

Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов

**ПОСТРОЕНИЕ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВ
ДОСТИЖИМОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ***

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \cdot a_1 \cdot x_1 - \mu \cdot x_1, & x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = (1 - u) \cdot a_2 \cdot x_2 - \mu \cdot x_2, & x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv x_2(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ t \in [0, T], \quad u = u(t) \in [0, 1], \end{cases} \quad (1)$$

где x_1, x_2 — фазовые переменные; u — скалярное управление, подчинённое геометрическому ограничению $0 \leq u \leq 1$; T — длительность процесса управления; положительные параметры

$$a_1, a_2, \mu, x_{10}, x_{20}, T \quad (2)$$

считаются заданными. В статье построено оптимальное решение задачи управления (1), причём решение найдено в аналитической форме. Сначала оптимальное решение находится с помощью принципа максимума Понтрягина [1]; этот способ решения задачи (1) интересен с методической точки зрения. Кроме того, рассмотрен другой подход к построению оптимального решения на основе некоторого специального представления функционала, см. раздел 6.

Первые слагаемые в дифференциальных уравнениях управляемого движения задачи (1) ассоциируются с линейной производственной функцией $f(x_1) = kx_1$. В модели (1) коэффициенты амортизации в обоих дифференциальных уравнениях считаются одинаковыми и равными μ . Аналогичная задача распределения ресурсов с различными положительными коэффициентами амортизации рассмотрена в разделе 8.

*Работа поддержана грантами ВШ-7581.2006.1, РФФИ 06-01-00359-а, РНП 2.1.1.1714

Кроме того, для рассматриваемого управляемого объекта решается задача построения множества достижимости $X(T)$. Для оптимального значения функционала получено явное аналитическое выражение в терминах параметров (2), удобное для дальнейшего анализа.

Управление u характеризует долю ресурсов, направляемых на рост первого сектора (переменная x_1), тогда как величина $(1 - u)$ характеризует долю ресурсов, направляемых на развитие второго сектора (переменная x_2).

Приведём качественное описание полученного результата. При "достаточно больших" значениях параметра T оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией времени с одной точкой переключения $\tau \in (0, T)$, причём $u(t) = 1$ на начальном участке $t \in [0, \tau]$, $u(t) = 0$ на финальном участке $t \in (\tau, T]$. При коротких промежутках планирования оптимальное управление $u(t) = 0$ для любого $t \in [0, T]$.

Множество достижимости $X(T)$ является выпуклым компактом, имеющим форму несимметричной лунки с двумя точками излома.

2. Формулировка результата

Теорема 1.

I. При выполнении неравенства

$$T > \frac{1}{a_1} \quad (3)$$

оптимальное управление в задаче (1) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad (4)$$

где точка переключения τ определяется равенством

$$\tau = T - \frac{1}{a_1} \in (0, T); \quad (5)$$

оптимальная траектория описывается соотношениями

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-\mu t} \xi_1(t), \\ x_2(t) = e^{-\mu t} \xi_2(t), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\xi_1(t) = \begin{cases} x_{10}e^{a_1 t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ x_{10}e^{a_1 \tau}, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad (7)$$

$$\xi_2(t) = \begin{cases} x_{20}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ x_{20} + a_2 x_{10} e^{a_1 \tau} (t - \tau), & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad (8)$$

оптимальное значение функционала имеет вид

$$\begin{aligned} J_{op} &= e^{-\mu T} [x_{20} + a_2 x_{10} e^{a_1 \tau} (T - \tau)] \equiv \\ &\equiv e^{-\mu T} \left[x_{20} + x_{10} \frac{a_2}{a_1} e^{a_1 T - 1} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

II. При условии

$$0 < T \leq \frac{1}{a_1} \quad (10)$$

оптимальное управление

$$u(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad (11)$$

оптимальная траектория имеет вид (6), где теперь

$$\xi_1(t) \equiv x_{10}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$\xi_2(t) \equiv x_{20} + a_2 x_{10} t, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (13)$$

оптимальное значение функционала имеет вид

$$J_{op} = e^{-\mu T} [x_{20} + a_2 x_{10} T]. \quad (14)$$

З а м е ч а н и е 1. Выражение (14) можно формально получить, полагая в формуле (9) $\tau = 0$. Случаи I и II можно объединить, полагая

$$\tau = h \left(T - \frac{1}{a_1} \right), \quad (15)$$

где

$$h(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0, \\ 1, & s > 0, \end{cases} \quad (16)$$

— функция Хевисайда. При условии (2) из (15) находим: $\tau = T - 1/a_1 \in (0, T)$, см. (15), а при условии (10) из (15) получаем: $\tau = 0$, и при этом формулу (3) для оптимального управления следует трактовать как формулу (11).

