

РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОТРЕЗКЕ МАЛОЙ ДЛИНЫ¹

Введение

Настоящая работа посвящена изучению сверхбыстрых процессов, развивающихся *в режиме с обострением*, которые протекают в нелинейных средах с объемным источником тепла и нелинейным коэффициентом теплопроводности. Функции, характеризующие такие процессы (температура, энергия и т. д.), асимптотически уходят в бесконечность за конечное время, называемое *временем обострения*.

Интерес к режимам с обострением возник около тридцати лет назад в связи с исследованием процессов термоядерного горения в высокотемпературной плазме [1], [2]. Было открыто, что процесс горения в среде с нелинейной теплопроводностью может сопровождаться образованием нестационарных диссипативных структур и явлением *локализации*. При этом в ограниченной области пространства, имеющей характерный размер, происходит интенсивный нагрев в режиме с обострением, в то время как вне этой области температура либо строго равна нулю, либо ограничена. Размер области локализации называется *фундаментальной длиной* решения.

В дальнейшем режимы с обострением нашли много новых приложений в различных областях науки: в физике плазмы, астрофизике, химической кинетике, экологии, эпидемиологии, экономике и других [3]-[8]. Несмотря на то, что модели, описывающие режимы с обострением, являются идеализацией реальных процессов и не учитывают факторы, ограничивающие рост исследуемой функции вблизи момента обострения, они позволяют понять и изучить наиболее значимые черты исследуемой системы, которые проявляются длительное время.

Одной из основных моделей для изучения режимов с обострением является квазилинейное уравнение теплопроводности с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящими от температуры. При соответствующем выборе значений параметров оно описывает термоядерное горение плазмы с электронной или радиационной теплопроводностью [2], некоторые автокаталитические химические реакции, и даже лежит в основе модели глобальной социальной эволюции человеческого общества [7],[8]. Это

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 08-01-00781

уравнение изучалось ранее во многих работах, в которых были во многом решены проблемы, касающиеся определения условий существования различных типов режимов с обострением, возникновения явления локализации процесса горения в пространстве, образования простых и сложных структур и др. (см., например, [9]-[11]).

Особое место в исследовании режимов с обострением занимает изучение автомоделных или инвариантно-групповых решений рассматриваемого уравнения. Именно автомоделные решения являются асимптотиками (аттракторами) решений задачи Коши с произвольными начальными данными, и описывают типы диссипативных структур, которые могут возникать и развиваться в данной нелинейной среде [12], [10]. Они представляют собой решения, обладающие пространственно-временной масштабной инвариантностью, и характеризуют важнейшие внутренние свойства самой нелинейной диссипативной среды, поэтому их принято называть *собственными функциями нелинейной диссипативной среды* [13].

В зависимости от значений параметров существует три типа автомоделных решений, развивающихся в режиме с обострением [14], [12].

HS-режим реализуется, если диффузия тепла растет быстрее, чем происходит нагрев среды за счет источника; формируется тепловая волна, которая за конечное время охватывает все пространство. Процесс горения в этом случае не локализован.

S-режим с обострением имеет место, когда диффузия тепла согласована с интенсивностью нагрева, что приводит к формированию нестационарной диссипативной структуры, локализованной на фундаментальной длине. Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю.

LS-режим с обострением реализуется в случае, если интенсивность источника сильнее, чем диффузия. В этом случае автомоделное решение существует на всей бесконечной прямой, и представляет собой сходящуюся к центру симметрии тепловую волну. Температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, тогда как вне ее она стремится к предельному, постоянному по времени асимптотическому распределению температуры (см. ниже).

С помощью теорем сравнения в работе [15] было доказано, что любые финитные начальные возмущения, инициализирующие процесс горения, в этом случае остаются финитными, то есть имеет место локализация тепла. Автомоделное решение описывает процесс в ограниченной области вблизи центра симметрии, где идет интенсивный нагрев. Размер области локализации в *LS-режиме* зависит не только от

значений параметров модели, но и от формы и амплитуды начального финитного возмущения. То есть, в отличие от S -режима, строгое понятие фундаментальной длины как фундаментальной константы в данном случае ввести нельзя. В настоящей работе подробно исследована динамика различных начальных профилей, областей локализации получаемых решений и выход их на автомодельный режим.

В задачах, возникающих на практике, значения реальных параметров часто бывают таковы, что размер области локализации может намного превышать размеры области, в которой протекает описываемый процесс. Подобная ситуация возникает, например, в задачах, связанных с моделированием глобальной эволюции человеческого сообщества [7], численность которого растет в режиме с обострением в области, ограниченной размерами земного шара. В связи с этим представляет интерес изучение рассматриваемого уравнения в области пространства много меньшей или сравнимой с размером области локализации, а также с периодическими условиями на границе. В настоящей работе исследованы особенности выхода различных начальных возмущений на автомодельный режим для таких случаев.

