

ОЦЕНКА ЗОНЫ ВЛИЯНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ЗАДАЧАХ АЭРОРАЗВЕДКИ*

Введение

В настоящее время при решении геологических и экологических задач активно используются методы аэроэлектронзондирования. Конечной целью аэрозондирования является определение распределения электропроводности в верхних (до 500м) областях Земли по измеренным на разных частотах компонентам магнитного поля. Одним из методов зондирования является дипольное индукционное профилирование. В этом методе источником электромагнитного поля является рамка с током (магнитный диполь), находящаяся на самолете или вертолете. Измеряемыми величинами являются компоненты магнитного поля, которые определяются датчиками в гондоле, связанной с летательным аппаратом. Отметим, что, как правило, измеряется не полное поле в точке измерения, а так называемое вторичное (отраженное) поле, т.е. поле, возникающее при отражения электромагнитной волны, излучаемой нашим источником, от Земли. Это вызвано тем, что первичное поле— поле, наведенное непосредственно источником на приемник, превосходит отраженное поле по величине на порядки, что не позволяет определять какие-либо свойства среды по непосредственно измеренному полному полю.

Стандартной геофизической моделью, применяющейся при моделировании индукционного профилирования, является горизонтально-слоистая среда, содержащая неоднородности, проводимость которых существенно отличается от проводимости объемлющей среды. Очевидно, что при достаточно больших горизонтальных размерах неоднородности, находящейся непосредственно под источником, её можно считать бесконечной по горизонтали. Это следует из следующих практических соображений:

- поле вертикального магнитного диполя быстро убывает с увеличением расстояния от него;
- источник и приемник находятся на сравнительно небольшом расстоянии друг от друга.

Это приводит к необходимости исследования следующей задачи: при каких горизонтальных размерах однородного тела, расположенного непосредственно под источником, это тело можно считать эквивалентным

* Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 09-05-12016 офи-м

бесконечному однородному слою, с той же проводимостью, что и у тела. Эквивалентность при этом понимается как эквивалентность кажущихся проводимостей.

1. Поле в слоистой среде

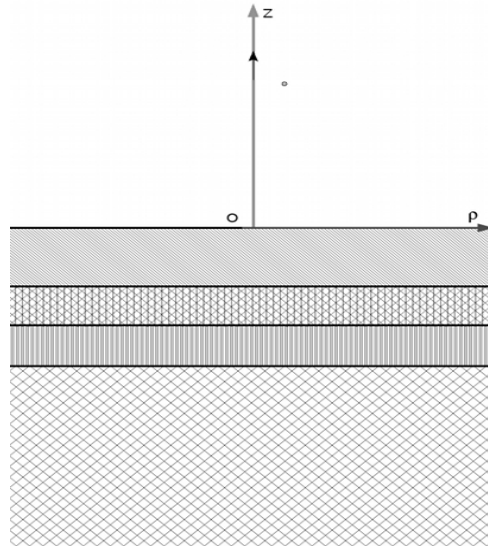


Рис. 1 Диполь над слоистой средой.

Рассмотрим задачу о поле вертикального магнитного диполя, расположенного над N-слойной средой (см. Рис. 1). Легко заметить, что эта задача обладает аксиальной симметрией. Поэтому, если выбрать цилиндрическую систему координат, как указано на рисунке, то, согласно [1], имеем следующие представления для электрического поля:

$$\vec{E} = (0, E_\varphi(\rho, z), 0) \quad (1)$$

для магнитного поля:

$$\vec{H} = (H_\rho(\rho, z), 0, H_z(\rho, z)), \quad (2)$$

причем магнитное поле выражается через электрическое:

$$H_\rho = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi), \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота поля, совпадающая с рабочей частотой источника, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума. Угловая компонента аномального электрического поля E_φ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_\varphi + k^2(z) E_\varphi = -k^2(z) E_\varphi^0, \quad (4)$$

где $k^2 = i\omega\mu_0\sigma(z)$ — волновое число, $\sigma(z)$ — электропроводность слоистой среды, $\sigma(z) = 0$, при $z > 0$, E_φ^0 — угловая компонента первичного поля вертикального магнитного диполя. $E_\varphi^0(\rho, z)$ имеет аналитическое представление:

$$E_\varphi^0(\rho, z) = i\omega\mu_0 \frac{m\rho}{\left((z - h_{src})^2 + \rho^2\right)^{3/2}}, \quad (5)$$

где h_{src} — высота источника над Землей, m — момент магнитного диполя ($m_z = \pi r_0^2 I$).

Электрическое поле $E_\varphi(\rho, z)$ и его нормальная производная $\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}$ непрерывны на границах разрыва электропроводности $z = z_i, i = 0, 1 \dots N$, $z_0 = 0$ — земная поверхность. На бесконечности E_φ стремится к нулю. Таким образом, имеем следующую задачу для отыскания E_φ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} E_\varphi + k_s^2 E_\varphi = -k_s^2 E_\varphi^0 \\ \text{при } z_{s+1} < z < z_s \leq 0 \\ k_s^2 = k^2 z \text{ при } z_{s+1} < z < z_s \leq 0 \\ \mathbf{L} E_\varphi = 0 \text{ при } z > 0 \\ \left[E_\varphi \right]_{z_s} = 0 \quad \left[\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right]_{z_s} = 0 \\ E_\varphi \rightarrow 0 \text{ при } \rho^2 + z^2 \rightarrow \infty \\ s = 0, 1 \dots N \\ LV \equiv \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V) \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (6)$$

