того

$$\mu_{\max}(t) = \frac{\mu(C_S(t))(K_S + C_S(t))}{C_S(t)},$$

$$\mu(C_S(t)) = \frac{Y \cdot OUR(t)}{(1 - Y)C_X(t)}.$$

В таком случае

$$\mu_{\max}(t) = \frac{Y(K_S + C_S(t))OUR(t)}{(1 - Y)C_X(t)C_S(t)},$$

и

$$|v_i^h - \mu_{\max}(t)| = \left| \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1 - Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)} - \frac{Y(K_S + C_S(t))OUR(t)}{(1 - Y)C_X(t)C_S(t)} \right|.$$

Комбинируя (17), (20) и воспользовавшись неравенством

$$|v_i^h - \mu_{\max}(t)| \leq \Delta_{i,t}^h + \frac{Y}{1 - Y} |OUR(t)| \Delta_t,$$

$$t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1],$$

получим (14). Лемма доказана.

**Лемма 6** Пусть выполнены условия 1 и 2 и пусть в системе (5) величины  $\varphi_j^h$  находятся по формулам (6). Тогда справедливы неравенства

$$|w_0^h(\tau_i) - C_{DO}(\tau_i)|^2 \leq C^{(0)}(h + \delta + \alpha), \quad (21)$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |OUR(\tau)|^2 d\tau + C^{(1)}(h + \delta)\alpha^{-1}. \quad (22)$$

**Доказательство.** Для доказательства леммы оценим изменение величины

$$\varepsilon(t) = |\tilde{w}_0^h(t) - C_{DO}(t)|^2 + \alpha(h) \int_{t_0}^t \{|\varphi^h(\tau)|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau,$$

$$t \in T.$$

Здесь функция  $\tilde{w}_0^h(t)$ ,  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i \in [0 : m_h - 1]$ , определяется по правилу

$$\dot{\tilde{w}}_0^h(t) = k_{La}(C_{sat}^{en} - \xi_i^h) - \varphi_i^h + a(t)(C_{sat} - \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$\tilde{w}_0^h(\tau_i) = w_0^h(\tau_i).$$

Заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow \tau_{i+1}-0} \bar{w}_0^h(t) = w_0^h(\tau_{i+1}).$$

Пусть

$$\mu_i = 2(\bar{w}_0^h(\tau_i) - C_{DO}(\tau_i)) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\dot{\bar{w}}_0^h(t) - \dot{C}_{DO}(t)) dt.$$

Легко видеть, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau_{i+1}) &\leq \varepsilon(\tau_i) + \delta(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{\bar{w}}_0^h(\tau) - \dot{C}_{DO}(\tau)|^2 d\tau + \mu_i + \\ &+ \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\varphi_i^h|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим величину  $\mu_i$  в правой части (23). Имеем

$$\begin{aligned} \mu_i &= -2s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ k_{La}(C_{DO}(\tau) - \xi_i^h) + a(\tau)(C_{DO}(\tau) - \xi_i^h) + \right. \\ &\left. + OUR(\tau) - \varphi_i^h \right\} d\tau = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1i} &= 2k_{La}s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) d\tau, \\ \lambda_{2i} &= 2s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} a(\tau)(\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) d\tau, \\ \lambda_{3i} &= 2s_i^* \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\varphi_i^h - OUR(\tau)) d\tau, \\ s_i^* &= C_{DO}(\tau_i) - w_0^h(\tau_i). \end{aligned}$$

Поэтому, из (23), (24) получаем

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon(\tau_i) + \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji} + \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\varphi_i^h|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau + \delta L_i^h, \quad (25)$$

где

$$L_i^h = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left| k_{La}(\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) + a(\tau)(\xi_i^h - C_{DO}(\tau)) + \varphi_i^h - OUR(\tau) \right|^2 d\tau.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (25). Из (3) и условия 1 следует, что

$$\max\left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |C_{DO}(t)|, \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |C_X(t)|, \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |C_S(t)| \right\} \leq d_0 < +\infty.$$

