*В. В. Кочергин, А. В. Михайлович*

# О СХЕМНОЙ СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ K-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ В ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ БАЗИСЕ*

## Определения и постановка задачи

В работе исследуется сложность реализации функций $k$-значной ($k \geq 2$) логики схемами из функциональных элементов в бесконечном базисе $B_L$, состоящем из всех монотонных (относительно порядка $0 < 1 < \ldots < k-1$) функций $k$-значной логики и отрицания Лукасевича, т. е. функции $N_L(x) = k-1-x$. Ранее в статье [1] изучалась сложность реализации функций $k$-значной ($k \geq 3$) логики схемами в бесконечном базисе $B_P$, состоящем из всех монотонных функций и отрицания Поста, т. е. функции $N_P(x) = x+1 \pmod{k}$. Эти две задачи тесно связаны с задачей о немонотонной сложности (см., например, [2]) функций $k$-значной логики в базисах $B_L$ и $B_P$, которая, в свою очередь, является обобщением классической задачи [3, 4] об инверсионной сложности булевых функций.

Дадим соответствующие определения.

Обозначим множество $\{0,1,\ldots,k-1\}$ через $E_k$. Последовательность

$$\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n}),\ \tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21},\ldots,\alpha_{2n}),\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_r = (\alpha_{r1},\ldots,\alpha_{rn})$$

наборов из множества $E_k^n$ назовем *возрастающей цепью относительно порядка* $0 < 1 < \ldots < k-1$ или просто *цепью*, если все наборы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij} \leq \alpha_{i+1,j}, \quad i = 1,\ldots,r-1, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — функция $k$-значной логики. Упорядоченную пару наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции* $f$, если выполнены условия:

1) $\alpha_j \leq \beta_j,\ \ j = 1,\ldots,n$;

2) $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Под *падением* $d_C(f)$ *функции* $f$ *на цепи* $C$ вида $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_r$ будем понимать число обрывов для функции $f$ на парах вида $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1})$.

*Спад* $d(f)$ функции $f$ определим равенством $d(f) = \max d_C(f)$, где максимум берется по всем цепям $C$.

Пусть $P_k$ — множество всех функций $k$-значной логики, $k \geq 2$, $M$ — класс всех функций из $P_k$, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \ldots < k-1$.

*Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 18-01-00337-а.

Для базисов имеющих вид

$$B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}, \quad \omega_i \in P_k \setminus M,\ i = 1, \ldots, p,$$

помимо классической меры сложности реализации произвольной функции $k$-значной логики $f$ над базисом $B$, определяемой как наименьшее число функциональных элементов в схемах, реализующих функцию $f$ над базисом $B$, и обозначаемой $L_B(f)$ (подробнее см., например, [5]), рассматривается еще так называемая немонотонная сложность, численно равная наименьшему числу немонотонных элементов (т. е. элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса) в схемах, реализующих функцию $f$ над базисом $B$ (подробнее см., например, [2]).

В случае реализации булевых функций в базисе $B_0 = M \cup \{\bar{x}\}$, А. А. Марковым установлено [3] точное значение немонотонной (инверсионной) сложности для произвольной булевой функции $f$:

$$I_{B_0}(f) = \lceil \log_2(d(f)+1) \rceil.$$

Этот результат в работах [6, 7,8] получил дальнейшее развитие. В [6, 7] для произвольного базиса описанного вида, содержащего конечное число немонотонных функций, и любой булевой функции [6] или функции $k$-значной логики [7] установлены верхняя и нижняя оценки немонотонной сложности, отличающиеся лишь на константу, зависящую только от базиса. В [8] получена точная формула для немонотонной сложности любой булевой функции над произвольным базисом такого вида.

В статье [2] найдено точное значение немонотонной сложности функций $k$-значной логики над двумя естественными базисами $B_P = M \cup \{N_P(x)\}$ и $B_L = M \cup \{N_L(x)\}$: для произвольной функции $f$ справедливы равенства

$$I_{B_P}(f) = \lceil \log_2(d(f)+1) \rceil, \quad I_{B_L}(f) = \lceil \log_k(d(f)+1) \rceil.$$

Из этих равенств и очевидных соотношений

$$I_{B_P}(f) \le L_{B_P}(f) \le 2I_{B_P}(f)+1, \quad I_{B_L}(f) \le L_{B_L}(f) \le 2I_{B_L}(f)+1$$

непосредственно следуют оценки

$$\lceil \log_2(d(F)+1) \rceil \le L_{B_P}(f) \le 2\lceil \log_2(d(F)+1) \rceil + 1,$$
$$\lceil \log_k(d(F)+1) \rceil \le L_{B_L}(f) \le 2\lceil \log_k(d(F)+1) \rceil + 1.$$

Следующим естественным шагом авторов стало изучение возможности получения более точных оценок величин $L_{B_P}$ и $L_{B_L}$. В работе [1] доказано, что для любой функции $k$-значной логики $f$, удовлетворяющей условию $d(f) \ge 2$, справедливы неравенства

$$3(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1) + \tau(d(f)+1) \le L_{B_P}(f) \le$$
$$\le 3(\lceil \log_3(d(f)+1) \rceil - 1) + \tau(d(f)+1) + 1,$$