Применив к задаче (6) преобразование Бесселя первого порядка, получим:

$$E_\varphi = \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) U(z, \lambda) \lambda d\lambda, \quad (7)$$

где образ поля $U(z, \lambda)$ по переменной z удовлетворяет задаче:

$$\left\{ \begin{array}{l} U''_{zz} - \eta_s^2 U = -k_s^2 \gamma e^{-(h-z)\lambda} \text{ при } z \leq 0 \\ U''_{zz} - \lambda^2 U = 0 \text{ при } z > 0 \\ [U]_{z_i} = 0; [U'_z]_{z_i} = 0; i = 0, 1 \dots n \\ U \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty \\ \eta_s^2 = \lambda^2 - k_s^2 \text{ Re } \eta > 0 \\ \gamma = im\omega\mu_0 \end{array} \right. \quad (8)$$

Формулы (1) и (7),(8) дают нам выражения для определения вторичного электромагнитного поля вертикального магнитного диполя с моментом m , расположенного в точке $(0,0,h_{src})$:

$$\begin{aligned} E_\varphi(\rho, z) &= \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) U(z, \lambda) \lambda d\lambda, \\ H_\rho(\rho, z) &= \frac{i}{\omega\mu_0} \int_0^\infty J_1(\lambda\rho) \frac{\partial U(z, \lambda)}{\partial z}, \\ H_z(\rho, z) &= -\frac{i}{\omega\mu_0} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) U(z, \lambda) \lambda^2 d\lambda \end{aligned} \quad (9)$$

Задача (8) легко решается, причем для любого числа слоев решение можно получить в аналитическом, хотя и весьма громоздком, виде [1]. Для частного случая $n = 2$, $\sigma_0 \neq 0$, при $z \geq 0$ решение имеет вид:

$$U(z, \lambda) = i\omega\mu_0 m q(\lambda) e^{-\lambda(h_{src} + z)}, \quad (10)$$

где:

$$q(\lambda) = \frac{(\lambda - \eta_0)(\eta_0 + \eta_1) + (\lambda + \eta_0)(\eta_0 - \eta_1) e^{-2\eta_0 h_1}}{(\lambda + \eta_0)(\eta_0 + \eta_1) + (\lambda - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1) e^{-2\eta_0 h_1}}. \quad (11)$$

2. Оценка области применимости слоистой модели

Простейшей моделью неоднородности является однородный хорошо проводящий круговой диск небольшой толщины конечного радиуса, расположенный внутри однородного полупространства. Рассмотрим случай, когда магнитный диполь находится на оси диска, так как в этом случае влияние диска будет максимальным (см. Рис. 2).

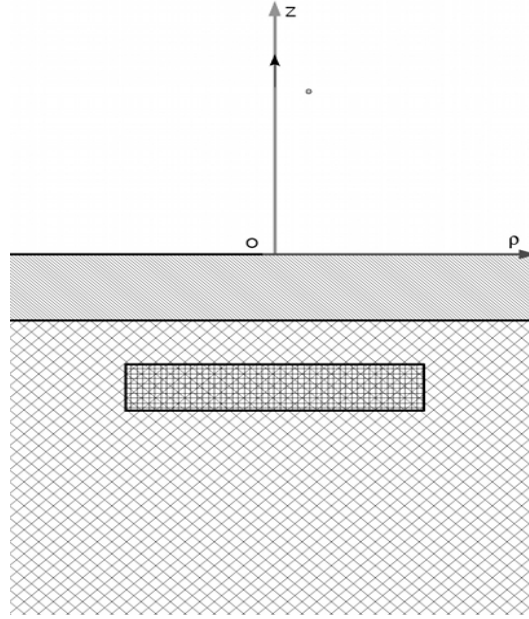


Рис. 2 Неоднородность в слоистой среде

Пусть в исходную слоистую среду (Рис. 1), описываемую системой уравнений (6), внесен диск небольшой толщины, ось которого совпадает с осью диполя, где радиус цилиндра — R , толщина — l , расстояние от верхнего основания до поверхности — h . Обозначим его комплексную проводимость как σ_c , а волновое число как k_c . Тогда в обозначениях задачи (6) имеем следующую дифференциальную задачу для аномального электрического поля E_φ^R , создаваемого диском:

$$\begin{cases} \mathbf{L} E_\varphi^R + k_l^2 E_\varphi^R = E_\varphi^0 & \text{вне диска,} \\ \mathbf{L} E_\varphi^R + k_c^2 E_\varphi^R = E_\varphi^0 & \text{внутри диска.} \end{cases} \quad (12)$$

Выведем интегральное представление поля и интегральное уравнение по цилиндрической области. Воспользуемся аппаратом функций Грина.