Кроме того, в последнее время возникли новые приложения режимов с обострением, требующие описания циклических процессов, проходящих несколько витков эволюции. Например, при моделировании той же глобальной эволюции мирового сообщества необходимо описать существование социально-экономических и социокультурных циклов [7] на фоне общего тренда – развития в режиме с обострением. В настоящей работе подробно описано, как возникают циклы и как меняются их характеристики со временем, по мере приближения к моменту обострения.

1. Постановка и некоторые свойства автомодельной задачи

Рассмотрим одномерное квазилинейное уравнение теплопроводности относительно распределения температуры $T(r, t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 T^\beta \quad (1)$$

где t – время, r – пространственная координата, $\chi_0, q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$ – заданные параметры.

Горение инициируется заданием некоторого начального ограниченного распределения температуры на всей прямой или на отрезке:

$$T(r, 0) = T_0(r) \leq M < \infty. \quad (2)$$

На фронте $r = r_f$ волны горения ставятся условия равенства нулю температуры и теплового потока:

$$\chi_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_f} = 0, \quad T \Big|_{r=r_f} = 0 \quad (3.1)$$

Если фронт находится на бесконечности, то граничные условия имеют вид:

$$\chi_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

В центре симметрии решения удовлетворяют условию:

$$\chi_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (4)$$

Без ограничения общности параметры χ_0 , q_0 положим равными единице (см. п.4).

В одномерном случае автомодельные решения уравнения (1) имеют вид [12]:

$$T(r, t) = g(t) \Theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\varphi(t)} \quad (5)$$

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta - 1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}, \quad (6)$$

где ξ – автомодельная переменная, τ – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (5). При $\beta > 1$ и $\tau > 0$ автомодельные решения развиваются в режиме с обострением; тогда τ имеет смысл времени обострения. Автомодельное уравнение относительно функции $\Theta(\xi)$ имеет вид:

$$\frac{d}{dr} \left(\Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi \frac{d\Theta}{d\xi} - \Theta^\beta \quad (7)$$

В соответствии с условиями (3) и (4) уравнение (7) дополняется следующими граничными условиями, либо на фронте при $\xi = \xi_f$:

$$\Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad (8.1)$$

либо на бесконечности при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (8.2)$$

а также условиям в начале координат:

$$\Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi=0} < \infty. \quad (9)$$

Краевая задача (8.1) или (8.2), (9) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (7) является задачей на собственные значения τ и собственные функции (СФ) $\Theta(\xi, \tau)$. Если собственные значения и СФ автомодельной задачи найдены, то распределение температуры в каждый момент времени задается формулами (5), (6).

В зависимости от значений параметров β и σ существует три типа автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением. Нестационарные диссипативные структуры, описываемые СФ автомодельной задачи, существуют при $\beta \geq \sigma + 1$.

Случай $\beta = \sigma + 1$ соответствует S -режиму с обострением. В этом случае, как следует из формул (5), (6), фронт и все остальные точки профиля автомодельного решения не перемещаются по пространству (так как $\xi = r$); формируется нестационарная диссипативная структура, локализованная на отрезке размером L_T , называемым *фундаментальной длиной*. Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. В работе [14] для этого случая получено аналитическое решение:

$$T(r, t) = T_0 g(t) \Theta_S(r), \quad 0 \leq r \leq 0.5 * L_T,$$

$$\Theta_S(r) = \cos^{2/\sigma} \left(\frac{\pi r}{L_T} \right), \quad L_T = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\frac{\chi_0}{q_0} (\sigma + 1)}. \quad (10)$$

При $\beta > \sigma + 1$ все точки профиля СФ движутся к центру (так как $r(t) = \xi \phi(t)$ уменьшается со временем) и растут в режиме с обострением, полуширина области горения сокращается, и температура при $t = \tau$ обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии. В этом случае не существует решения автомодельной задачи в ограниченной области пространства; фронт находится на бесконечности, и имеет место сокращение эффективной ширины области горения. Автомодельное решение описывает сходящуюся к центру тепловую волну. Это рассматриваемый LS -режим с обострением.

2. Свойства СФ в LS -режиме

Отметим некоторые важные свойства СФ и собственных значений автомодельной задачи при $\beta > \sigma + 1$ [12].

1. Если исследуемая задача имеет решение при некотором значении $\tau = \tau_1 > 0$, то она имеет решение и при любом другом значении $\tau = \tau_2 > 0$. Эти решения связаны преобразованием подобия:

$$\Theta(\xi, \tau_2) = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^m \Theta\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \xi, \tau_1\right).$$

СФ отвечающие разным собственным значениям на самом деле являются одним и тем же автомодельным решением, взятым в разные моменты времени. Это свойство позволяет не рассматривать все значения $\tau > 0$, а выбрать одно произвольное, и найти ему соответствующий спектр функций $\Theta(\xi, \tau)$.