Теорема 2. Множество достижимости $X(T)$ рассматриваемого управляемого объекта представимо в виде

$$X(T) = e^{-\mu T} \cdot \Xi(T), \quad (17)$$

где множество $\Xi(T)$ есть выпуклый компакт, расположенный в плоскости переменных ξ_1, ξ_2 и ограниченный двумя кривыми $\partial\Xi^+(T)$ и $\partial\Xi^-(T)$, которые описываются параметрическими уравнениями

$$\partial\Xi^+(T) : \begin{cases} \xi_1 = x_{10}e^{a_1\theta} \\ \xi_2 = x_{20} + a_2x_{10}e^{a_1\theta}(T - \theta), \end{cases} \quad \theta \in [0, T], \quad (18)$$

$$\partial\Xi^-(T) : \begin{cases} \xi_1 = x_{10}e^{a_1(T-\sigma)} \\ \xi_2 = x_{20} + a_2x_{10}\sigma, \end{cases} \quad \sigma \in [0, T]. \quad (19)$$

Кривая (18) — верхняя часть границы $\partial\Xi(T)$ множества достижимости $\Xi(T)$ — параметризована с помощью параметра $\theta \in [0, T]$ — точки переключения управления

$$u^+(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \theta], \\ 0, & t \in (\theta, T]. \end{cases}$$

Кривая (19) — нижняя часть границы $\partial\Xi(T)$ множества достижимости $\Xi(T)$ — параметризована с помощью параметра $\sigma \in [0, T]$ — точки переключения управления

$$u^-(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \sigma], \\ 1, & t \in (\sigma, T]. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Выпуклый компакт $\Xi(T)$ имеет форму несимметричной лунки, граница которой имеет две точки излома A и B , см. раздел 7, рис. 1: точка A имеет координаты

$$A_1 = x_{10}, \quad A_2 = x_{20} + a_2x_{10}T,$$

точка B имеет координаты

$$B_1 = x_{10}e^{a_1T}, \quad B_2 = x_{20}.$$

Кривая (18) может быть описана уравнением

$$\partial\Xi^+(T) : \begin{cases} \xi_2 = G(\xi_1) \equiv x_{20} + a_2\xi_1 \left[T - \frac{1}{a_1} \ln \frac{\xi_1}{x_{10}} \right], \\ \xi_1 \in [x_{10}, x_{10}e^{a_1T}]. \end{cases}$$

Кривая (19) может быть описана уравнением

$$\partial \Xi(T) : \begin{cases} \xi_2 = g(\xi_1) \equiv x_{20} + a_2 x_{10} \left[T - \frac{1}{a_1} \ln \frac{\xi_1}{x_{10}} \right], \\ \xi_1 \in [x_{10}, x_{10} e^{a_1 T}], \end{cases}$$

причём

$$\begin{aligned} G(\xi_1) &\geq g(\xi_1), & g'(\xi_1) &< 0, \\ G(x_{10}) &= g(x_{10}), & G(x_{10} e^{a_1 T}) &= g(x_{10} e^{a_1 T}), \\ G''(\xi_1) &< 0, & g''(\xi_1) &> 0. \end{aligned}$$

Если выполняется условие (3), то функция $G(\xi_1)$ достигает своего максимального значения при $\xi_1 = x_{10} e^{a_1 T} \in (x_{10}, x_{10} e^{a_1 T})$, а при выполнении условия (10) функция $G(\xi_1)$ является убывающей.

3. Введение новых фазовых переменных и формулировка задачи управления (1) в новых переменных

Полагаем

$$\xi_1 = e^{\mu t} x_1, \quad \xi_2 = e^{\mu t} x_2. \quad (20)$$

В новых фазовых переменных (20) задача управления (1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = u \cdot a_1 \xi_1, & \xi_1(0) = x_{10}, \\ \dot{\xi}_2 = (1-u) \cdot a_2 \xi_1, & \xi_2(0) = x_{20}, \\ I \equiv \xi_2(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}, & u \in [0, 1], \\ t \in [0, T]. \end{cases} \quad (21)$$

Возвращение к исходным переменным выполняется по формулам

$$x_1 = e^{-\mu t} \xi_1, \quad x_2 = e^{-\mu t} \xi_2, \quad J = e^{-\mu T} I. \quad (22)$$