Найдем функцию Грина слоистой системы в случае аксиальной симметрии. Согласно [1] имеем:

$$G(\rho, \rho_0, z, z_0) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty g(\lambda, z, z_0) J_1(\lambda\rho_0) J_1(\lambda\rho) \lambda, d\lambda \quad (13)$$

где $g(\lambda, z, z_0)$ — решение дифференциальной задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} g''_{zz} - \eta_s^2 g = 0 \text{ при } z > 0 \\ g''_{zz} - \lambda^2 g = 0 \text{ при } z \leq 0 \\ [g]_{z_i} = 0; [g'_z]_{z_i} = 0; i = 0, 1, \dots, n \\ [g'_z]_{z=z_0} = -2 \\ g'_z + kg \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty \\ g'_z - kg \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty \\ \eta_s^2 = \lambda^2 - k_s^2 \quad \text{Re}\eta > 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Данная задача решается аналитически аналогично задаче (6). В простейшем случае (однородное полупространство и воздух) имеем следующее представление для g , при $z_0 > 0$:

$$\begin{aligned} g(z, z_0, \lambda) &= \kappa(z, z_0, \lambda) = \frac{1}{\eta} e^{-\eta(z-z_0)} + \frac{\eta - \lambda}{\eta + \lambda} \frac{1}{\eta} e^{-\eta(z+z_0)} \text{ при } z > 0 \\ g(z, z_0, \lambda) &= \frac{2}{\eta + \lambda} \frac{1}{\eta} e^{-\eta z_0 + \lambda z} = A(z_0, \lambda) e^{\lambda z} \text{ при } z < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Перейдем к выводу интегрального уравнения для диска. Для этого напишем интегральное представление для измеряемой магнитной компоненты $H_z(\rho_r, h_r)$ и интегральное уравнение для электрического поля E_φ^R внутри диска:

$$\begin{aligned} E_\varphi^R(\rho, z) &= E_\varphi^{lay}(\rho, z) + \frac{(k_l^2 - k_c^2)}{4\pi} \int_0^R \int_{-h-l}^{-h} G(\rho, \rho_0, z, z_0) E_\varphi^R(\rho_0, z_0) d\rho_0 dz_0 \\ H_z^R(\rho, h_r) &= H_z^{lay}(\rho, h_r) + \frac{(k_l^2 - k_c^2)}{i\omega\mu_0 4\pi} \int_0^R \int_{-h-l}^{-h} G_h(\rho, \rho_0, h_r, z) E_\varphi^R(\rho_0, z) d\rho_0 dz, \end{aligned} \quad (16)$$

где $E_\varphi^{lay}(\rho, z)$ — полное поле для исходной слоистой среды (6), $G_E(\rho, \rho_0, z, z_0)$, $G_h(\rho, \rho_0, z, z_0)$ — функции Грина для этой среды в случае аксиальной симметрии источников [1], $H_z^{lay}(\rho, h_r)$ — вторичное (измеряемое) магнитное поле для исходной слоистой системы (6), вычисляемое по формулам (7).

Перепишем выражения (16), используя явные выражения для функций Грина:

$$E_{\varphi}^R(\rho, z) = E_{\varphi}^{lay}(\rho, z) + \frac{(k_l^2 - k_c^2)}{2} \int_0^R \int_0^{\infty} J_1(\rho\lambda) J_1(\rho_0\lambda) \left[\int_{-h-l}^{-h} \kappa(z, z_0, \lambda) E_{\varphi}^R(\rho_0, z_0) dz_0 \right] \lambda d\lambda \rho_0 d\rho_0 \quad (17)$$

$$H_z^R(\rho, h_r) = H_z^{lay}(\rho, h_r) + \frac{(k_l^2 - k_c^2)}{2i\omega\mu_0} \int_0^R \int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) J_1(\rho_0\lambda) \left[\int_{-h-l}^{-h} A(z_0, \lambda) e^{-\lambda(h_r)} E_{\varphi}^R(\rho_0, z_0) dz_0 \right] \lambda^2 d\lambda \rho_0 d\rho_0 \quad (18)$$

Нас интересует поле H_z^R , которое вычисляется по формуле пересчета (18). Поскольку толщина диска достаточно мала по сравнению с расстоянием от него до точки измерения $l < h + h_r$, то в формуле (18) можно считать функцию пересчета независимой от точки по вертикали. Это позволяет перейти к интегральному току $U(\rho)$, проинтегрировав по высоте диска, что существенно снижает объем вычислений. Получим следующие соотношения:

$$U(\rho) = U(\rho) + \frac{(k_l^2 - k_c^2)}{2} \int_0^R \left\{ \int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) J_1(\rho_0\lambda) \hat{\kappa}(\lambda) \lambda d\lambda \right\} U(\rho_0) \rho_0 d\rho_0, \\ H_z^R(\rho, h_r) = H_z^{lay}(\rho, h_r) + \frac{(k_l^2 - k_c^2)}{i\omega\mu_0} \int_0^R \left\{ \int_0^{\infty} J_0(\rho\lambda) J_1(\rho_0\lambda) \hat{A}(\lambda) e^{-\lambda h_r} \lambda^2 d\lambda \right\} U(\rho_0) \rho_0 d\rho_0, \quad (19)$$

где

$$U(\rho) = \int_{-h-l}^{-h} E_{\varphi}^R(\rho, z_0) dz_0 \quad U_{lay}(\rho) = \int_{-h-l}^{-h} E_{\varphi}^{lay}(\rho, z_0) dz_0 \\ \hat{\kappa}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-h-l}^{-h} \kappa(z^*, z_0, \lambda) dz_0 \quad \hat{A}(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-h-l}^{-h} A(z^*, z_0, \lambda) dz_0 \quad (20)$$

$$z^* = -h - \frac{l}{2}$$

Естественно возникает вопрос о возможности интерпретации решения уравнения (19) как приближения интегрального тока в бесконечном слое. Это вопрос особенно интересен, поскольку фаза тока в слое на частотах в диапазоне 1-5 кГц может существенно изменяться внутри слоя — Рис. (3,4).