2. В LS -режиме существует асимптотическое разложение автомодельного решения при $\xi \rightarrow \infty$. Главный член асимптотики имеет вид:

$$\Theta(\xi) \approx C \xi^{-p}, \quad p = \frac{2}{\beta - \sigma - 1} > 0. \quad (11)$$

Если подставить (11) в выражение для автомодельного решения (5), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры не зависит от времени, он описывает предельное распределение температуры при $t \rightarrow \tau$:

$$T(r, t) \xrightarrow{t \rightarrow \tau} C r^{-p}. \quad (12)$$

Чем ближе к моменту обострения, тем ближе СФ к предельному асимптотическому распределению. Таким образом, область высоких температур оказывается локализованной в пространстве, температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, а вне этой области она стремится к предельному распределению температуры (12). В работе [15] показано, что финитное начальное распределение остается финитным, автомодельный режим описывает процессы внутри области локализации, то есть имеет место «обрезание хвоста» (11) у автомодельного решения.

3. В LS -режиме автомодельная задача может иметь несколько СФ $\Theta_i(\xi)$, $i=1, 2, \dots, N$, отвечающих одному собственному значению τ , в зависимости от значений параметров β и σ . Недавно с помощью методов продолжения по параметру и бифуркационного анализа было уточнено число одномерных СФ; показано, что оно определяется следующей формулой [16],[17]:

$$\begin{cases} N = [a], & \text{если } a \text{ — нецелое, } a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \\ N = a - 1, & \text{если } a \text{ — целое} \end{cases} \quad (13)$$

Первая СФ представляет собой простую структуру, имеющую один максимум в начале координат. Следующие СФ являются немонотонными,

с числом локальных экстремумов, равным их номеру; они называются сложными.

На Рис.1 представлены все семь СФ для $\sigma = 2$, $\beta = 3.3$. Проведенные исследования показали, что СФ в области своей немонотонности приближенно описываются решением $u(\xi)$ линеаризованного уравнения:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{du}{d\xi} + (\beta - 1)u = 0 \quad (14)$$

Сплошной линией изображены СФ, а пунктирной линией отмечены соответствующие решения линеаризованного уравнения.

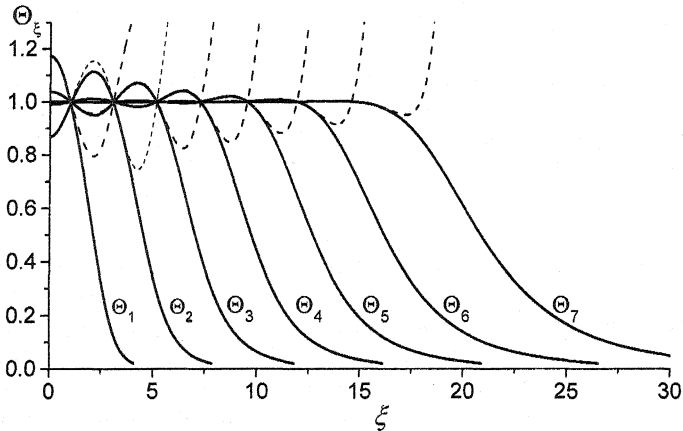


Рис. 1.

Из формулы (13) следует, что при $\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1$ автомодельная задача в LS-режиме имеет единственное решение – СФ $\Theta_1(\xi)$. При $\sigma + 1 < \beta < 2\sigma + 1$ спектр содержит несколько СФ, причем при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ число СФ стремится к бесконечности.

4. Автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением, не обладают устойчивостью по отношению к малым возмущениям. Малые возмущения решения приводят к малому изменению времени обострения τ , которое, в свою очередь, приводит к сколь угодно большому расхождению решений при приближении к моменту обострения. Однако автомодельные решения могут обладать *структурной устойчивостью* в смысле выхода на автомодельный режим.

Для определения структурной устойчивости решение $T(r, t)$ уравнения (1) подвергается так называемой *автомодельной обработке* :

$$\bar{\Theta}(r, t) = g(t)^{-1} T(r \cdot \varphi(t), t) \quad (15)$$

где функции $g(t)$ и $\varphi(t)$ определены автомодельными зависимостями (5).

Структурно устойчивым автомодельным решением называется устойчивый стационар $\Theta_a(r)$ автомодельной обработки (13). Другими словами, нормированное решение при $t \rightarrow \tau$ стремится к нормированному автомодельному профилю $\Theta_a(r)$:

$$\bar{\Theta}(t, r) \xrightarrow{t \rightarrow \tau} \Theta_a(r). \quad (16)$$

На практике для определения структурной устойчивости и нахождения нормированного решения задачи Коши непосредственное применение формулы (15) невозможно, поскольку для нерезонансного возбуждения неизвестен момент обострения τ , который входит в функции $g(t)$ и $\varphi(t)$. Поэтому в численных расчетах в каждый момент времени температура $T(r, t)$ в каждой точке сетки делилась на максимум распределения температуры T_{\max} , а значение r – на координату полуширины $r_h(t) = \max\{r_i\} : T(r_i, t) = 0.5 * T_{\max}$. Полученное таким образом нормированное решение в случае устойчивости или стремится к стационарному распределению или остается стационаром при резонансном возбуждении.