где

$$\tau(n)=\begin{cases}1, & \text{если } 3^r < n \le 4\times 3^{r-1} \text{ для некоторого целого } r;\\ 2, & \text{если } 4\times 3^{r-1} < n \le 2\times 3^r \text{ для некоторого целого } r;\\ 3, & \text{если } 2\times 3^r < n \le 3\times 3^r \text{ для некоторого целого } r.\end{cases}$$

В целом, способ уточнения нижней оценки величины $L_{B_L}(f)$ идейно сходен с доказательством из [1] нижней оценки величины $L_{B_P}(f)$, однако, попытка одновременного (параллельного) ведения доказательства этих нижних оценок привела к значительному и неоправданному его усложнению. Поэтому поведение сложности реализации функций $k$-значной логики схемами над базисом $B_L$ стало предметом данного отдельного исследования.

## Нижние оценки

Для базиса $B$ вида $B = M \cup \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_k \setminus M$, $i = 1, \dots, p$, через $d(B)$ обозначим максимальное значение среди величин $d(\omega_1), \dots, d(\omega_p)$. Пусть задана схема $S$ над базисом $B$. Через $F_S$ обозначим систему всех функций, реализуемых вершинами схемы $S$. Для произвольных системы $G$ функций $k$-значной логики, схемы $S$ и цепи $C$ наборов независимых переменных систем $G$ и $F_S$ обозначим через $d_C(F_S; G)$ количество обрывов системы $F_S$ на цепи $C$, не являющихся обрывами для системы $G$.

**Лемма 1.** *Пусть на входы схемы $S$ над базисом $B$ подаются переменные $x_1, \dots, x_n$, а схема $S'$ над базисом $B$ получается из схемы $S$ добавлением элементов $e_1, \dots, e_t$, на входы которых подаются либо переменные $x_1, \dots, x_n$, либо выходы каких-либо элементов схемы $S$. Тогда для произвольной системы $G$ функций от переменных $x_1, \dots, x_n$ и для любой цепи $C$ наборов из $E_k^n$ выполняется неравенство*

$$d_C(F_{S'}; G) + 1 \le (D(B)t + 1)(d_C(F_S; G) + 1).$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную цепь

$$C = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r)$$

наборов из $E_k^n$.

Обозначим величину $d_C(F_S; G)$ через $l$. Тогда цепь $C$ можно разбить на $l+1$ подцепь $C_1, \dots, C_{l+1}$ таким образом, что будут выполняться условия:

1. Для каждого $i$, $i = 1, \dots, l+1$, найдутся такие натуральные $a$ и $b$, $1 \le a < b \le r$, что

$$C_i = (\tilde{\alpha}_a, \tilde{\alpha}_{a+1}, \dots, \tilde{\alpha}_b).$$

2. При $i \ne j$ справедливо равенство $C_i \cap C_j = \varnothing$.

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{l+1} C_i = C$.

4. Для каждого $i$, $1 \le i \le l+1$, верно равенство $d_{C_i}(F_S; G) = 0$.

Тогда для любой цепи $C_i$, $i = 1,\ldots,l+1$, и для каждой функции $f_j$, вычисляемой на выходе элемента $e_j$, $j = 1,\ldots,t$, выполняется неравенство $d_{C_i}(f_j;G) \le D(B)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&d_C(F_{S'};G) \le d_{C_1}(F_{S'};G) + \ldots + d_{C_{l+1}}(F_{S'};G) + l = \\
&\quad = d_{C_1}(\{f_1,\ldots,f_t\};G) + \ldots + d_{C_{l+1}}(\{f_1,\ldots,f_t\};G) + l \le D(B)(l+1)t + l = \\
&\qquad\qquad = (D(B)t+1)(l+1) - 1 = (D(B)t+1)(d_C(F_S;G)+1) - 1.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Пусть набор натуральных чисел* $\{t_1,\ldots,t_r\}$ *для некоторых натуральных* $N$ *и* $k$, $k \ge 2$, *удовлетворяет условию*

$$\big(t_1(k-1)+1\big) \times \big(t_2(k-1)+1\big) \times \ldots \times \big(t_r(k-1)+1\big) \ge N.$$

*Тогда справедливо неравенство*

$$t_1 + 2t_2 \ldots + 2t_r \ge 2\lceil \log_k N \rceil - 1.$$

**Доказательство.** Зафиксируем значения $N$ и $k$. Среди всех конечных наборов натуральных чисел, для которых соответствующее произведение из левой части условия леммы не менее чем $N$, выделим наборы с минимально возможным значением суммы из левой части доказываемого неравенства, а среди них отметим тот набор, в котором соответствующее произведение максимально, и обозначим отмеченный набор через $(n_1,\ldots,n_m)$. Докажем, что все значения $n_i$ равны единице.