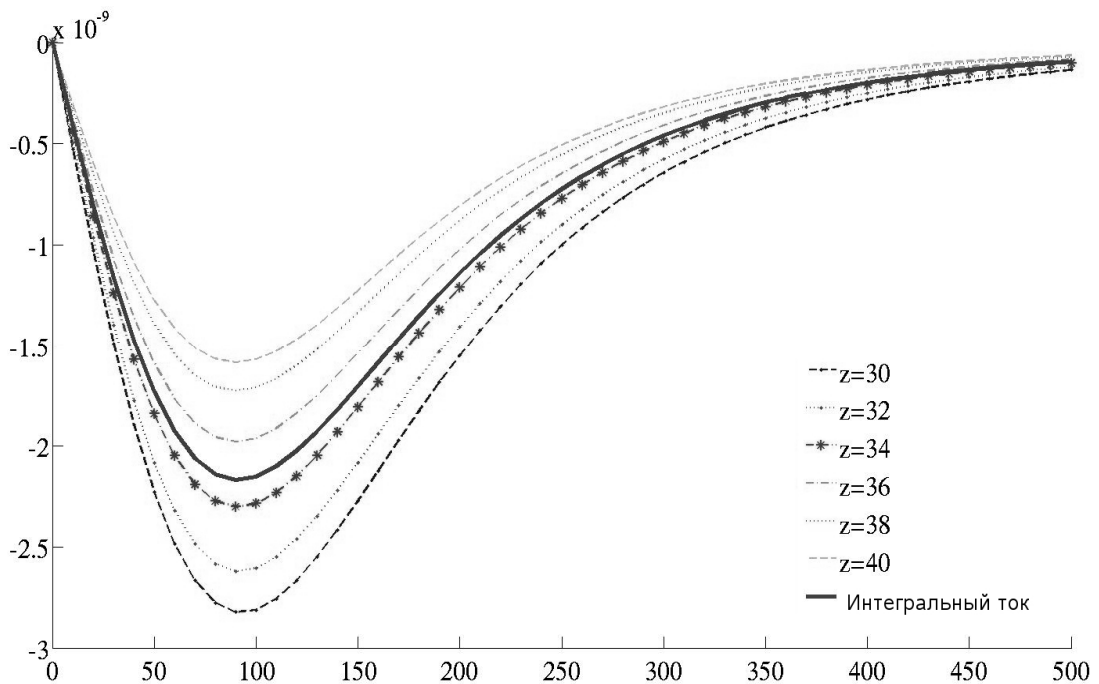


Рис. 3 Мнимая часть тока в бесконечном слое на различных глубинах и средний интегральный ток

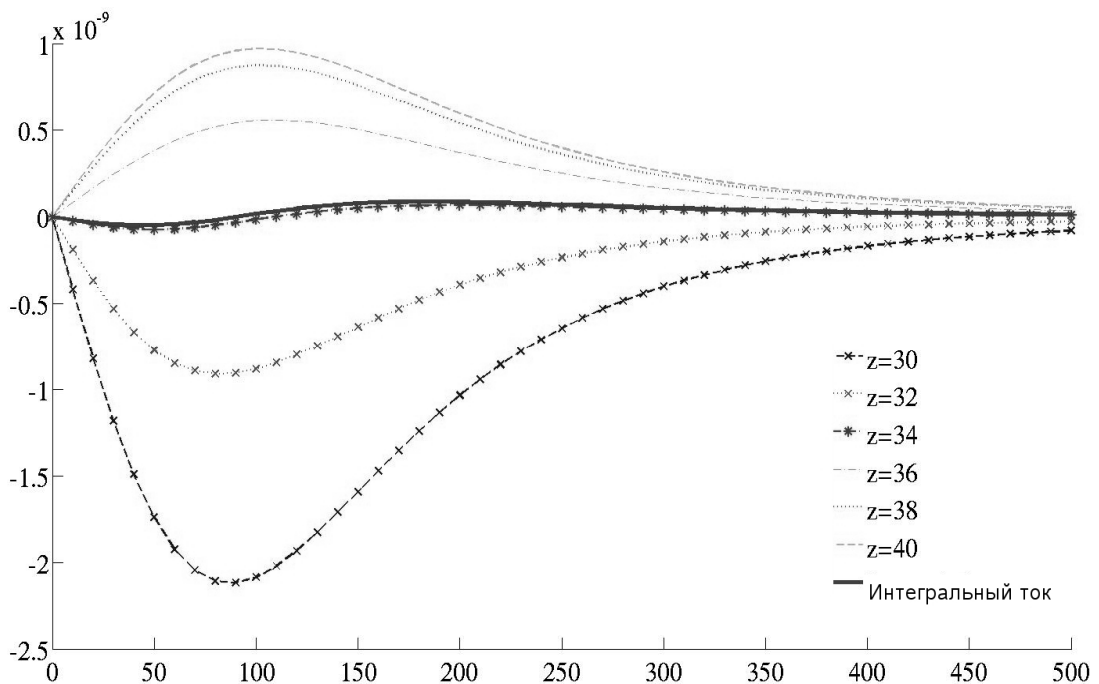


Рис. 4 Вещественная часть тока в бесконечном слое на различных глубинах и средний интегральный ток

Расчеты проведены для однородного полупространства со следующими параметрами:

- проводимость полупространства: 0.01 См/м
- проводимость диска: 1 См/м

- толщина диска: 10 м
- верхняя граница диска находится на глубине: 30 м
- высота источника: 150 м
- высота приемника: 100 м

3. Интегральный ток для диска

Выше были проведены расчеты интегрального тока из уравнения (19) для дисков различных радиусов на различных частотах.