Следует отметить, что заменой переменных (20) достигается исключение новой фазовой переменной ξ_2 в правой части второго дифференциального уравнения (21). Поэтому функционал I записывается в форме

$$I = x_{10} + \int_0^T (1-u) a_2 \xi_1 dt, \quad (23)$$

а задача Майера (21) может быть представлена в виде следующей одномерной задачи оптимального управления с интегральным функционалом (задача Лагранжа)

$$\begin{cases} \dot{z} = ua_1z, & z(0) = z_0 \equiv x_{10}, \\ I_0 \equiv \int_0^T (1-u)a_2z dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ t \in [0, T], & u \in [0, 1], \end{cases} \quad (24)$$

где для фазовой переменной $z \equiv \xi_1$ используется обозначение без индекса. В силу (23) имеем:

$$I = x_{20} + I_0. \quad (25)$$

Далее мы будем решать задачу (24). Отметим, что

$$\xi_2(t) = x_{20} + \int_0^t [1 - u(s)]a_2z(s) ds. \quad (26)$$

4. Решение задачи управления (24) с помощью принципа максимума Понтрягина

Составим функцию Гамильтона-Понтрягина, полагая в ней $\psi_0 = 1$:

$$K(z, \psi, u) = (1-u)a_2z + \psi ua_1z.$$

Запишем сопряжённое уравнение

$$\dot{\psi} = -K'_z \equiv -ua_1\psi - (1-u)a_2.$$

Представим частную производную K'_u в виде

$$K'_u = [a_1\psi - a_2]z \equiv \pi \cdot z,$$

где множитель

$$\pi = \pi(\psi) \equiv a_1\psi - a_2 \quad (27)$$

— функция переключения. Принимая во внимание положительность фазовой переменной z , из условия максимума

$$K \Rightarrow \max_{u \in [0,1]}$$

находим максимизатор

$$u_*(\psi) \equiv \operatorname{argmax}_{u \in [0,1]} K = \begin{cases} 0, & \pi < 0, \\ 1, & \pi > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Случай $\pi = 0$ для данной задачи неактуален, особых режимов в ней нет. Максимизатор (28) может быть записан в терминах функции Хевисайда:

$$u_*(\psi) = h(\pi), \quad (29)$$

где $h(\cdot)$ — функция Хевисайда (16).

Краевая задача принципа максимума для задачи управления (24) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{z} = ua_1z, & z(0) = z_0, \\ \dot{\psi} = -ua_1\psi - (1-u)a_2, & \psi(T) = 0, \\ 0 \leq t \leq T, & u = u_*(\psi) \equiv h(\pi). \end{cases} \quad (30)$$

Пусть $(z(t), \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (31)$

— решение краевой задачи (30). Решение (31) будет построено ниже. Сначала покажем, что сопряжённая переменная $\psi(t)$ — вторая компонента решения (31) — является монотонно убывающей функцией времени, причём

$$\psi(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T), \quad (32)$$

а в момент времени $t = T$ сопряжённая переменная обращается в нуль в соответствии с условием трансверсальности

$$\psi(T) = 0.$$

Действительно, записанное выше сопряжённое уравнение, принимая во внимание обозначение (27), можно переписать в виде

$$\dot{\psi} = -u\pi - a_2,$$

или, в силу (29), в виде

$$\dot{\psi} = -\pi h(\pi) - a_2. \quad (33)$$

Так как $\pi h(\pi) \geq 0$, то из (33) следует, что $\dot{\psi} < 0$, а это неравенство влечёт монотонное убывание сопряжённой переменной $\psi(t)$ и свойство (32). Более того, из (33) следует, что сопряжённая переменная $\psi(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{\psi}(t)$.

Подстановка сопряжённой переменной $\psi(t)$ в функцию переключения (27) приводит к следующей функции времени

$$\Pi(t) \equiv \pi(\psi)|_{\psi=\psi(t)} = a_1\psi(t) - a_2, \quad (34)$$

которую будем называть программной функцией переключения. Ясно, что экстремальное управление $u(t)$ (программа) выражается через функцию (34) следующим образом

$$u(t) = h(\Pi(t)). \quad (35)$$

Из отмеченных выше свойств сопряжённой переменной вытекают следующие свойства функции (34):

- $\dot{\Pi}(t) < 0$, функция (34) является монотонно убывающей функцией времени
- $\Pi(T) = a_1\psi(T) - a_2 = -a_2 < 0$.

Отсюда следует, что функция $\Pi(t)$ имеет не более одного корня на отрезке времени $[0, T]$.

Если выполняется условие

$$\Pi(0) > 0, \quad (36)$$

то функция $\Pi(t)$ имеет единственный корень $\tau \in (0, T)$, причём

$$\begin{aligned} \Pi(t) &> 0 \text{ при } t \in [0, \tau), \\ \Pi(t) &< 0 \text{ при } t \in (\tau, T]. \end{aligned}$$

Поэтому экстремальное управление (35) устроено следующим образом

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in (\tau, T]. \end{cases} \quad (37)$$

Будем полагать для функции (37) $u(\tau) = 1$.