В таком случае из этого неравенства и неравенства  $|\xi_i^h - C_{DO}(\tau_i)| \leq h$  выводим

$$\lambda_{1i} \leq d_1(h + \delta)\delta, \quad (26)$$

$$\lambda_{2i} \leq d_2(h + \delta)\delta, \quad (27)$$

$$\lambda_{3i} \leq 2s_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\varphi_i^h - OUR(\tau)) d\tau + d_3 h \delta, \quad (28)$$

$$s_i = \xi_i^h - w_0^h(\tau_i),$$

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} L_i^h \leq d_4. \quad (29)$$

Здесь  $d_j, j \in [0 : 4]$ , – постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде. Заметим, что

$$\varphi_i^h = \arg \min\{2s_i u + \alpha(h)u^2 : -K \leq u \leq K\}.$$

Тогда в силу (3), (6) и (28) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_{3i} + \alpha(h) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|\varphi_i^h|^2 - |OUR(\tau)|^2\} d\tau &\leq \\ &\leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ [2s_i \varphi_i^h + \alpha(h)|\varphi_i^h|^2] - \right. \\ &\left. - [2s_i OUR(\tau) + \alpha(h)|OUR(\tau)|^2] \right\} d\tau + d_3 h \delta \leq d_3 h \delta. \end{aligned} \quad (30)$$

Воспользовавшись (25) - (28), получим (для всех  $i \in [1 : m_h]$ ) следующую оценку

$$\varepsilon(\tau_i) \leq d_5(h + \delta). \quad (31)$$

Неравенства (21), (22) следуют из (31). Лемма доказана.

Монография [5] содержит теорему 1.2.1, которая применительно к нашему случаю может быть сформулирована следующим образом.

**Теорема 2** Пусть выполнены условия 1, 2, а также неравенства

$$\sup_{i \in [0 : m_h]} |w_0^h(\tau_i) - C_{DO}(\tau_i)| \leq \nu(h),$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau)|^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |OUR(\tau)|^2 d\tau + \nu_1(h),$$

где  $\nu(h) \rightarrow 0+$ ,  $\nu_1(h) \rightarrow 0+$  при  $h \rightarrow 0+$ . Тогда имеет место сходимость

$$\varphi^h(t) \rightarrow OUR(t) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

то есть

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Из лемм 4 - 6, а также теоремы 2 вытекает теорема 1. Таким образом, сходимость алгоритма установлена.

#### 4. Оценка скорости сходимости алгоритма

Приведем оценки скорости сходимости алгоритма.

**Теорема 3** Пусть функция  $\mu_{\max}(t)$  является функцией ограниченной вариации. Тогда верны следующие оценки скорости сходимости алгоритма

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \leq C_1 \lambda(h, \delta, \alpha),$$

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \leq C_2 \lambda^{1/2}(h, \delta, \alpha),$$

$$\sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \leq C_3 \lambda^{1/2}(h, \delta, \alpha).$$

Здесь  $\lambda(h, \delta, \alpha) = h + \delta + \alpha + (h + \delta)\alpha^{-1}$ ,  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

**Доказательство.** Легко видеть, что для всех  $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$  верны оценки

$$|\xi_i^h - C_{DO}(t)| \leq c_1(h + \delta), \quad (32)$$

$$|C_{DO}(t_0) - w_0^h(t_0)| \leq h, \quad (33)$$

$$|b(t) - b(\tau_i)| \leq c_2\delta, \quad |C_{DO}(t) - C_{DO}(\tau_i)| \leq c_3\delta, \quad (34)$$

где  $b(t) = \ln V(t)$ . Кроме того

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau_i}^t a(\tau) C_{DO}(\tau) d\tau - (b(\tau_{i+1}) - b(\tau_i)) \xi_i^h \right| \leq \quad (35) \\ & \leq \left| \int_{\tau_i}^t a(\tau) C_{DO}(\tau_i) d\tau - (b(\tau_{i+1}) - b(\tau_i)) \xi_i^h \right| + \\ & \quad + \left| \int_{\tau_i}^t a(\tau) (C_{DO}(\tau) - C_{DO}(\tau_i)) d\tau \right| \leq \\ & \leq c_4\delta^2 + |(b(t) - b(\tau_i)) C_{DO}(\tau_i) - (b(\tau_{i+1}) - b(\tau_i)) \xi_i^h| \leq \\ & \leq c_4\delta^2 + c_5h + |b(t)(C_{DO}(\tau_i) - \xi_i^h)| + |b(\tau_{i+1}) - b(t)| |\xi_i^h| \leq c_6(h + \delta). \end{aligned}$$