Действительно, если найдется элемент $n_i$, удовлетворяющий неравенству $n_i \ge 2$, то, заменив в исходном наборе элемент $n_i$ на два элемента $n_{i_1} = 1$ и $n_{i_2} = n_i - 1$, получим набор с тем же самым значением суммы из левой части доказываемого неравенства, но с бо́льшим значением произведения из левой части неравенства из условия леммы:

$$\begin{aligned}
\big(n_{i_1}(k-1)+1\big)\big(n_{i_2}(k-1)+1\big) &= \big((k-1)+1\big)\big((n_i-1)(k-1)+1\big) = \\
&= n_i(k-1)+1+(n_i-1)(k-1)^2 > n_i(k-1)+1,
\end{aligned}$$

что противоречит выбору исходного набора.

Из условия леммы в силу того, что в наборе $(n_1,\ldots,n_m)$ все разряды не меньше единицы, вытекает неравенство $k^m \ge N$. Поэтому $m \ge \lceil \log_k N \rceil$. Следовательно

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + 2t_r \ge n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_m = 2m - 1 \ge 2\lceil \log_k N \rceil - 1.$$

Лемма 2 доказана.

Как обычно, схему в базисе $B$, реализующую функцию или систему функций, будем называть *минимальной*, если никакая схема в базисе $B$ меньшей сложности не реализуют эту функцию или систему функций.

Далее будем рассматривать только схемы в бесконечном базисе $B_L$, состоящем из всех монотонных функций $k$-значной логики и отрицания Лукасевича, т. е. $B_L = M \cup N_L(x)$. Элементы, которым приписана базисная функция $N_L$ будем называть инверторами.

Пусть $S$ — минимальная схема для некоторой функции $f$ в базисе $B_L$. Разобьем множество всех монотонных элементов схемы $S$ на подмножества $S_0, S_1, S_2, \ldots$ следующим образом. К множеству $S_i$ отнесем все монотонные элементы схемы $S$, для каждого из которых максимальное число немонотонных элементов в путях от входов схемы до этого элемента равно $i$. Тогда схема $S$ имеет вид, представленный на рис. 1 из работы [1], где элементам $e_{ij}$ $(1 \le i \le r,\ 1 \le j \le t_i)$ приписана базисная функция «отрицание Лукасевича» и блоки $S_1, \ldots, S_{r-1}$ по построению непустые, т. е. содержат хотя бы один монотонный элемент. Такое представление (разбиение элементов) минимальной схемы, так же как и в работе [1], будем называть *каноническим*.

Для минимальной схемы $S$ обозначим через $l_0(S)$ число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от входа к этому элементу не содержит немонотонных элементов, а через $l_1(S)$ — число монотонных элементов, для каждого из которых ни один путь от этого элемента до выхода не содержит немонотонных элементов, но хотя бы один путь от входа схемы к этому элементу содержит максимальное возможное (для всех путей от входов к выходу) число немонотонных элементов. К примеру, для схемы $S$, изображенной на рис. 1 из работы [1], $l_0(S) = |S_0|$, $l_1(S) = |S_r|$.

Будем говорить, что минимальная схема $S$ (с одним выходом) разбита на две подсхемы $S'$ и $S''$, если: 1) каждый элемент схемы $S$ содержится либо в подсхеме $S'$, либо в подсхеме $S''$; 2) входами подсхемы $S'$ являются входы схемы $S$, выходами подсхемы $S'$ являются выходы всех ее элементов; входами подсхемы $S''$ являются входы схемы $S$ и выходы подсхемы $S'$, выходом подсхемы $S''$ является выход схемы $S$; 3) для любого инвертора, входящего в подсхему $S''$ и на вход которого подается выход монотонного элемента, в подсхему $S''$ входит и этот монотонный элемент. Отметим, что из минимальности схемы $S$ вытекает минимальность подсхем $S'$ и $S''$.

**Лемма 3.** *Пусть минимальная схема в базисе $B_L$ для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, разбита на подсхемы $S'$ и $S''$. Тогда для произвольной системы функций $G$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и любой цепи $C$ наборов из $E_k^n$ выполняется неравенство*

$$L_{B_L}(S'') - l_0(S'') - l_1(S'') \ge 2 \left\lceil \log_k \left( \frac{d_C(f;G) + 1}{d_C(F_{S'};G) + 1} \right) \right\rceil - 1.$$

**Доказательство.** Пусть минимальная схема $S$ в базисе $B_L$, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, разбита на подсхемы $S'$ и $S''$.

Если подсхема $S''$ не содержит функциональных элементов, то, очевидно, требуемое неравенство верно. Если подсхема $S''$ реализует монотонную функцию (от своих входов), то в силу соотношений $L_{B_L}(S'') = 1$, $l_0(S'') = 1$, $l_1(S'') = 1$, $d_C(f;G) \le d_C(F_{S'};G)$ утверждение леммы выполняется.

Далее будем считать, что функция, реализуемая подсхемой $S''$ (как функция от входов этой подсхемы), не является монотонной.

Рассмотрим каноническое представление схемы $S''$. Будем полагать, что в схеме $S''$ содержится $t_1+\ldots+t_r$ инверторов, расположенных аналогично схеме, представленной на рис. 1 из работы [1].