Если выполняется условие

$$\Pi(0) \leq 0, \quad (38)$$

то экстремальное управление $u(t)$ полагаем равным нулю:

$$u(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (39)$$

Обратимся сейчас к нахождению решения (31) краевой задачи (30) и соответствующего экстремального управления $u(t)$. Отдельно будут рассмотрены случаи (36) и (38).

Пусть выполняется условие (36). Тогда существует единственный корень $\tau \in (0, T)$ функции $\Pi(t)$. Рассмотрим сначала область

$$t \in (\tau, T]; \quad (40)$$

при этом имеем:

$$\Pi(t) < 0, \quad u(t) = 0$$

и из краевой задачи (30) получаем:

$$\dot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) \equiv z(\tau), \quad t \in [\tau, T], \quad (41)$$

$$\dot{\psi} = -a_2, \quad \psi(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = a_2(T - t), \quad t \in [\tau, T]. \quad (42)$$

Из (42) и (34) следует, что

$$\Pi(t) = a_2[a_1(T - t) - 1], \quad t \in [\tau, T],$$

и условие $\Pi(\tau) = 0$ позволяет определить точку переключения τ :

$$T - \tau = \frac{1}{a_1}, \quad (43)$$

$$\tau = T - \frac{1}{a_1} \in (0, T). \quad (44)$$

Из (42) и (43) можно определить значение сопряжённой переменной $\psi(t)$ в момент времени τ :

$$\psi(\tau) = a_2(T - \tau) = \frac{a_2}{a_1} > 0. \quad (45)$$

Теперь рассмотрим область

$$t \in [0, \tau); \quad (46)$$

при этом имеем: $\Pi(t) > 0$, $u(t) = 1$, и из краевой задачи (30) получаем

$$\dot{z} = a_1 z, \quad z(0) = z_0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0 e^{a_1 t}, \quad t \in [0, \tau], \quad (47)$$

$$\dot{\psi} = -a_1 \psi, \quad \psi(\tau) = \frac{a_2}{a_1} \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = \psi(\tau) e^{a_1(\tau - t)}, \quad t \in [0, \tau]. \quad (48)$$

Из последних соотношений находим значение сопряжённой переменной $\psi(t)$ в момент времени $t = 0$:

$$\psi(0) = \psi(\tau)e^{a_1\tau} = \frac{a_2}{a_1} e^{a_1\left(T - \frac{1}{a_1}\right)}. \quad (49)$$

Используя соотношение (49), находим значение функции (34) в момент времени $t = 0$:

$$\Pi(0) = a_1\psi(0) - a_2 = a_2e^{a_1\left(T - \frac{1}{a_1}\right)} - a_2 = a_2\left[e^{a_1\left(T - \frac{1}{a_1}\right)} - 1\right]. \quad (50)$$

Формула (50) показывает, что условие (36) $\Pi(0) > 0$ равносильно следующему

$$T > \frac{1}{a_1}, \quad (51)$$

см. условие (3) в теореме 1. Таким образом, при выполнении условия (51) найдено решение (31) краевой задачи принципа максимума (30), причём соотношения (41), (42) и (47), (48) позволяют записать формулы

$$z(t) = \begin{cases} z_0 e^{a_1 t}, & t \in [0, \tau], \\ z_0 e^{a_1 \tau}, & t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (52)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1} e^{a_1(\tau-t)}, & t \in [0, \tau], \\ a_2(T-t), & t \in [\tau, T], \end{cases} \quad (53)$$

соответствующее экстремальное управление $u(t)$ определяется формулой (37), а точка переключения $\tau \in (0, T)$ имеет вид (44). Отметим, функция (53) имеет непрерывную производную в точке τ :

$$\dot{\psi}(\tau - 0) = \dot{\psi}(\tau + 0) = \dot{\psi}(\tau).$$

В случае

$$\Pi(0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < T \leq \frac{1}{a_1} \quad (54)$$

имеем: $u(t) \equiv 0$,

$$z(t) = z_0, \quad t \in [0, T], \quad (55)$$

$$\psi(t) = a_2(T-t), \quad t \in [0, T], \quad (56)$$

$$\Pi(0) = a_1\psi(0) - a_1 = a_1a_2T - a_2 = a_1a_2\left[T - \frac{1}{a_1}\right] \leq 0.$$

Итак, построено экстремальное решение задачи оптимального управления (24). Оптимальность построенного экстремального решения вытекает из теоремы о достаточных условиях оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина, см. [3], [4]; этот вопрос кратко обсуждается в следующем разделе. Из полученных соотношений (51)-(56), (25), (26) вытекает справедливость теоремы 1.