Из неравенства (21) выводим

$$|\tilde{w}_0^h(t) - C_{DO}(t)| \leq c_7(h + \delta + \alpha), \quad t \in T. \quad (36)$$

В свою очередь, из (32) - (36) следует неравенство

$$\sup_{t \in T} \left| \int_{t_0}^t (\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)) d\tau \right| \leq c_8(h + \delta + \alpha). \quad (37)$$

Воспользовавшись (22), получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)|^2 d\tau = \quad (38) \\ & = \int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau)|^2 d\tau - 2 \int_{t_0}^{\vartheta} \varphi^h(\tau) OUR(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{\vartheta} |OUR(\tau)|^2 d\tau \leq \end{aligned}$$



$$\leq 2 \int_{t_0}^{\vartheta} (OUR(\tau) - \varphi^h(\tau)) OUR(\tau) d\tau + c_9(h + \delta)\alpha^{-1}.$$

По условию теоремы  $\mu_{\max}(\cdot)$  является функцией ограниченной вариации. Следовательно, таковой является и функция  $OUR(t)$ . В таком случае из (37), (38) и леммы 1.3.3 [13] получаем

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |\varphi^h(\tau) - OUR(\tau)|^2 d\tau \leq c_{10}\lambda(h, \delta, \alpha). \quad (39)$$

Утверждение теоремы следует из (39) и лемм 4, 5.

Из теоремы 3 вытекает

**Следствие 1.** Пусть  $\delta(h) = h$ ,  $\alpha(h) = h^{1/2}$  и функция  $\mu_{\max}(t)$  является функцией ограниченной вариации. Тогда имеют место следующие оценки скорости сходимости алгоритма

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \leq c_1 h^{1/4},$$

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \leq c_2 h^{1/8}, \quad \sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \leq c_3 h^{1/8}.$$

Еще одно следствие верно для случая  $F_{in}^h(t) \equiv 0$ . Пусть вместо условия 1 выполнено

**Условие 3.**

$$F_{in}^h(t) = 0, \quad Y \in (0, 1), \\ C_X(t) \geq C_X > 0, \quad C_S(t) \geq C_S > 0.$$

Тогда второе и третье уравнения системы (1) принимают вид

$$\frac{dC_X(t)}{dt} = \frac{Y}{1-Y} OUR(t), \\ \frac{dC_S(t)}{dt} = -\frac{1}{1-Y} OUR(t).$$

Поэтому система  $M$  может быть взята в следующей форме

$$w_0^h(\tau_{i+1}) = w_0^h(\tau_i) + \delta \{k_{La}(C_{sat}^{en} - \xi_i^h) - \varphi_i^h\}, \\ w_1^h(\tau_{i+1}) = w_1^h(\tau_i) + \delta \frac{Y}{1-Y} \varphi_i^h, \\ w_2^h(\tau_{i+1}) = w_2^h(\tau_i) - \delta \frac{1}{1-Y} \varphi_i^h. \quad (40)$$

Следующее утверждение вытекает из результатов, приведенных выше.

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия 2, 3, система  $M$  имеет вид (40), а функция  $\varphi^h(t)$  – вид (6). Тогда справедливы утверждения теорем 1 – 3, а также следствия 1.

## 5. Результаты компьютерного моделирования

Описанный выше алгоритм был протестирован на модельном примере. Система (1) рассматривалась на промежутке времени  $[0, 3]$ . Коэффициент  $\mu_{\max}(t)$  равнялся  $\sin(t)$ . Предполагалось, что мы не знаем  $\mu_{\max}(t)$  и хотим его восстановить. Мы также рассчитываем восстановить состояния  $C_X(t)$  и  $C_S(t)$  по конечному числу измерений эволюции концентрации растворенного кислорода в реакторе  $C_{DO}(t)$ .