Последовательно «поуровнево» применяя лемму 1 и учитывая равенство $D(B_L)=k-1$, получаем:
$d_C(f;G)+1 \leq d_C(F_S;G)+1 \leq (t_1(k-1)+1)\ldots(t_r(k-1)+1)(d_C(F_{S'};G)+1)$.
Поэтому

$$(t_1(k-1)+1)\ldots(t_r(k-1)+1) \geq \frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}.$$

Из этого сотношени в силу леммы 2 следует неравенство

$$t_1+2t_2+\ldots+2t_r \geq 2\left\lceil \log_k \frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right\rceil -1.$$

С другой стороны, число монотонных элементов в схеме $S''$ не менее чем $t_2+\ldots+t_r$, так как на входы каждого инвертора, за исключением не более $t_1$ инверторов, подается выход уникального монотонного элемента. Поэтому выполняется сотношение

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'') \geq t_1+2t_2+\ldots+2t_r.$$

Таким образом,

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'') \geq 2\left\lceil \log_k \frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right\rceil -1.$$

Лемма 3 доказана.

В дальнейшем будет использоваться как сама лемма 3, так и ее следующий упрощенный вариант.

**Лемма 4.** *Пусть $S$ — минимальная схема в базисе $B_L$ для функции $f$, $f \in P_k$. Тогда выполняется неравенство*

$$L_{B_L}(S)-l_0(S)-l_1(S) \geq 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil -1.$$

**Доказательство.** Пусть цепь $C$ удовлетворяет условию $d_C(f)=d(f)$. Применяя лемму 3 для системы функций $G=\varnothing$ и разбиения схемы $S$ на подсхемы $S'$ и $S''$, где $S'$ — схема, не содержащаая функциональных элементов, а подсхема $S''$ совпадает со всей схемой $S$, имеем:

$$L_{B_L}(S)-l_0(S)-l_1(S) \geq 2\left\lceil \log_k \frac{d_C(f;G)+1}{d_C(F_{S'};G)+1}\right\rceil -1 = 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil -1$$

Лемма 4 доказана.

Теперь качество вытекающей из леммы 4 нижней оценки сложности реализации функций $k$-значной логики в базисе $B_L$ проиллюстрируем верхней оценкой.

**Теорема 1.** *Для любой функции $k$-значной логики $f$ справедливы неравенства*

$$2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil -1 \leq L_{B_L}(f) \leq 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil +1.$$

**Доказательство.** *Нижняя оценка* непосредственно следует из леммы 4.

*Верхняя оценка.* В силу теоремы 3 из [2] для реализации в базисе $B_L$ функции $f$ достаточно $\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$ инверторов (при отстутствии ограничений на использование монотонных элементов). В схеме $S$, реализующей функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ в базисе $B_L$ и содержащей $\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$ инверторов, занумеруем инверторы числами от 1 до $I = \lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$ так, чтобы не существовало ориентированных путей от инверторов с большим номером к инверторам с меньшим. Для $i = 1,\dots,I$ обозначим через $h_i$ функцию, подаваемую на вход $i$-го инвертора. Тогда найдутся монотонные функции $m_1, m_2, \dots, m_{I+1}$, для которых выполняются равенства

$$
\begin{gathered}
h_1 = m_1(x_1,\dots,x_n),\ h_2 = m_2(x_1,\dots,x_n,N_L(h_1)),\dots,\\
h_I = m_I(x_1,\dots,x_n,N_L(h_1),\dots,N_L(h_{I-1})),\\
f = m_{I+1}(x_1,\dots,x_n,N_L(h_1),\dots,N_L(h_I)).
\end{gathered}
$$

Поэтому

$$L_{B_L}(f) \le 2I+1 \le 2\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil + 1.$$

Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** *Для любой функции $k$-значной логики $f$ справедливы неравенства*

$$2I_{B_L}(f) - 1 \le L_{B_L}(f) \le 2I_{B_L}(f) + 1.$$

**Следствие 2.** *Если для функции $k$-значной логики $f$ верно равенство*

$$L_{B_L}(f) = 2\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil + 1,$$

*то найдется такая минимальная схема, реализующая функцию $f$ в базисе $B_L$, что все входы схемы подаются только на входы монотонных элементов.*

## Достижимость нижней и верхней оценок

Отметим, что нижняя оценка из теоремы 1 превращается в равенство, например, для функции $N_L(x)$. Опишем конструкцию, позволяющую строить функции, имеющие заданное значение $A$ ($A \ge 2$) немонотонной сложности над базисом $B_L$ и на которых достигается нижняя оценка из теоремы 1.