Асимптотическая устойчивость доказана для автомодельных решений, развивающихся в *HS*- и *S*-режимах с обострением [10]. В *LS*-режиме структурно устойчивым решением является простая структура с одним максимумом в центре, описываемая СФ $\Theta_1(\xi)$.

Сложные СФ, имеющие два и более максимумов, не обладают структурной устойчивостью. Даже при резонансном возбуждении, то есть при использовании их в качестве начальных данных в задаче Коши, они теряют свою пространственную структуру при приближении к моменту обострения; при этом процесс горения вырождается в горение одной, двух или более простых структур, следующих автомодельному закону и имеющих каждая свой момент обострения. Однако было отмечено, что, в отличие от произвольных немонотонных профилей температуры, сложные СФ достаточно долго, почти все время обострения t_f , сохраняют свою пространственную структуру, следуя автомодельному закону. В [13] было предложено назвать их метастабильно устойчивыми, или *метаустойчивыми*.

3. Эволюция финитных возмущений.

Рассмотрим задачу (1), (3) для начальных финитных возмущений (2) при $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 3$. Выбор такого диапазона параметров обусловлен

тем, что в этом случае любое решение развивается в режиме с обострением. (При $\beta > \beta_f = \sigma + 3$, где β_f – критическая экспонента Фуджита [12], наряду с LS -режимом с обострением автомодельная задача имеет затухающее автомодельное решение, существующее в целом – обычный HS -режим.) Кроме того, в этом случае любое финитное возмущение остается финитным. Однако, в отличие от S -режима, размер области локализации зависит не только от значений параметров, но и от формы и энергии начального финитного распределения (см. в [10]):

$$L_{LS} = \left(W_0^{(\beta-\sigma-1)} / d \right)^{1/(\beta-\sigma-3)}, \quad d = \pi^2 \frac{2(\beta + \sigma + 1)}{\sigma(\beta - 1)}, \quad (17)$$

где W_0 – оценка начальной энергии: $W_0 = \max(T_0) \times \|\text{supp } T_0\|$.

Из этой формулы следует, что размер области локализации может намного превосходить размер носителя начального распределения $\|\text{supp } T_0\|$, то есть начавшееся горение должно распространяться в окружающую среду. Возникает вопрос о выходе решений на автомодельный режим, для которого характерно сокращение полуширины области горения.

В настоящей работе подробно рассматривалась динамика начальных распределений вида:

$$T_0(r) = \begin{cases} A \cos^2\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right), & |r| \leq r_0, \\ 0, & |r| > r_0. \end{cases} \quad (18)$$

в зависимости от амплитуды A и размера носителя r_0 .

Задача решалась на достаточно густой равномерной сетке разностным методом со вторым порядком аппроксимации. Использовалась чисто неявная схема для уравнения теплопроводности [18], и переменный шаг по времени, согласованный с ростом решения в режиме с обострением.

Динамику развития решений можно наглядно продемонстрировать на фазовой плоскости $(\varphi(t), g(t))$, где $\varphi(t)$ – это полуширина решения, а $g(t)$ – его амплитуда. Расчеты проводились для двух наборов параметров: (а) $\sigma = 1, \beta = 3.2$; (б) $\sigma = 1, \beta = 2.2$. На Рис.2 на фазовой плоскости изображены траектории, отвечающие разным начальным данным. Траектория, соответствующая автомодельному решению, отмечена жирной линией. Из формул (12) следует, что она имеет вид $g = C\varphi^{-2/(\beta-\sigma-1)}$. Видно, что все траектории со временем приближаются к автомодельной траектории, то есть выходят на автомодельный закон развития. Это же подтверждает и автомодельная обработка решений.

Из представленных диаграмм видно, что для начальных распределений, взятых ниже автомодельной кривой, траектории имеют вид петель, что означает наличие двух стадий развития решения.

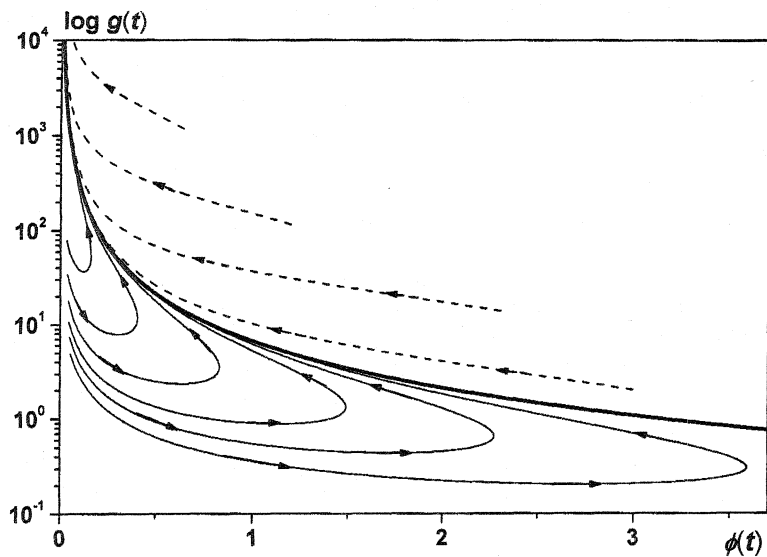


Рис. 2(а)