5. Обоснование оптимальности экстремального решения задачи управления (24)

При решении задачи (24) построен максимизатор (28), (29) функции Гамильтона-Понтрягина K . Функция максимума

$$M(z, \psi) = K(z, \psi, u)|_{u=u_*(z, \psi)}$$

приобретает вид

$$M(z, \psi) = [\pi h(\pi) + a_2]z, \quad (57)$$

где $\pi \equiv a_1\psi - a_2$ — функция переключения (27). Функция (57) и её производная

$$M'_z(z, \psi) = \pi h(\pi) + a_2 \quad (58)$$

определены и непрерывны при всех z, ψ . Сопряжённое уравнение допускает запись в форме

$$\dot{\psi} = -M'_z(z, \psi),$$

см. (58) и (33). Наконец, функция (57) линейна по z , что позволяет говорить о выполнении условия её вогнутости по z . Привлечение теоремы о достаточных условиях оптимальности [3], [4] влечёт оптимальность построенного экстремального решения задачи (24).

6. Альтернативный способ решения задачи управления (24)

В задаче (24) правый конец $z(T)$ траектории свободен. Введём в рассмотрение семейство задач управления с фиксированными концами траектории:

$$\begin{cases} \dot{z} = ua_1z, & u \in [0, 1], & t \in [0, T], \\ z(0) = z_0, & z(T) = z_1, \\ I_{0, z_1} \equiv \int_0^T (1-u)a_2z dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (59)$$

Семейство задач (59) зависит от параметра $z_1 \geq z_0$. Условием управляемости и разрешимости задачи (59) является включение

$$z_1 \in Z(T), \quad (60)$$

где множество $Z(t) \equiv [z_-(t), z_+(t)]$ — отрезок с концами

$$z_-(t) \equiv z_0, \quad z_+(t) = z_0 e^{a_1 t}, \quad t \in [0, T]$$

— представляет собой множество достижимости данного управляемого объекта в момент времени t . Функции $z_-(t)$, $z_+(t)$ соответствуют управлениям $u \equiv 0$, $u \equiv 1$. Для нахождения решения задачи (59) строится множество управляемости

$$\hat{Z}(t) = [\hat{z}_-(t), \hat{z}_+(t)], \quad t \in [0, T] \quad (61)$$

— отрезок с концами

$$\hat{z}_-(t) = z_1 e^{a_1(T-t)}, \quad \hat{z}_+(t) \equiv z_1.$$

Последние функции соответствуют управлениям $u \equiv 1$, $u \equiv 0$ при начальном условии $z(T) = z_1$. Любая допустимая траектория $z(t)$ в задаче (59) принадлежит пересечению множеств (60) и (61):

$$z(t) \in \bar{Z}(t) \equiv Z(t) \cap \hat{Z}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (62)$$

Множество $\bar{Z}(t)$ непусто и его верхняя граница описывается функцией

$$\bar{z}_+(t) = \max\{z_+(t), z_1\}. \quad (63)$$

Функционал I_{0, z_1} преобразуем следующим образом: из дифференциального уравнения в (59) находим

$$u = \frac{\dot{z}}{a_1 z}$$

и подставляем это выражение в интегрант функционала:

$$\begin{aligned} I_{0, z_1} &= \int_0^T \left[1 - \frac{\dot{z}}{a_1 z} \right] a_2 z \, dt = \int_0^T \left[a_2 z - \frac{a_2}{a_1} \dot{z} \right] dt = \\ &= \frac{a_2}{a_1} (z_0 - z_1) + \int_0^T a_2 z(t) \, dt. \end{aligned}$$

Здесь внеинтегральный член не зависит от управления, а интеграл принимает максимальное значение при ограничении (62), когда траектория $z(t)$ совпадает с верхней границей (63) множества $\bar{Z}(t)$, т.е. при

$$z(t) = \bar{z}_+(t).$$

Это позволяет утверждать, что максимальное значение функционала в задаче (59) выражается формулой

$$m(z_1) = \max_{u(\cdot)} I_{0,z_1} = \frac{a_2}{a_1} (z_0 - z_1) + \int_0^T a_2 \bar{z}_+(t) dt.$$

Решая задачу максимизации

$$m(z_1) \Rightarrow \max_{z_1 \in Z(T)},$$

приходим к требуемому результату:

- при условии (3)

$$z_{1,\text{оп}} \equiv \operatorname{argmax}_{z_1 \in Z(T)} m(z_1) = z_0 e^{a_1 \tau}, \quad \tau = T - \frac{1}{a_1} \in (0, T),$$