Среди всех линейных фунций вида $l_i(x_1,\dots,x_i) = x_1 + \ldots + x_i \pmod k$ выделим класс функций, удовлетворяющих условию $I_{B_L}(l_i) = A-2$. Обозначим через $r = r(A)$ максимальное число переменных у функций из этого выделенного класса. В силу равенства $I_{B_L}(f) = \lceil \log_k(d(f)+1) \rceil$ имеем:

$$
\begin{aligned}
r = \max\{i\colon I_{B_L}(l_i) = A-2\} &= \max\left\{i\colon \left\lfloor \frac{i(k-1)}{k} \right\rfloor + 1 \le k^{A-2}\right\} = \\
&= \max\left\{i\colon i < \frac{k^{A-1}}{k-1}\right\} = \left\lceil \frac{k^{A-1}}{k-1} \right\rceil - 1.
\end{aligned}
$$

Введем функцию $\varkappa_A$ от $k \times r$ переменных равенством

$$\varkappa_A(x_1,\ldots,x_{kr},y) = \bigvee_{t=0}^{k-1}(x_{tr+1}+x_{tr+2}+\ldots+x_{tr+r})\,\&\,J_t(y),$$

где $x \vee y = \max(x,y)$, $x \,\&\, y = \min(x,y)$, $x+y$ — сумма переменных $x$ и $y$ по модулю $k$ и

$$J_t(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = t; \\ 0, & \text{если } x \neq t, \end{cases} \qquad t = 0,1,\ldots,k-1.$$

Положим

$$\lambda_A(x_1,\ldots,x_{kr},y) = N_L(\varkappa_A(x_1,\ldots,x_{kr},y)).$$

Покажем, что $I_{B_L}(\lambda_A) = A$. В силу равенства $I_{B_L}(\lambda_A) = \lceil \log_k(d(\lambda_A)+1) \rceil$ достаточно установить, что

$$k^{A-1} \leq d(\lambda_A) < k^A.$$

Неравенство $d(\lambda_A) < k^A$ легко проверяется непосредственно. Кроме того, ниже мы установим это неравенство из сложностных соображений. Докажем неравенство $d(\lambda_A) \geq k^{A-1}$.

В соответствии с определением функции $\lambda_A$ имеем:

$$d(\lambda_A) = kd(N_L(l_r)) = k\left(r(k-1) - \left\lfloor \frac{r(k-1)}{k} \right\rfloor\right).$$

Далее сначала отдельно рассмотрим случай $k=2$ и случай $k=3$, $A=2$.

Пусть $k=2$. Тогда $r = 2^{A-1}-1$. Поэтому

$$d(\lambda_A) = 2\left(2^{A-1}-1-\left\lfloor \frac{2^{A-1}-1}{2} \right\rfloor\right) = 2^{A-1}.$$

Пусть $k=3$, $A=2$. Тогда $r=1$. Поэтому $d(\lambda_A) = 6 \geq 3^1$.

В остальных случаях справедливы соотношения

$$d(\lambda_A) = k\left(\left(\left\lceil \frac{k^{A-1}}{k-1} \right\rceil - 1\right)(k-1) - \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{k^{A-1}}{k-1} \right\rceil - 1\right)(k-1)}{k} \right\rfloor\right) \geq$$
$$\geq k\left(k^{A-1}-k+1-k^{A-2}\right) > k^{A-1}.$$

Теперь покажем, что $L_{B_L}(\lambda_A) \leq 2A-1$. Для этого представим функцию $\varkappa_A$ в следующем виде

$$\varkappa_A(x_1,\ldots,x_{kr},y) = \sum_{s=1}^{r} x_s \,\&\, J_0(y) \vee x_{r+s} \,\&\, J_1(y) \vee \ldots \vee x_{(k-1)r+s} \,\&\, J_{k-1}(y).$$

Опишем схему $S$, вычисляющую функцию $\lambda_A(x_1,\ldots,x_{kr},y) = N_L(\varkappa_A(x_1,\ldots,x_{kr},y))$. На выходе первого элемента схемы $S$ вычисляется функция $N_L(y)$.

Теперь отметим, что так как каждая функция $J_t(y)$, $t = 0,1,\ldots,k-1$, может быть реализована двухвходовым монотонным элементом, на вход которого подаются переменная $y$ и функция $N_L(y)$, то и каждая функция $z_s = x_s \& J_0(y) \vee x_{r+s} \& J_1(y) \vee \ldots \vee x_{(k-1)r+s} \& J_{k-1}(y)$, $s = 1,2,\ldots,r$, может быть вычислена монотонным элементом, на входы которого подаются функции $x_{r+s},\ldots,x_{(k-1)r+s},y,N_L(y)$.

Далее, для функции $l_r$ в соотвествии с выбором параметра $r$ верно равенство $I_{B_L}(l_r) = A-2$.

Применяя к функции $l_r$ теорему 1, а также следствие 2 из этой теоремы, получаем, что можно построить схему в базисе $B_L$, на входы которой подаются переменные $x_1,\ldots,x_{kr},y$ и функция $N_L(y)$, реализующую функцию $\varkappa_A(x_1,\ldots,x_{kr},y)$ и имеющую сложность не более $2A-3$. Поэтому можно так достроить схему $S$, чтобы она вычисляла функцию $\lambda_A(x_1,\ldots,x_{kr},y)$ в базисе $B_L$ и при этом выполнялось неравенство $L_{B_L}(S) \le 2A-1$. Таким образом, $L_{B_L}(\lambda_A) \le 2A-1$.