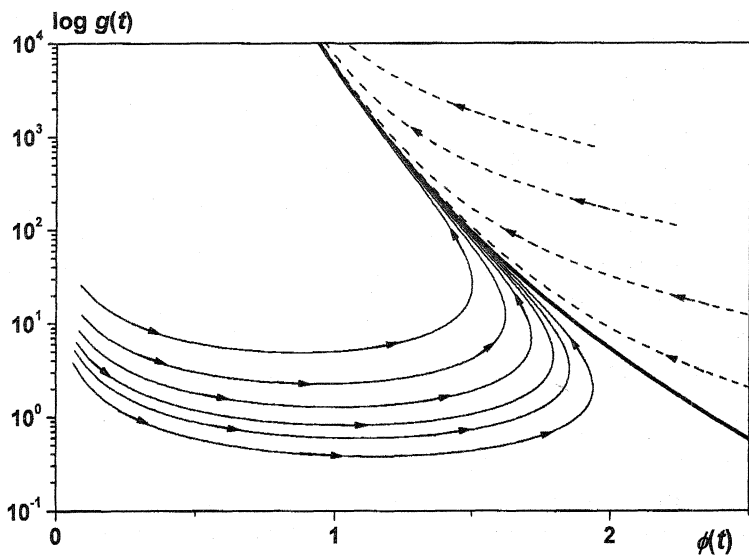


Рис. 2(б)

На первой стадии идет растекание тепла в холодную среду: полуширина и фронт решения увеличиваются, а амплитуда вначале процесса уменьшается, затем начинает медленно расти. Условно завершением первой стадии можно считать остановку фронта растекания, что означает локализацию процесса. На фазовой плоскости это соответствует прохождению траекторией точки поворота.

На второй стадии наблюдается взрывной рост амплитуды в режиме с обострением и сокращение полуширины; решение выходит на автомодельный режим. На фазовой плоскости траектория асимптотически приближается к автомодельной кривой.

Из рисунка видно, что чем больше амплитуда начального возмущения A , тем меньше размер петли. Это означает, что размер области локализации и время существования решений сокращается. Наоборот, чем меньше амплитуда, тем сильнее растекание и больше размер области локализации. Особенно сильно проявляется эта тенденция при сравнительно большой разнице между параметрами σ и β (см. Рис. 2(a)), когда имеет место сильное сокращение полуширины по автомодельному закону. Если β близко к $\sigma+1$, то полуширина сокращается медленно; при изменении амплитуды начального возмущения размер области локализации изменяется не сильно, и размер петля на фазовой плоскости отличается ненамного (см. Рис.2(б)).

Рассмотрим теперь динамику начальных возмущений, находящихся на фазовой плоскости выше автомодельной траектории. Из рисунка видно, что траектории, находящиеся выше автомодельной, приближаются к ней монотонно. В этом случае стадия растекания отсутствует; амплитуда решения сразу начинает увеличиваться, а полуширина уменьшаться, и решение быстро переходит в стадию взрывного роста.

4. Циклы развития в режиме с обострением

В большинстве задач, возникающих при исследовании уравнения (1), значения параметров χ_0 , q_0 постоянны. Поэтому без ограничения общности их полагают равными единице, переходя к другим масштабам по пространству и времени:

$$\tilde{r} = r_0 r, \quad \tilde{t} = t_0 t, \quad r_0 = \sqrt{q_0 / \chi_0}, \quad t_0 = q_0, \quad (19)$$

Однако, в последнее время возникли новые приложения режимов с обострением, в которых эти параметры могут изменяться с течением времени [7]. В связи с этим представляет интерес исследование динамики решений уравнения (1) при изменении значений χ_0 и q_0 .

Рассмотрим сначала, как изменяется динамика системы при изменении каждого из параметров по отдельности. Зафиксируем значение параметра $q_0 = 1$ и исследуем решения, полученные для разных значений

коэффициента χ_0 . В качестве начального распределения будем брать функцию (18) с амплитудой $A=50$ и носителем $r_0 = 0.1$

Результаты проведенных расчетов отражены на фазовой плоскости (φ, g) (см. Рис.3(a)). Приведенные траектории имеют вид петель и отвечают значениям $\chi_0 = 1, 2, \dots, 6$. Пунктиром отмечена кривая, представляющая собой множество точек поворота таких траекторий.