- при условии (10)

$$z_{1,\text{оп}} = z_0.$$

7. Иллюстрации

Здесь приводятся иллюстрации к тексту статьи при следующем наборе параметров:

$$a_1 = 3/5, \quad a_2 = 4/5, \quad \mu = 1/10, \quad x_{10} = 2, \quad x_{20} = 1.$$

На рис. 1 показаны точка x_0 и множества достижимости на фазовой плоскости $\xi_1 \xi_2$ для трёх значений параметра T : $T = 1, 2, 3$. Множество $\Xi(T)$, при $T = 3$, имеет форму лунки с двумя точками излома A и B , показанная на этом рисунке точка $C \in \partial \Xi(T)$ отвечает значению параметра $\tau = T - 1/a_1 = 4/3$ и имеет максимальную координату $\xi_2(T)$; при $T = 1$ аналогичная точка C совпадает с левой точкой излома $A \in \partial \Xi(1)$. На рис. 2 показаны множества достижимости $X(T)$ при $T = 1, 2, 3$, полученные из множеств $\Xi(T)$

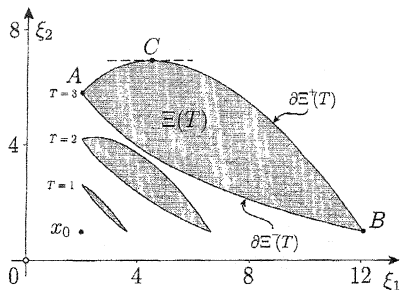


Рис. 1

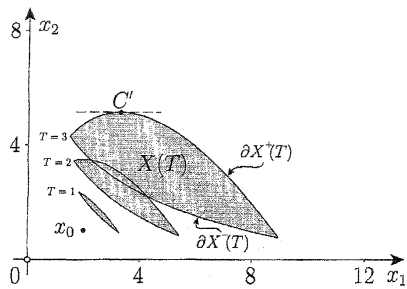


Рис. 2

в соответствии с формулой (17). Точка $C' \in \partial X^*(3)$ имеет максимальную ординату.

При $T = 3$ на рис. 3 показана оптимальная траектория x_0SC на фазовой плоскости $\xi_1\xi_2$, а на рис. 4 — оптимальная траектория $x_0S'C'$ на фазовой плоскости x_1x_2 .

На рис. 5 изображён график сопряжённой переменной $\psi(t)$, см. формулу (53). Экспоненциальный участок этого графика, соответствующий значениям времени $t \in [0, \tau]$, гладко сопрягается в точке τ с его линейным участком, при $t \in [\tau, T]$. На рис. 6 показаны график функции переключения $\Pi(t)$, см. формулу (34), и график оптимального управления $u(t)$, см. формулу (35), с точкой переключения τ .

На рис. 7 показана зависимость координат $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ оптимальной траектории в переменных (20) от времени t . На рис. 8 показана зависимость координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ оптимальной траектории от времени t . Расчёт выполнен при $T = 3$.