Из последнего неравенства и следствия 1 к теореме 1 вытекает неравенство $I_{B_L}(\lambda_A) \le A$, из которого в силу равенства $I_{B_L}(\lambda_A) = \lceil \log_k(d(\lambda_A)+1) \rceil$, в свою очередь, следует соотношение $d(\lambda_A) < k^A$.

Возвращась к примеру и используя следствие 1 к теореме 1 получаем из доказанных соотношений $I_{B_L}(\lambda_A) = A$ и $L_{B_L}(\lambda_A) \le 2A-1$ равенство $L_{B_L}(\lambda_A) = 2I_{B_L}(\lambda_A) - 1$.

Таким образом, для любого наперед заданного значения спада предъявлена функция, для которой в теореме 1 нижняя граница сложности на самом деле является ее точным значением. Ниже будут приведены как бесконечная серия функций, для которых верхняя оценка из теоремы 1 превращается в равенство, так и бесконечная серия функций, для которых ни нижняя, ни верхняя оценки из теоремы 1 не обращаются в равенство.

Вопрос о достижимости верхней оценки из теоремы 1 тесно связан с задачей о нахождении точного значения функции Шеннона сложности реализации функций $k$-значной логики схемами в базисе $B_L$, определяемой равенством

$$L_{B_L}(n) = \max L_{B_L}(f),$$

где максимум берется по всем функциям $k$-значной логики $f$ от $n$ переменных.

Обозначим через $T(k,n)$ величину, на единицу превосходящую максимально возможный спад у функций $k$-значной логики от $n$ переменных. Отметим справедливость равенств

$$T(k,n) = (k-1)n - \left\lfloor \frac{(k-1)n}{k} \right\rfloor + 1 = (k-2)n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

Непосредственно из теоремы 1 следует, что

$$2\lceil \log_k T(k,n) \rceil - 1 \le L_{B_L}(n) \le 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + 1.$$

Перейдем к уточнению этих оценок.

Обозначим через $U_k$ множество натуральных чисел $n$, удовлетворяющих двум условиям: 1) число $T(k,n)-1$ не является степенью числа $k$; 2) остаток от деления $n-1$ на $k$ не превосходит $(k-3)/2$.

Определим функцию $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ следующим образом. Зафиксируем одну произвольную цепь, не содержащую наборы $0^n$ и $(k-1)^n$ и имеющую при таких ограничениях максимально возможную длину, равную $(k-1)n-1$ (в качестве такой цепи можно взять цепь, состоящую из лексикографически упорядоченных наборов, начиная с набора $(0,\ldots,0,1)$ и заканчивая набором $(k-2,k-1,\ldots,k-1)$). На последовательности наборов этой цепи зададим функцию $\varphi$ последовательностью значений

$$0,1,\ldots,k-1,0,1,\ldots,k-1,0,1,\ldots$$

На остальных наборах значение функции $\varphi$ зададим равенством $\varphi(x_1,\ldots,x_n) = (k-1)(1+x_1+\ldots+x_n) \pmod k$. И, наконец, при выполнении условия $n \in U_k$ переопределим значение функции $\varphi$ на наборе $(k-1,\ldots,k-1)$, положив его равным $k-1$.

**Лемма 5.** *Функция $k$-значной логики $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ обладает следующими свойствами:*

1. *Если $n \notin U_k$, то выполняются соотношения $d(\varphi) = T(k,n)-1$, $T(k,n)-2 \le d(N_L(\varphi)) \le T(k,n)-1$.*

2. *Если $n \in U_k$, то справедливы равенства $d(\varphi) = d(N_L(\varphi)) = T(k,n)-2$.*

3. *При $n \ge k+1$ для каждого $i$, $1 \le i \le n$, найдется цепь $C_i$ наборов из $E_k^n$, удовлетворяющая условию $d_{C_i}(\varphi;\{N_L(x_i)\}) = d(\varphi)$.*

4. *При $n \ge k+2$ для каждого $s$, $2 \le s \le n$, и любых $i_1,\ldots,i_s$, $1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n$, найдется цепь $C_{i_1\ldots i_s}$ наборов из $E_k^n$, удовлетворяющая условию $d_{C_{i_1\ldots i_s}}(\varphi;\{N_L(x_{i_1}),\ldots,N_L(x_{i_s})\}) \ge d(\varphi)-(s-2)(k-1)$.*

**Лемма 6.** *Пусть функция $k$-значной логики $f$ удовлетворяет условию*

$$\lceil \log_k(d(N_L(f))+1)\rceil < \lceil \log_k(d(f)+1)\rceil .$$

*Тогда выполняется неравенство*

$$L_{B_L}(f) \le 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil .$$

**Доказательство.** Используя очевидное равенство $N_L(N_L(f)) = f$ и применяя для функции $N_L(f)$ верхнюю оценку из теоремы 1, получаем следующую цепочку неравенств

$$L_{B_L}(f) \le L_{B_L}(N_L(f))+1 \le 2\lceil \log_k(d(N_L(f))+1)\rceil + 2 \le$$
$$\le 2(\lceil \log_k(d((f)+1)\rceil - 1)+2 = 2\lceil \log_k(d(f)+1)\rceil .$$

Лемма 6 доказана.