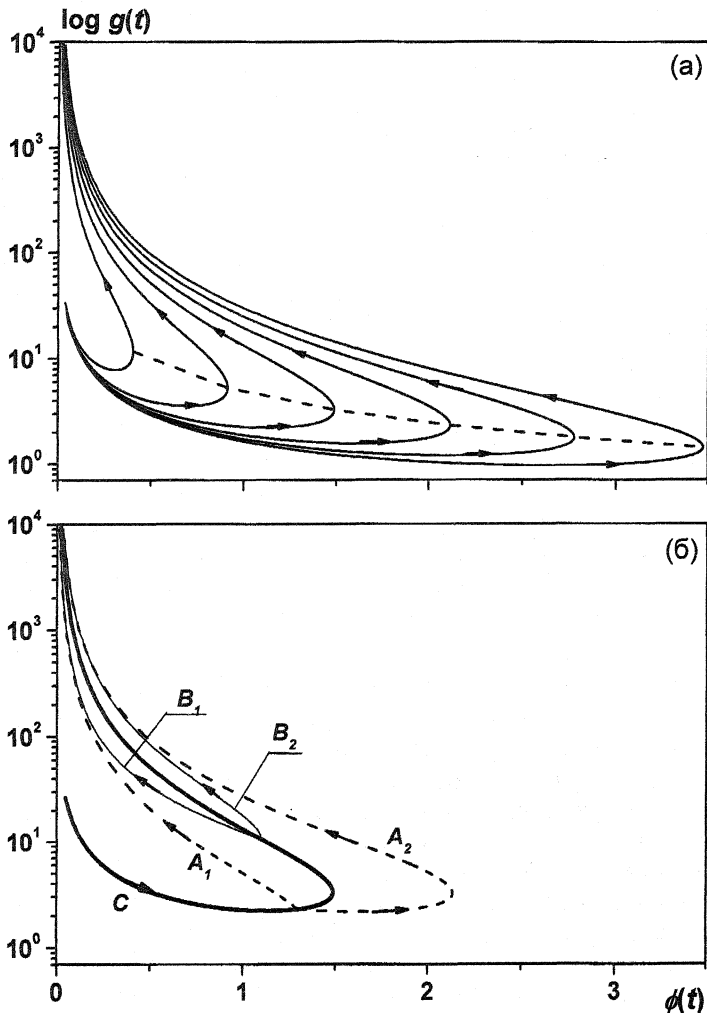


Рис. 3

Самая маленькая петля соответствует $\chi_0 = 1$. При возрастании коэффициента диффузии χ_0 размер области локализации растет по закону:

$$L \sim \sqrt{\chi_0 / q_0}, \quad (20)$$

что соответствует преобразованию масштабов (19), подтверждается расчетами и согласуется с формулой для фундаментальной длины в S -режиме (см. формулу (10)). Поэтому и размер петель на фазовой плоскости увеличивается.

Теперь исследуем, как будет проходить развитие решения, если в ходе расчета скачком изменится значение χ_0 . В качестве примера будем следить на фазовой плоскости за эволюцией траектории, отвечающей $\chi_0 = 3$ (обозначим ее C) (Рис. 3(б)). Если в момент скачка система находится на стадии растекания, то есть траектория C еще не дошла до точки поворота, то при увеличении χ_0 продлевается стадия растекания, и, соответственно, увеличивается размер петли (траектория A_1); при уменьшении χ_0 происходит резкий переход к стадии обострения (траектория A_2). Если же точка скачка находится на верхней «ветке» петли, то увеличение χ_0 даже в несколько раз не приводит к новой фазе растекания; полуширина продолжает сокращаться и траектория быстро подтягивается к соответствующему автомодельному решению (траектория B_1); уменьшение χ_0 ускоряет переход к фазе обострения (траектория B_2). Во всех случаях траектории со временем выходят на автомодельные режимы, соответствующие новым значениям параметра.

Рассмотрим, как выглядят на фазовой плоскости решения системы при разных значениях коэффициента q_0 . На Рис.4(а) приведены результаты аналогичных расчетов для фиксированного значения $\chi_0 = 6$ и набора значений $q_0 = 1, 2, \dots, 6$. Из формулы (20) следует, что влияние на размер области локализации коэффициента q_0 обратно пропорционально. Поэтому самая маленькая петля в этом случае соответствует наибольшему значению q_0 ; чем меньше q_0 , тем большую область фазовой плоскости охватывают траектории.

Рис.4(б) демонстрирует изменение выбранной траектории, соответствующей $q_0 = 2$ и обозначенной как C , в результате скачкообразного уменьшения или увеличения параметра q_0 . Если точка скачка находится ниже кривой поворота, то уменьшение q_0 продлевает стадию растекания (траектория A_1) и увеличивает размер области локализации, тогда как увеличение q_0 переводит систему к стадии быстрого роста амплитуды и сокращения области горения (траектория A_2). Если к моменту изменения параметра исходная траектория C уже

прошла точку поворота, то при уменьшении или увеличении q_0 система остается на стадии роста амплитуды и сокращения полуширины (траектории B_1 и B_2 , соответственно), и быстро выходит на соответствующее автомодельное решение.