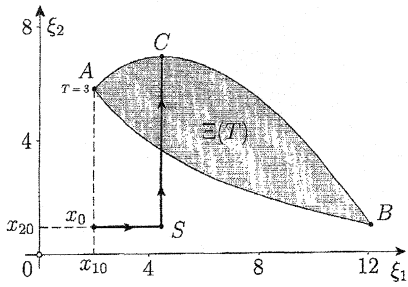


Рис. 3

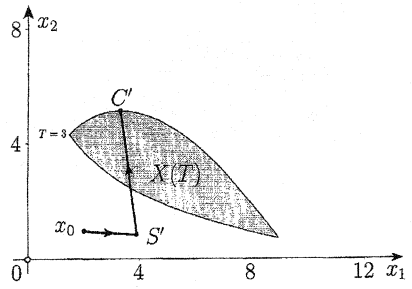


Рис. 4

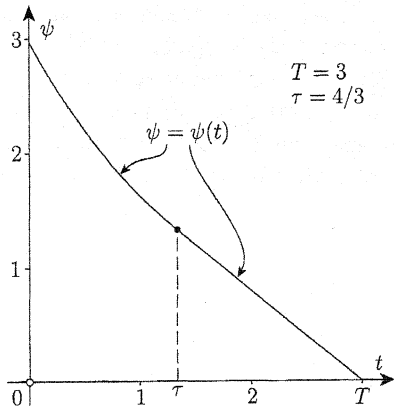


Рис. 5

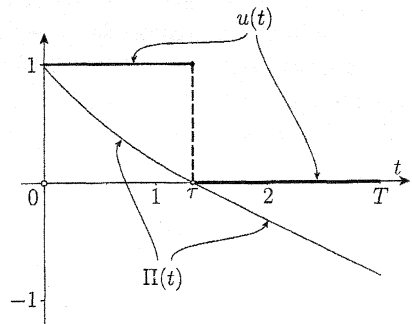


Рис. 6

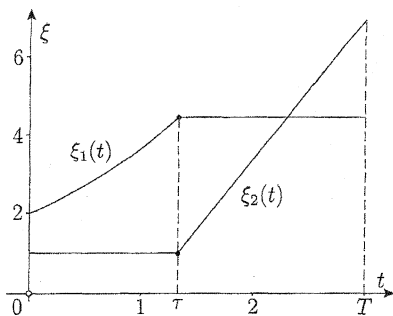


Рис. 7

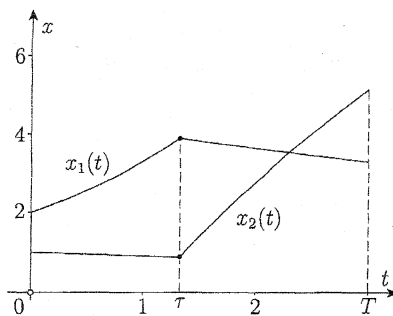


Рис. 8

8. Краткое обсуждение задачи распределения ресурсов в случае различных коэффициентов амортизации

8.1. Постановка задачи

Рассмотрим здесь модифицированную задачу распределения ресурсов (1) с различными коэффициентами амортизации:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \cdot a_1 \cdot x_1 - \mu_1 \cdot x_1, & x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = (1 - u) \cdot a_2 \cdot x_1 - \mu_2 \cdot x_2, & x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J[u] \equiv x_2(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ t \in [0, T], \quad u = u(t) \in [0, 1], \end{cases} \quad (64)$$

где $a_1, a_2, \mu_1, \mu_2, x_{10}, x_{20}, T$ — известные положительные параметры. Введём обозначение $\nu = \mu_2 - \mu_1$. При $\nu = 0$ задача (64) превращается в задачу (1), полное решение которой дано в разделе 2, см. теоремы 1 и 2. Поэтому далее предполагается, что $\nu \neq 0$, причём выполняется условие

$$a_1 + \nu > 0. \quad (65)$$

При положительных значениях параметра ν условие (65) выполняется автоматически, а при отрицательных значениях ν имеет место включение $\nu \in (-a_1, 0)$.

8.2. Введение новых фазовых переменных. Формулировка задачи в новых переменных

Полагая

$$\xi_i = e^{\mu_i t} x_i, \quad i = 1, 2, \quad (66)$$

получаем дифференциальные уравнения управляемого движения в новых фазовых переменных (66):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = u \cdot a_1 \cdot \xi_1, & \xi_1(0) = x_{10}, \\ \dot{\xi}_2 = (1 - u) \cdot a_2 \cdot \xi_1 \cdot e^{\nu t}, & \xi_2(0) = x_{20}. \end{cases} \quad (67)$$

Из второго уравнения (67) следует, что

$$J \equiv x_2(T) = e^{-\mu_2 T} \xi_2(T), \quad \text{где } \xi_2(T) = \xi_2(0) + I_0, \quad (68)$$

$$I_0 = \int_0^T [1 - u(t)] a_2 e^{\nu t} \xi_1(t) dt. \quad (69)$$

В силу соотношений (66) – (69) задача оптимального управления (64) размерности 2 сводится к следующей одномерной задаче оптимального управления с интегральным функционалом

$$\begin{cases} \dot{z} = u a_1 z, & z(0) = z_0 \equiv x_{10} > 0, \\ I_0[u] = \int_0^T e^{\nu t} [1 - u(t)] a_2 z(t) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ t \in [0, T], & u \in [0, 1]. \end{cases} \quad (70)$$

Здесь одномерная фазовая переменная z совпадает с ξ_1 . После нахождения решения одномерной задачи (70) построение оптимального решения двумерной задачи выполняется на основе формул (66), (68) и (69).