Обозначим через $R_k$ множество натуральных чисел $n$, удовлетворяющих условию: число $T(k,n)-1$ является степенью числа $k$.

Отметим, что все числа из множества $R_k$ не делятся на $k$.

**Лемма 7.** *Пусть $n \in R_k$ и для функции $k$-значной логики $f(x_1,\dots,x_n)$ справедливо равенство $d(f) = T(k,n) - 1$. Тогда выполняется неравенство $d(N_L(f)) \le d(f) - 1$.*

**Доказательство.** Для всех функций $\xi(x_1,\dots,x_n)$, имеющих максимально возможный спад среди функций $k$-значной логики от $n$ переменных, выполняется неравенство $\xi(0,\dots,0) \ge \xi(k-1,\dots,k-1)$. В случае, когда $n$ не делится на $k$, это соотношение превращается в строгое неравенство. Поэтому в этом случае функция $N_L(\xi)$ не может иметь максимальный спад.

**Теорема 2.** *При $n \ge k+2$ для функции Шеннона сложности реализации функций $k$-значной логики схемами в базисе $B_L$ верно равенство*

$$L_{B_L}(n) = \begin{cases} 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil, & \text{если } n \in R_k; \\ 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + 1, & \text{если } n \in \mathbb{N} \setminus R_k. \end{cases}$$

**Доказательство.** *Верхняя оценка.* В силу теоремы 1 для любого натурального $n$ выполняется неравенство

$$L_{B_L}(n) \le 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + 1,$$

которое дает искомую верхнюю оценку в случае $n \notin R_k$.

Пусть теперь $n \in R_k$. Для произвольной функции $f(x_1,\dots,x_n)$ из $P_k$ отдельно рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть выполняется неравенство $\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil < \lceil \log_k T(k,n) \rceil$.

Тогда, используя верхнюю оценку теоремы 1, имеем:

$$L_{B_L}(f) \le 2\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil + 1 \le 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil - 1.$$

Случай 2. Пусть выполняется равенство $\lceil \log_k(d(f)+1) \rceil = \lceil \log_k T(k,n) \rceil$.

Тогда, учитывая, что число $T(k,n)-1$ является степенью числа $k$, из условия случая следует равенство $d(f) = T(n,k) - 1$. Далее, в силу леммы 7 выполняется неравенство $d(N_L(f)) \le d(f) - 1$. Следовательно,

$$\lceil \log_k(d(N_L(f)) + 1) \rceil \le \lceil \log_k d(f) \rceil = \log_k(T(k,n) - 1) < \lceil \log_k T(k,n) \rceil.$$

Используя оценку из случая 1 для функции $N_L(f)$, получаем:

$$L_{B_L}(f) \le L_{B_L}(N_L(f)) + 1 \le 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil.$$

*Нижняя оценка.* Рассмотрим введенную выше функцию $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in P_k$. Пусть $S$ — некоторая минимальная схема для функции $\varphi$ в базисе $B_L$.

Сначала докажем справедливость неравенства

$$L_{B_L}(S) \ge 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + l_1(S).$$

Если выполняется неравенство $l_0(S) \ge 1$, то в силу леммы 4 справедливы соотношения

$$L_{B_L}(S) \ge 2\lceil \log_k(d(\varphi)+1) \rceil - 1 + l_0(S) + l_1(S) \ge 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + l_1(S).$$

Теперь считаем, что выполняется равенство $l_0(S)=0$. В этом случае в схеме $S$ есть инверторы, на входы которых подаются переменные $x_{i_1},\ldots,x_{i_s}$, $s\geq 1$. Рассмотрим разбиение схемы $S$ на подсхемы $S'$ и $S''$, где подсхема $S'$ содержит только инверторы, на входы которых подаются входы схемы (переменные), а подсхема $S''$ — все остальные элементы схемы $S$.

В силу леммы 5 при $s=1$ найдется цепь $C$, такая что выполняется условие $d_C(\varphi;\{N_L(x_{i_1})\})=d(\varphi)$, а при $s\geq 2$ найдется цепь $C$, для которой справедливо неравенство $d_C(\varphi;\{N_L(x_{i_1}),\ldots,N_L(x_{i_s})\})\geq d(\varphi)-(s-2)(k-1)$.

Применяя лемму 3 для цепи $C$ и системы $G=\{N_L(x_{i_1}),\ldots,N_L(x_{i_s})\}$, в силу равенства $F_{S'}=G$ получаем:

$$L_{B_L}(S'')-l_0(S'')-l_1(S'')\geq 2\left\lceil\log_k\left(d_C(\varphi;G)+1\right)\right\rceil-1.$$

Учитывая, что $L_{B_L}(S)=L_{B_L}(S'')+s$, $l_1(S)=l_1(S'')$ и $l_0(S'')\geq 1$, при $s=1$ имеем неравенства

$$L_{B_L}(S)>2\left\lceil\log_k\left(d(\varphi)+1\right)\right\rceil+l_1(S)=2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S),$$

а при $s\geq 2$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}L_{B_L}(S)&\geq s+l_0(S'')-l_1(S'')+2\left\lceil\log_k\left(d_C(\varphi;G)+1\right)\right\rceil-1\geq\\&\geq s+2\left\lceil\log_k\left(T(k,n)-(s-2)(k-1)\right)\right\rceil+l_1(S)\geq 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S).\end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае для схемы $S$ выполняется соотношение

$$L_{B_L}(S)\geq 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+l_1(S).$$

Заметим, что из этого соотношения в силу очевидного неравенства $l_1(S)\geq 0$ непосредственно следует требуемая нижняя оценка в случае, когда выполняется условие $n\in R_k$.