На рис. 1 – 3 приведены результаты вычислительного эксперимента. Предполагалось (см. (1)):

$$\begin{aligned} K_S &= 0.1, & Y &= 0.5, \\ C_{S,in} &= 0.2, & V(t_0) &= 1.5, \\ F_{in}(t) &= \sin(t), & C_{sat}^{en} &= C_{sat} = 0.5. \end{aligned}$$

Параметры алгоритма были взяты следующие

$$\alpha = 0.001, \quad K = 2.$$

Начальное состояние системы полагалось равным единице, т.е.

$$C_{DO}(t_0) = C_X(t_0) = C_S(t_0) = 1.$$

Система (1) решалась методом Эйлера с шагом  $\delta$ . Результаты вычислительного эксперимента показывают сходимость в среднем квадратичном  $v^h(t)$  к  $\mu_{\max}(t)$  и равномерную сходимость  $w_1^h(t)$  к  $C_X(t)$  и  $w_2^h(t)$  к  $C_S(t)$  при соответствующих значениях параметров  $\alpha$ ,  $h$  и  $\delta$ .

Рис. 1 отвечает случаю, когда  $h = 10^{-3} \cos(50t)$ ,  $\delta = 10^{-3}$ , рис. 2 – случаю  $h = 10^{-4} \cos(50t)$ ,  $\delta = 10^{-3}$ , рис. 3 – случаю  $h = 0$ ,  $\delta = 10^{-4}$ . На рисунках 1 – 3 сплошная линия изображает коэффициент  $\mu_{\max}(t)$  и состояния  $C_X(t)$ ,  $C_S(t)$ , пунктирная линия соответствует управлению в модели  $v^h(t)$  и координатам вспомогательной системы  $w_1^h(t)$  и  $w_2^h(t)$ .

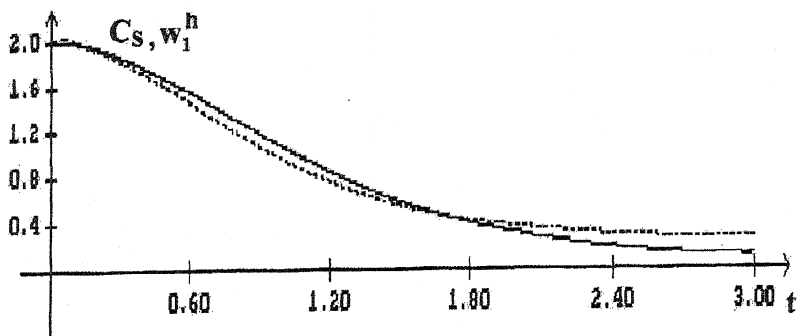
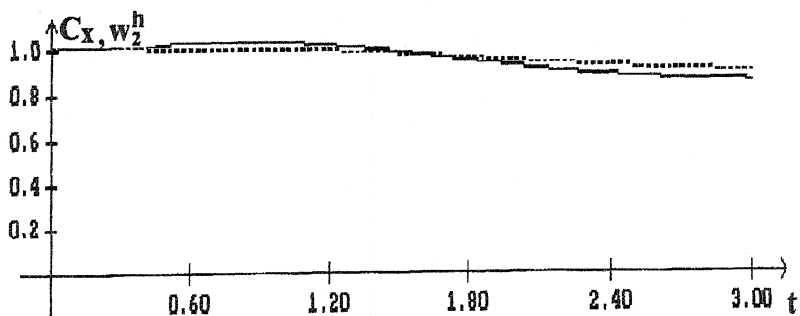
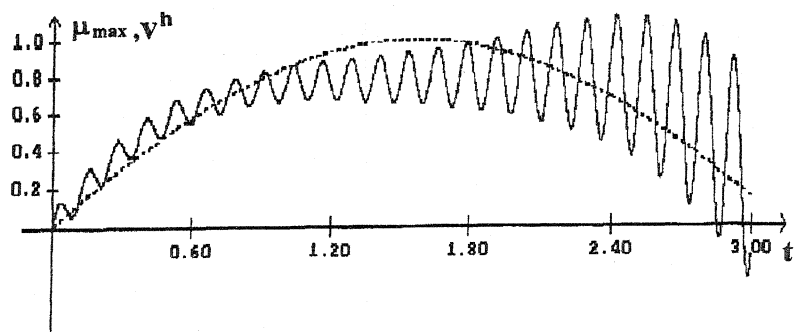