8.3. Решение задачи (70)

С помощью принципа максимума Понтрягина можно показать, что оптимальное управление в задаче (70), (65) имеет не более одной точки переключения τ , причём на финальном участке времени $t \in (\tau, T]$ оно принимает нулевое значение, тогда как на начальном

участке времени $[0, \tau]$ это управление равно 1. Поэтому поиск оптимального управления в задаче (64), (65) сводится к нахождению оптимальной точки переключения τ . Речь идёт о классе управлений

$$u(t, \tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad (71)$$

с одной точкой переключения $\tau \in [0, T]$, которую следует определить из условия максимальности функционала I_0 в задаче (64), (65). Последняя задача допускает следующую формализацию

$$\begin{cases} \Phi(\tau) \equiv \int_0^T e^{\nu t} [1 - u(t, \tau)] a_2 z(t, \tau) dt \rightarrow \max_{\tau \in [0, T]}, \\ \dot{z}(t, \tau) = u(t, \tau) a_1 z(t, \tau), \quad z|_{t=0} = z_0 > 0. \end{cases} \quad (72)$$

Очевидно

$$z(t, \tau) = \begin{cases} z_0 e^{a_1 t}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ z_0 e^{a_1 \tau}, & \tau < t \leq T. \end{cases} \quad (73)$$

Из (72), (73) следует, что

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau}^T e^{\nu t} a_2 z_0 e^{a_1 \tau} dt = a_2 z_0 e^{a_1 \tau} \frac{e^{\nu T} - e^{\nu \tau}}{\nu},$$

или

$$\Phi(\tau) = a_2 z_0 \varphi(\tau),$$

где

$$\varphi(\tau) = e^{a_1 \tau} \frac{e^{\nu T} - e^{\nu \tau}}{\nu}. \quad (74)$$

Так как $a_2 > 0$, $z_0 > 0$, то задача (72) сводится к задаче максимизации скалярной функции (74) на отрезке $[0, T]$ при условии (65):

$$\varphi(\tau) \rightarrow \max_{\tau \in [0, T]}. \quad (75)$$

Заметим, что $\varphi(\tau) > 0 \forall \tau \in [0, T)$, $\varphi(T) = 0$. Первая и вторая производные функции (74) допускают запись в форме

$$\varphi'(\tau) = a_1 \varphi(\tau) - e^{(a_1 + \nu)\tau}, \quad \varphi''(\tau) = a_1 \varphi'(\tau) - (a_1 + \nu) e^{(a_1 + \nu)\tau}.$$

Уравнение $\varphi'(\tau) = 0$ имеет единственный корень

$$\tau_*(\nu) \equiv T - \frac{1}{\nu} \ln \left(1 + \frac{\nu}{a_1} \right) < T \quad (76)$$

(при выполнении предположения (65) имеем $1 + \nu/a_1 > 0$). При этом

$$\varphi'(\tau) \Big|_{\tau=\tau_*(\nu)} = 0, \quad \varphi''(\tau) \Big|_{\tau=\tau_*(\nu)} = -(a_1 + \nu)e^{(a_1+\nu)\tau_*(\nu)} < 0,$$

то есть функция $\varphi(\tau)$ достигает максимального значения в точке (76). Отсюда следует

Теорема 3. Пусть выполнено неравенство (65).

I. При условии

$$\tau_*(\nu) \equiv T - \frac{1}{\nu} \ln \left(1 + \frac{\nu}{a_1} \right) > 0 \quad (77)$$

точка

$$\tau = \tau_*(\nu) \in (0, T)$$

служит максимизатором в задаче (75)

II. При условии

$$T - \frac{1}{\nu} \ln \left(1 + \frac{\nu}{a_1} \right) \leq 0 \quad (78)$$

максимальное значение в задаче (75) достигается при $\tau = 0$.

Отсюда следует, что оптимальное управление в задаче (64), (65) при условии (77) имеет вид (71) с единственной точкой переключения $\tau = \tau_*(\nu) \in (0, T)$, а при условии (78) — оптимальное управление тождественно равно нулю.

З а м е ч а н и е 3. Описанный результат позволяет получить для задачи (64), (65) утверждения, аналогичные утверждениям теорем 1 и 2 для задачи (1), причём условие (3) заменяется условием (77), а условие (10) — условием (78). Так как

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\nu} \ln \left(1 + \frac{\nu}{a_1} \right) = \frac{1}{a_1},$$

то условия (77), (78) при $\nu \rightarrow 0$ превращаются в условия (3), (10), отвечающие значению $\nu = 0$.

З а м е ч а н и е 4. Обоснование оптимальности предложенного решения задачи (64), (65) можно выполнить, применяя схему раздела 6, на основе специального интегрального представления функционала.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. 1961.
2. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М. МАКС Пресс. 2007.
3. Киселёв Ю.Н. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 2003. с. 57–67.
4. Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды Института Математики и Механики УрО РАН. Екатеринбург. 2006. Т.12. №2. с. 3–17.
5. Киселёв Ю.Н., Решетов В.Ю., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Построение оптимального решения и множеств достижимости в одной задаче распределения ресурсов // Сб. “Проблемы оптимального управления”. Выпуск 2. М.: МАКС Пресс, 2007. с. 106–120.