Теперь предполагаем, что выполняется условие $n\notin R_k$. Тогда число $T(k,n)-1$ не является степенью числа $k$. Следовательно,

$$\left\lceil\log_k(T(k,n)-1)\right\rceil=\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil.$$

Применяя лемму 5, получаем

$$\left\lceil\log_k(d(N_L(\varphi))+1)\right\rceil\geq\left\lceil\log_k(T(k,n)-1)\right\rceil=\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil.$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть последний (выходной) элемент схемы $S$ — инвертор. Тогда схема $S_0$, получающаяся из схемы $S$ путем удаления этого инвертора, является минимальной схемой в базисе $B_L$ для функции $N_L(\varphi)$. Используя лемму 4 и учитывая неравенство $l_1(S_0)\geq 1$ (верное ввиду того, что последним элементом схемы $S_0$ не может быть инвертор), получаем:

$$\begin{aligned}L_{B_L}(\varphi)&=L_{B_L}(S)=L_{B_L}(S_0)+1\geq\\&\geq 2\left\lceil\log_k(d(N_L(\varphi))+1)\right\rceil-1+l_1(S_0)+1\geq 2\left\lceil\log_k T(k,n)\right\rceil+1.\end{aligned}$$

Случай 2. Пусть последнему элементу схемы $S$ приписана монотонная функция из базиса $B_L$.

Тогда выполняется неравенство $l_1(S) \geq 1$. Поэтому

$$L_{B_L}(\varphi) = L_{B_L}(S) \geq 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + l_1(S) \geq 2\lceil \log_k T(k,n) \rceil + 1.$$

Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** *При $k = 2$ условие $n \geq k+2$ из теоремы 2 можно убрать, а при $k \geq 3$ — значительно ослабить. Однако при $k \geq 3$ совсем обойтись без ограничения на $n$ с сохранением справедливости для функции Шеннона $L_{B_L}(n)$ формулы из теоремы 2 невозможно. Так, при $k \geq 3$ справедливы равенства $L_{B_L}(2) = 3$ и $L_{B_L}(3) = 3$, т. е. $L_{B_L}(2) = 2\lceil \log_k T(k,2) \rceil - 1$ и $L_{B_L}(3) = 2\lceil \log_k T(k,3) \rceil$, при этом множество $R_k$ не содержит число 3 ни при каких $k \geq 3$.*

**Замечание 2.** *Для функции $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ при условии $n \notin R_k$ верхняя оценка из теоремы 1 неулучшаема, так как в этом случае верно равенство $L_{B_L}(\varphi) = 2\lceil \log_k(d(\varphi)+1) \rceil + 1$, а при условии $n \in R_k$ выполняется равенство $L_{B_L}(\varphi) = 2\lceil \log_k(d(\varphi)+1) \rceil$. Последний случай ввиду справедливости для любого $k$, $k \geq 2$, равенства*

$$R_k = \left\{ \frac{k}{(k-1)^2}\left(k^{(k-1)t+k-2} - k^2 + 3k - 3\right) + k - 1 \mid t = 0,1,2,\ldots \right\}$$

*дает бесконечную серию функций, для которых ни нижняя оценка, ни верхняя оценка теоремы 1 не являются точными.*

## Литература


1. *Кочергин В. В., Михайлович А. В.* О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 42–74.

2. *Кочергин В. В., Михайлович А. В.* О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций $k$-значной логики // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, вып. 4. — С. 80–90.

3. *Марков А. А.* Об инверсионной сложности систем функций // ДАН СССР. — 1957. — Т. 116, № 6. — С. 917–919.

4. *Марков А. А.* Об инверсионной сложности систем булевых функций // ДАН СССР. — 1963. — Т. 150, № 3. — С. 477–479.

5. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Московского университета, 1984.

6. *Кочергин В. В., Михайлович А. В.* О сложности схем в базисах, содержащих монотонные элементы с нулевыми весами // Прикладная дискретная математика. — 2015. — № 4 (30). — С. 24–31.

7. *Kochergin V. V., Mikhailovich A. V.* Asymptotics of growth for non-monotone complexity of multi-valued logic function systems // Siberian Electronic Mathematical Reports (`http://semr.math.nsc.ru`). — 2017. — T. 14. — C. 1100–1107.

8. *Кочергин В. В., Михайлович А. В.* Точное значение немонотонной сложности булевых функций // Математические заметки. — В печати.