Рис. 1

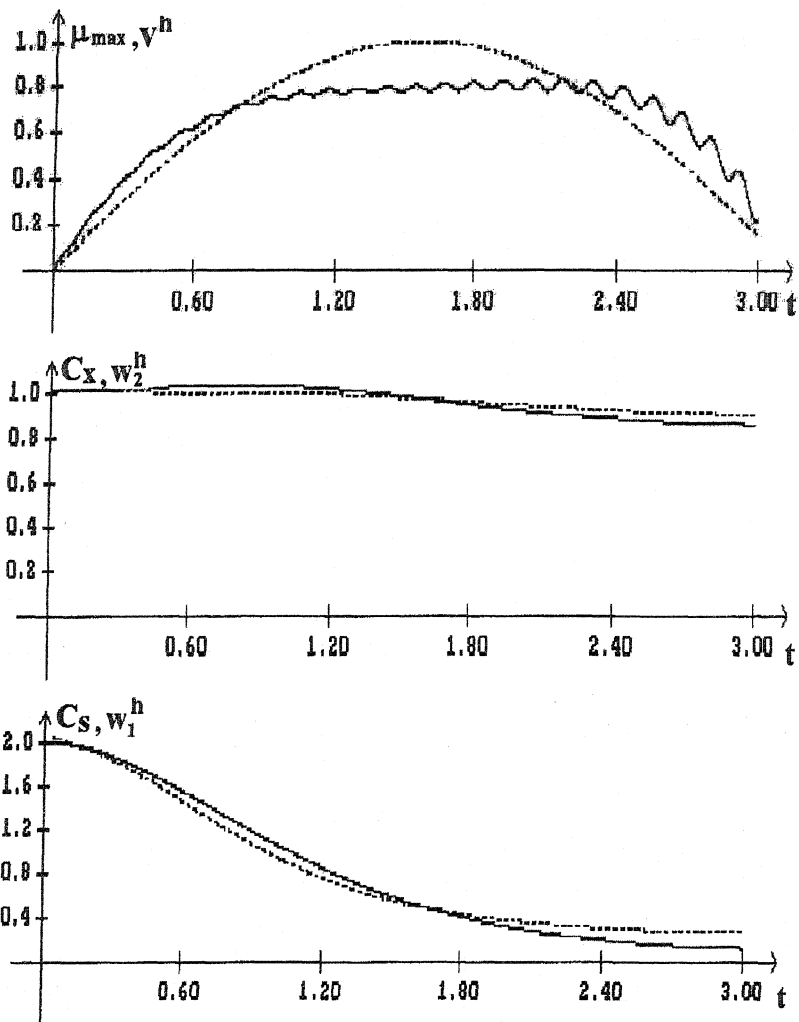


Рис. 2

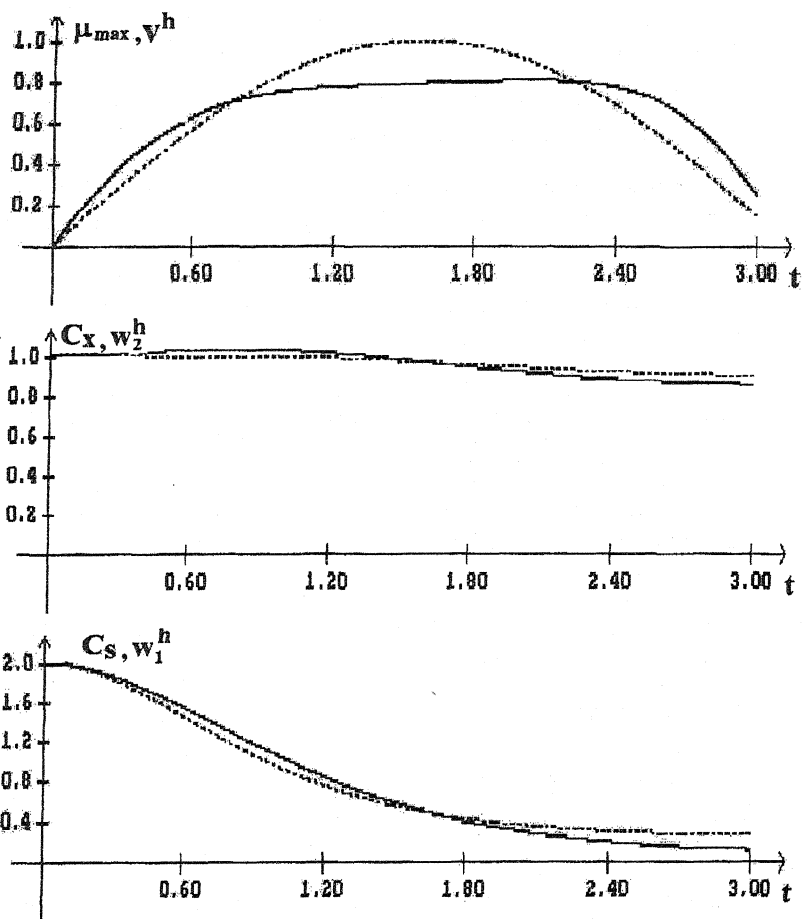


Рис. 3

## Литература

1. А.Н. Тихонов and В.Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1978.
2. M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, and S.P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. Transl. Mathem. Monographs, AMS, Providence, R.I., 1986.
3. H.T. Banks and K. Kunisch, *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems*. Birkhäuser, Boston, 1989.
4. Yu.S. Osipov and A.V. Kryazhimskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*. Gordon and Breach, London, 1995.
5. V.I. Maksimov, *Dynamical inverse problems for distributed systems*. VSP, The Netherlands, 2002.
6. A.V. Kryazhimskii, V.I. Maksimov and Yu.S. Osipov, Reconstruction of boundary sources through sensor observation. *IASA Working Paper, WP-96-97, Laxenburg, Austria*. (1996).
7. A.V. Kryazhimskii and V.I. Maksimov, On identification of nonobservable contamination inputs. *Environmental Modeling and Software* (2005) **20**, 1057 - 1061.
8. Н.Н. Красовский, А.И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, (1974).
9. P.A. Vanrolleghem and M. Van Daele, Optimal experimental design for structure characterization of biodegradation models: On-line implementation in a respirographic biosensor. *Water Science and Technology*, (1994) **30** no. 4, 243 - 253.
10. J.D. Stigter, D. Vries and K.J. Keesman, On Adaptive Optimal Input Design. *Proceedings of the European Control Conference, Cambridge, U.K.*, (2003), Paper 066.
11. K.J. Keesman, State and parameter estimation in biotechnical batch reactors. *Control Eng. Pract.* 10 (2): 219 - 225, 2002.

УДК 517.958:535.4

*Дмитриев В.И., Захаров Е.В., Никитина Е.В.* Тензорные функции Грина для осесимметричных моделей морских магнитотеллурических зондирований локально-неоднородных слоистых сред // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

Для задач магнитотеллурического зондирования в проводящих слоистых средах с осевой симметрией предложен метод расчета электромагнитных полей точечных (дипольных) источников с применением разложения тензорных функций Грина слоистой среды в ряды Фурье по азимутальной координате. Для произвольной системы точечных источников построены алгоритмы вычисления электромагнитных полей, распространяющихся через плоскую границу двух проводящих полупространств с различными постоянными значениями проводимости.

Библиогр.: 3.

*Ключевые слова:* магнитотеллурическое зондирование, уравнения Максвелла, тензорные функции Грина, ряды Фурье.