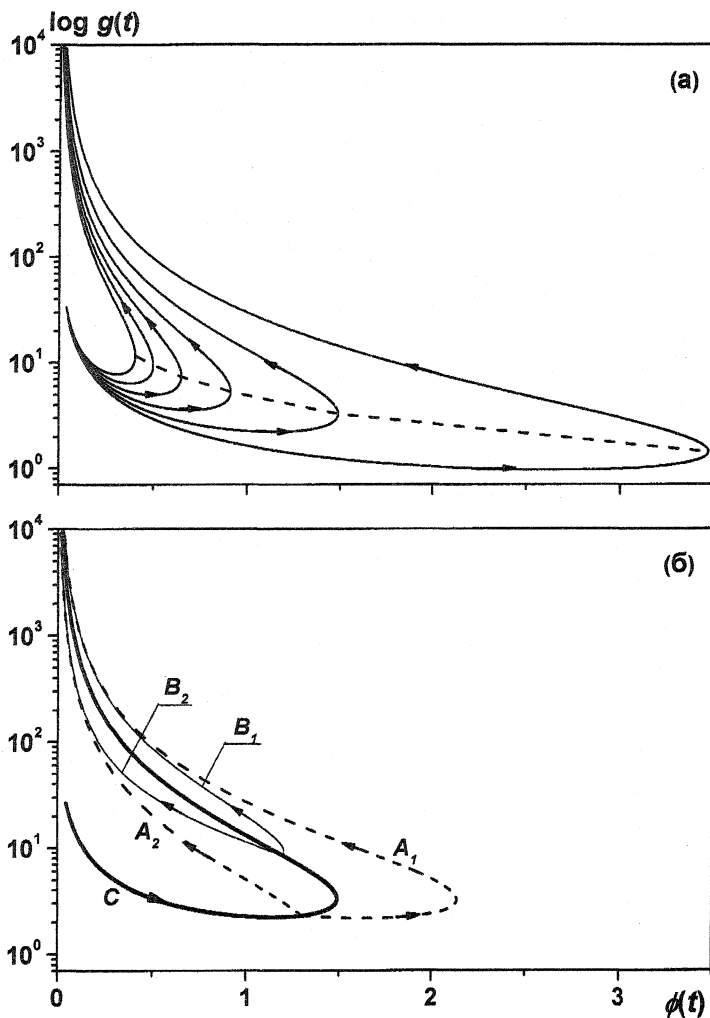


Рис. 4

Таким образом, увеличение или уменьшение в несколько раз значений χ_0 и q_0 может ускорять течение той или иной стадии, или,

наоборот, переключать систему на другую стадию решения. Во всех случаях траектории со временем выходят на автомодельные режимы, соответствующие новым значениям параметра.

Теперь посмотрим, как выглядит на фазовой плоскости эволюция системы, в которой несколько раз подряд скачком на порядок уменьшается параметр q_0 . Зафиксируем параметр $\chi_0 = 6$ и будем в некоторые моменты времени скачком уменьшать значение коэффициента q_0 . Каждое последующее изменение параметра будем производить на стадии, когда траектория уже успевает пройти точку поворота. На Рис. 5 приведена траектория, полученная в результате следующих изменений параметра: $q_0 = 2, 2 \times 10^{-1}, 2 \times 10^{-2}, 3 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-4}$. Сильное уменьшение q_0 приводит к тому, что структура, находящаяся на этапе роста амплитуды и сокращения полуширины, опять начинает растекаться; затем фронт достигает нового размера области локализации, и начинается стадия быстрого роста амплитуды и сокращения области горения; на фазовой плоскости формируется новый виток траектории. Таким образом, в ходе последовательного уменьшения q_0 , несколько раз происходит чередование стадий растекания и, наоборот, сокращения структуры, характеризующегося быстрым ростом температуры. Приведенный расчет может служить примером возможного циклического развития некоторого процесса на фоне общего роста в режиме с обострением.

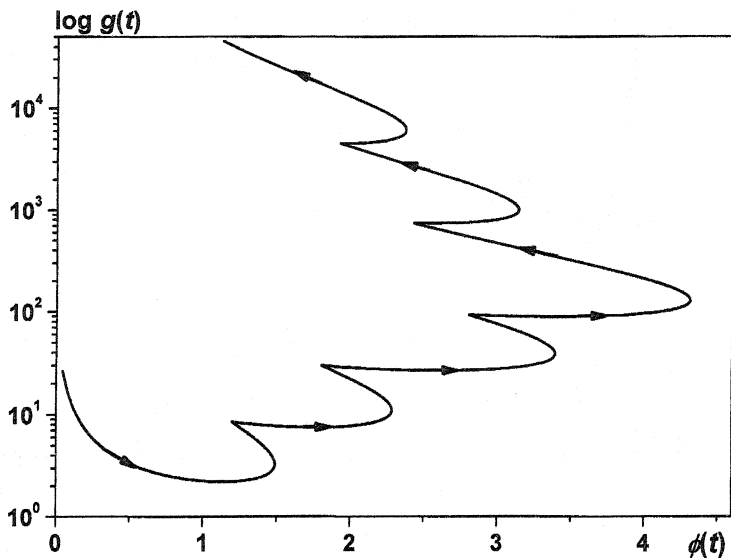


Рис. 5

Аналогичная картина наблюдается при скачкообразном увеличении коэффициента χ_0 .