Для диска, радиус которого составляет полтора расстояния по вертикали от его центра до источника (250 метров в нашем случае), решение уравнения (19) качественно похоже на интегральный ток в слое, но на низких частотах они сильно отличаются, что хорошо видно на Рис. 5.

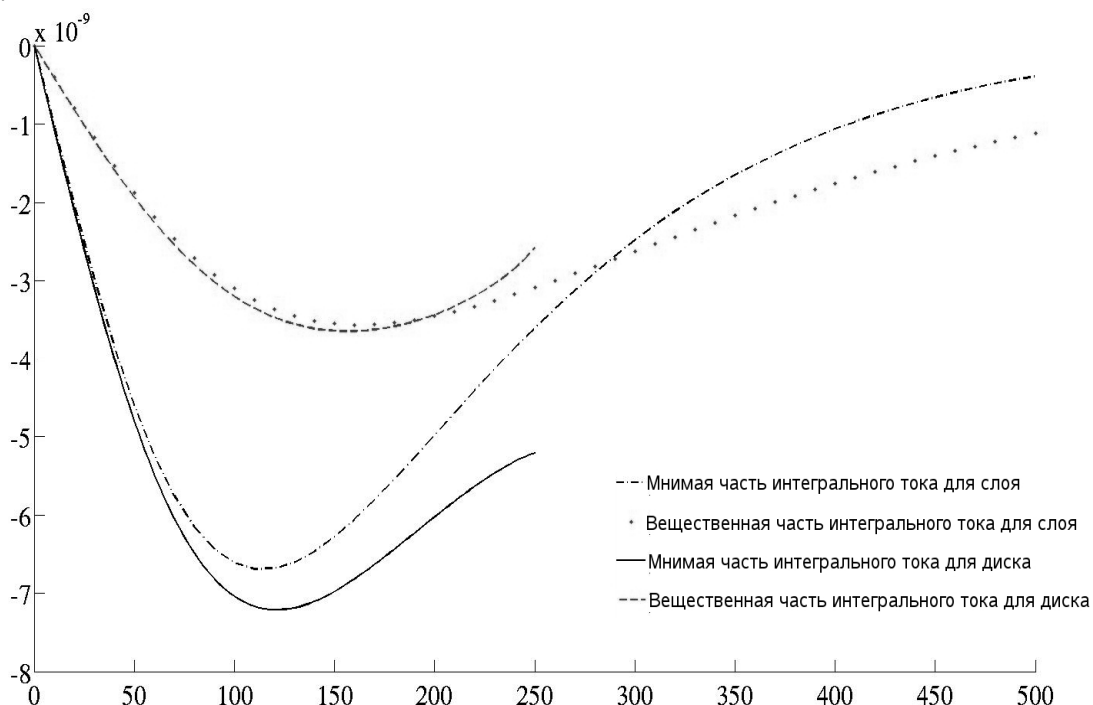


Рис. 5 Вещественная и мнимая части интегрального тока для слоя и диска радиусом 250 м в зависимости от расстояния по горизонтали. Частота 128 Гц.

При увеличении радиуса диска до трех расстояний (500 метров) совпадение на всех частотах от 128 Гц до 16536 Гц практически полное, кроме края диска, где на низких частотах наблюдается скин-эффект(Рис.6).