УДК 519.6

*Головина С.Г., Разборов А.Г.* О восстановлении неизвестной границы в смешанной задаче для уравнения теплопроводности // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

Исследован вопрос о восстановлении границы двумерной области, в которой поставлена начально-краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности, по известному во все моменты времени для некоторых точек области решению указанной задачи. Проведено сведение прямой задачи к интегральному уравнению, получены численные решения обратной задачи для случая, когда граница является эллипсом. Исследована чувствительность измеряемых величин к расположению относительно границы точки, в которой задается правая часть уравнения.

Ил.: 3. Библиогр.: 4 назв.

*Ключевые слова:* математическая модель, обратные задачи, уравнение теплопроводности, восстановление границы, численное моделирование.

УДК 519.658+517.988.68

*Деянов Р.З., Щедрин Б.М., Бурова Е.М.* Детерминированный метод регуляризации в задаче выделения линии фона при обработке экспериментальных данных // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

На основе метода регуляризации Тихонова разработан эффектив-

ный алгоритм и серия соответствующих программ для выделения гладкой линии фона. Алгоритм пригоден не только для выделения линии фона, но и для построения фильтрующей функции. В работе приведены примеры решения практических задач.

Ил.: 5. Библиогр.: 7 назв.

*Ключевые слова:* регуляризация, линия фона, первичная обработка экспериментальных данных.

УДК 517.958, 519.632

**Захаров Е. В., Калинин А. В.** Алгоритмы расчета и численный анализ полей постоянных токов в кусочно-однородной среде методом граничных интегральных уравнений // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

Рассматриваются методы граничных интегральных уравнений для расчета полей постоянных токов в трехмерных областях, заполненных кусочно-однородной средой. Дана постановка задачи и построена система граничных интегральных уравнений Фредгольма I рода, следующая непосредственно из формулы Грина. Детально рассматриваются этапы численного решения задачи, включающие построение и триангуляцию расчетных поверхностей, вычисление поверхностных интегралов и решение системы блочно-матричных уравнений.

Ил.: 7. Библиогр.: 12.

*Ключевые слова:* граничные интегральные уравнения, поля постоянных токов, кусочно-однородная среда, численные алгоритмы.

УДК 519.658+517.988.38

**Деянов Р.З., Щедрин Б.М.** Алгоритм последовательного спуска по системе локальных минимумов // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

Для поиска глобального минимума функции многих переменных заданной на односвязном компактном множестве разработан алгоритм последовательного спуска по системе локальных минимумов. В случае конечного числа точек локального минимума и знания оценки глобального минимума алгоритм за конечное число шагов находит точку глобального минимума. Приведены тестовые примеры.

Ил.: 6. Библиогр.: 6 назв.

*Ключевые слова:* глобальный минимум, многоэкстремальная оптимизация, метод наименьших квадратов.



УДК 517.977.58

**Жулин С.С.** Метод продолжения по параметру с коррекцией и его приложения // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

Настоящая статья посвящена методу продолжения по параметру решения нелинейных уравнений. Автором предложен алгоритм продолжения с коррекцией, доказана теорема о качестве аппроксимации, уделено внимание вопросам его эффективной численной реализации. В работе описывается подход к применению метода продолжения к поиску экстремали Понтрягина в задаче оптимального управления (ЗОУ). Предлагаются разработанные автором алгоритмы применения метода к нелинейным по управлению ЗОУ, задачам с негладкой областью управления, аффинным задачам со смешанными ограничениями.

Библиогр.: 30 назв.

*Ключевые слова:* численный метод, оптимальное управление, крайняя задача, продолжение по параметру, гомотопия.

УДК 517.977

**Кесман К., Максимов В.И.** О реконструкции неизвестных характеристик в одной системе третьего порядка // Прикладная математика и информатика № 30, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2008.

Рассматривается задача восстановления неизвестных характеристик в системе нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающих процессы в биореакторе с подпиткой. Указывается ориентированный на компьютерную реализацию алгоритм решения этой задачи. Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем и в более общем контексте вкладывается в проблематику теории некорректных задач. Представленная в работе методика идейно следует теории устойчивого динамического обращения.

Ил.: 3. Библиогр.: 11 назв.

*Ключевые слова:* реконструкция, управление.