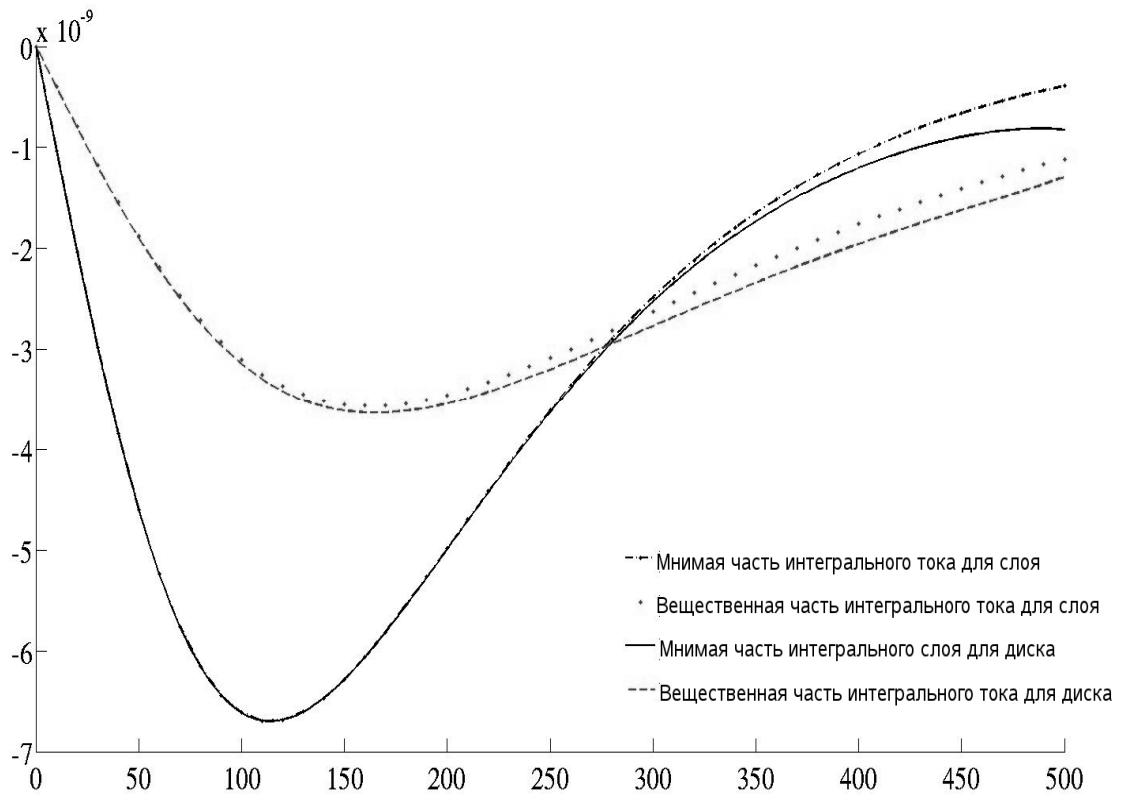


Рис. 6 Вещественная и мнимая части интегрального тока для слоя и диска радиусом 500 м в зависимости от расстояния по горизонтали. Частота 128 Гц.

Отметим, что несмотря на существенное изменение фазы тока в бесконечном слое с глубиной на частоте 4096 Гц (Рис. 3), интегральный ток, посчитанный из уравнения (19), совпадает с интегральным током для бесконечного слоя на этой частоте (Рис. 7). Это позволяет сделать вывод, что подход к численному решению интегральных уравнений, основанный на интегральном токе, дает возможность получить решение с большей точностью при меньшем числе ячеек.

При дальнейшем увеличении радиуса диска — порядка четырех-пяти расстояний до источника (800 метров) — влияние скин-эффекта пренебрежимо мало даже на низкой частоте.

Рассмотрим поле диполя в случае однородного полупространства. Тогда вертикальная магнитная компонента вторичного поля, которая нас и интересует, будет вычисляться по формуле (21):

$$H_z = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{\lambda - \eta}{\lambda + \eta} e^{-2h\lambda} \lambda d\lambda, \quad (21)$$

где ρ — расстояние между источником и приемником, h — полусумма высот источника и приемника, $\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $k^2 = i\omega\sigma\mu_0$. Определим функцию $Q(\rho, h, k)$ следующим образом:

$$Q(\rho, h, k) = \frac{\text{Im}H_z}{\text{Re}H_z} \quad (22)$$

При фиксированном взаимном расположении источника и приемника функция $Q(\rho, h, k)$ монотонно убывает по переменной k . Таким образом, зная взаимное расположения источника и приемника, можно однозначно восстановить проводимость σ по значению функции Q на данной фиксированной частоте.

Пусть для слоистой среды, содержащей неоднородности, вертикальная компонента вторичного магнитного поля в точке измерения равна $H_z^u(\omega)$, тогда кажущейся проводимостью для этой среды будем называть такую функцию $\sigma(\omega)$, что

$$Q(\rho, h, \sigma(\omega)\omega\mu_0) = \frac{\text{Im}H_z^u(\omega)}{\text{Re}H_z^u(\omega)} \quad (23)$$

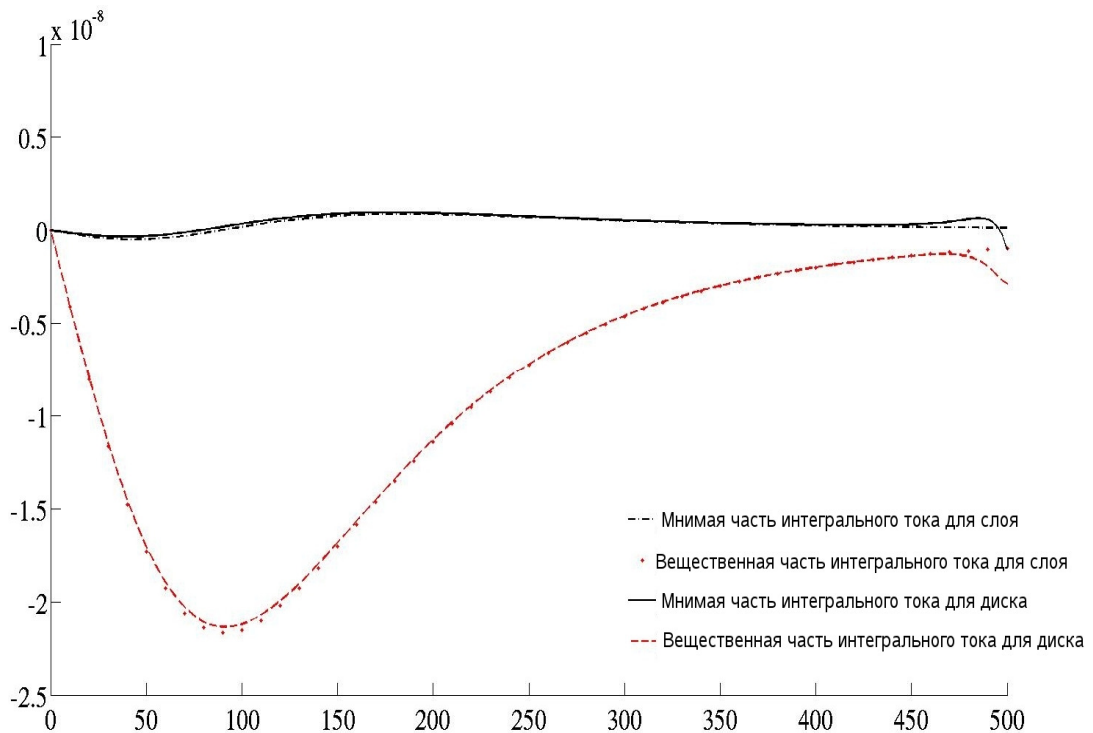


Рис. 7 Вещественная и мнимая части интегрального тока в диске и бесконечном слое для диска радиусом 500 м на частоте 4096 Гц.

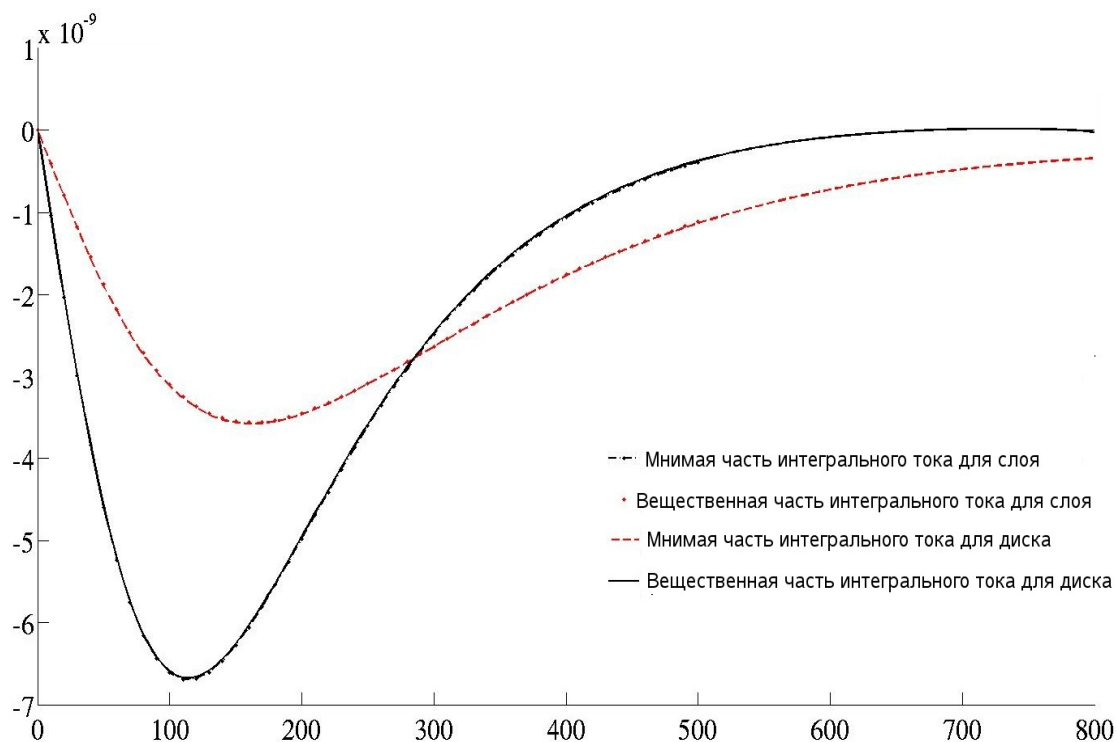


Рис. 8 Вещественная и мнимая части интегрального тока для слоя и диска радиусом 800 м в зависимости от расстояния по горизонтали. Частота 128 Гц.

Заметим, что на высоких частотах, когда поле практически не проникает дальше верхнего слоя, кажущаяся проводимость совпадает с проводимостью первого слоя.

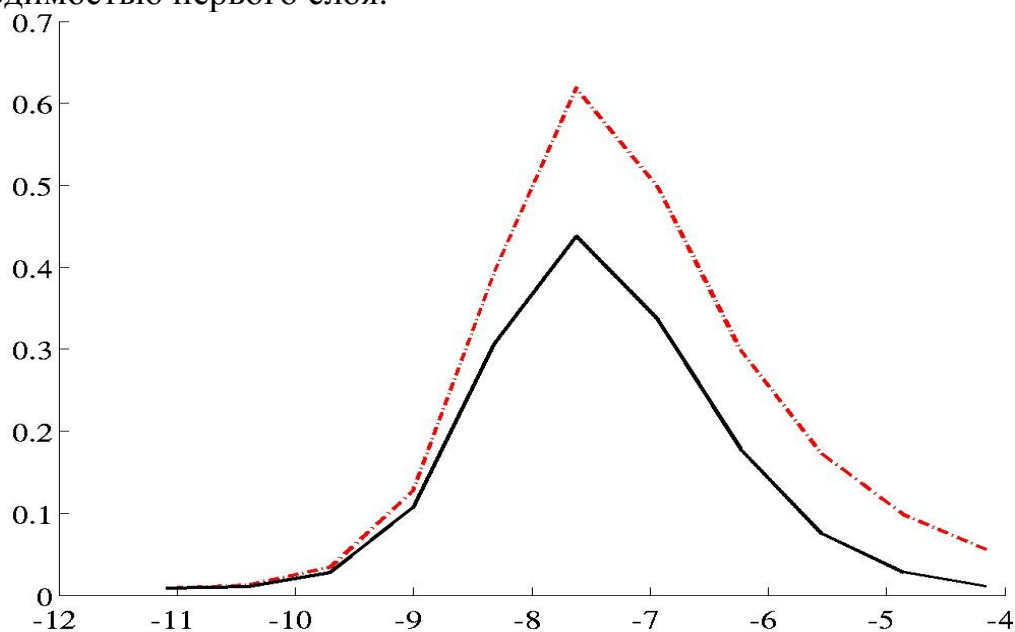


Рис. 9 Кажущаяся проводимость для диска радиусом 250 м (штрих-пунктир) и слоя (сплошная линия) в зависимости от логарифма периода.

На основании решения задачи (19) были проведены расчеты кажущейся проводимости для однородного полупространства содержащего диск (Рис. 9, Рис. 10). Зависимость кажущейся проводимости от радиуса диска примерно такая же, как и у интегрального тока. При радиусе диска 250 м кажущаяся проводимость для диска существенно отличается от случая слоистой среды. Для диска радиусом 500 м (два-три расстояния до центра диска по вертикали) отличие кажущихся проводимостей меньше 5% на всех частотах.

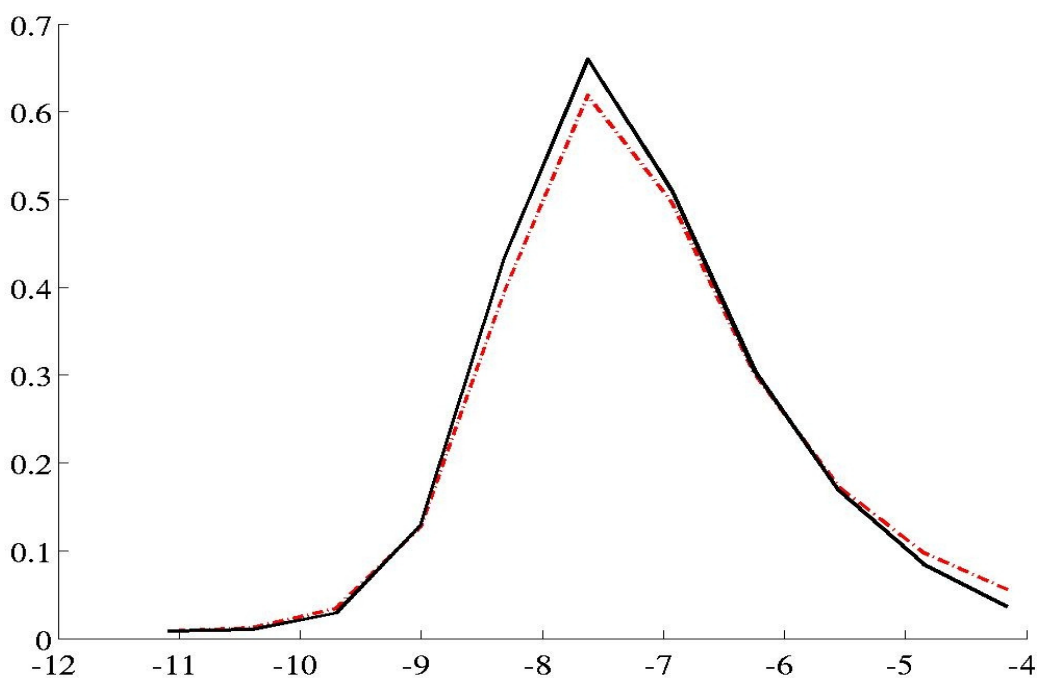


Рис. 10 Кажущаяся проводимость для диска радиусом 500 м (штрихпунктир) и слоя (сплошная линия) в зависимости от логарифма периода.

Заключение

Проведенное исследование показало, что предположение о небольших размерах зоны влияния магнитного диполя оказалось верным. При высоте диполя порядка 100-200 метров над землей, что соответствует реальным задачам аэроаэрогеофизики, тела, горизонтальный размер которых превосходит расстояние от них до источника в 2-3 раза, можно моделировать бесконечными слоями, что существенно уменьшит объем вычислений и позволит быстро решать обратные задачи аэроаэрогеофизики. Отметим, что проведенное исследование не затрагивало случаи низкого (порядка 10 метров над землей) расположения диполя. Была показана высокая эффективность метода интегрального тока для решения задач аэроаэрогеофизики.

Литература

1. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. Москва, Макс Пресс, 2008, 307с.
2. Anderson W.L. Numerical integration of related Hankel transforms of order 0 and 1 by adaptive digital filtering. Geophysics, 1979, 44, p.1287-1305.
3. Pravin K Gupta, Sri Niwas and Neeta Chaudhary. 2006 Fast computation of Hankel Transform using orthonormal exponential approximation of complex kernel function. Journal of Earth System Science Vol. 115, No. 3.