4. Динамика режимов с обострением на отрезке малой длины в задаче с периодическими граничными условиями.

Исследуем эволюцию различных начальных распределений в задаче (1)-(2) на отрезке $-L \leq r \leq L$ в случае, когда размер отрезка существенно меньше размера области локализации решения, определяемого рассматриваемыми возмущениями.

На концах отрезка $[-L, L]$ поставим периодические граничные условия:

$$T(-L, t) = T(L, t), \quad \frac{\partial T}{\partial r}(-L, t) = \frac{\partial T}{\partial r}(L, t) \quad (21)$$

Параметры χ_0 и q_0 для простоты положим равными 1.

Рассмотрим в качестве начального распределения температуры финитную функцию вида (18), имеющую одним максимум в центре отрезка ($r_0 = 2, A = 1$). Значения $\sigma = 1, \beta = 3.2$. Результаты расчетов представлены на Рис.6. Для сравнительного анализа на Рис.6(а) показана эволюция пространственного профиля на относительно большом отрезке $[-15; 15]$, а на Рис.6(б) – того же возмущения на малом отрезке $[-2; 2]$.

В первом случае границы не оказывают никакого влияния на процесс развития начального распределения, так как размер области локализации, в которую распространяется горение, оказывается меньше, чем отрезок наблюдения. Развитие решения в этом случае имеет две стадии (стадию растекания и стадию взрывного роста амплитуды), и подробно описано выше. Во втором случае границы препятствуют распространению горения, и стадия растекания начального возмущения прерывается. Пространственный профиль решения перестраивается так, чтобы удовлетворить граничным условиям (21). Долгое время наблюдается рост температуры во всех точках отрезка; полуширина области горения при этом остается постоянной. Затем рост температуры в окрестности максимума начинает обгонять рост температуры в остальных точках, и полуширина области горения начинает сокращаться. Далее амплитуда и полуширина распределения начинают развиваться по автомодельному закону, граничные условия перестают влиять на развитие процесса горения в центре и наблюдается выход решения на автомодельный режим, описываемый первой СФ Θ_1 в смысле автомодельной обработки (15). Однако в этом случае процесс выхода начального возмущения на автомодельный режим происходит существенно дольше, а сформированная пространственная структура

совпадает с СФ Θ_1 только в некоторой центральной области и имеет ненулевой температурный фон вне области локализации.

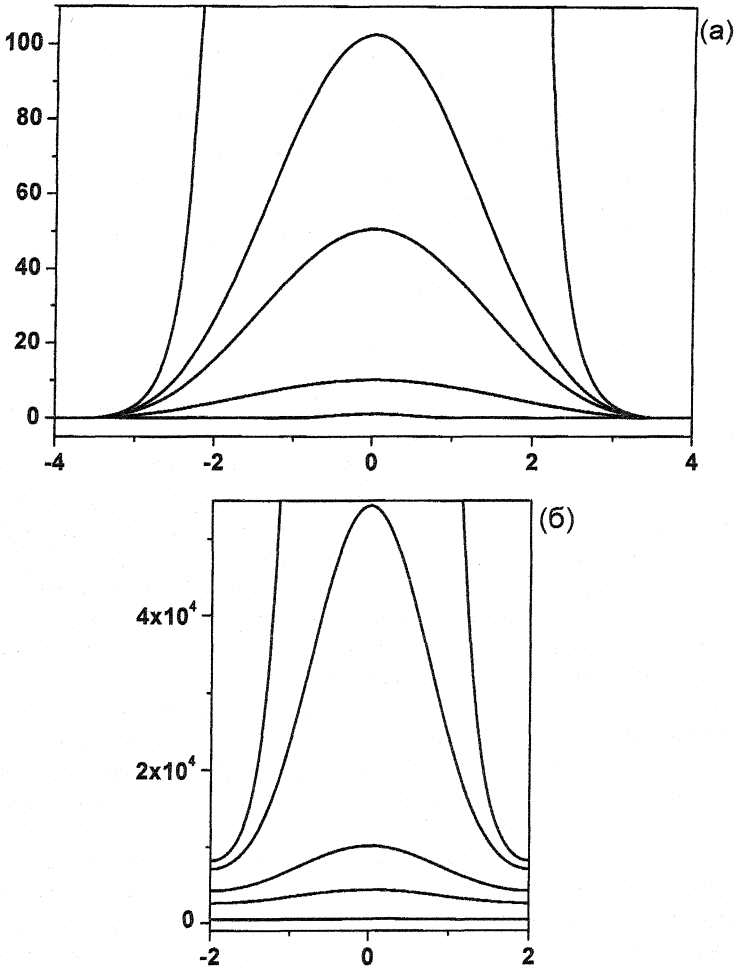


Рис. 6

Сценарий выхода системы на автомодельный режим для подобных случаев продемонстрирован также на Рис.7. На нем представлен набор фазовых траекторий на плоскости $(\varphi(t), g(t))$, отвечающих разным начальным данным при одних и тех же значениях параметров. Траектория, соответствующая автомодельному решению, отмечена жирной линией.

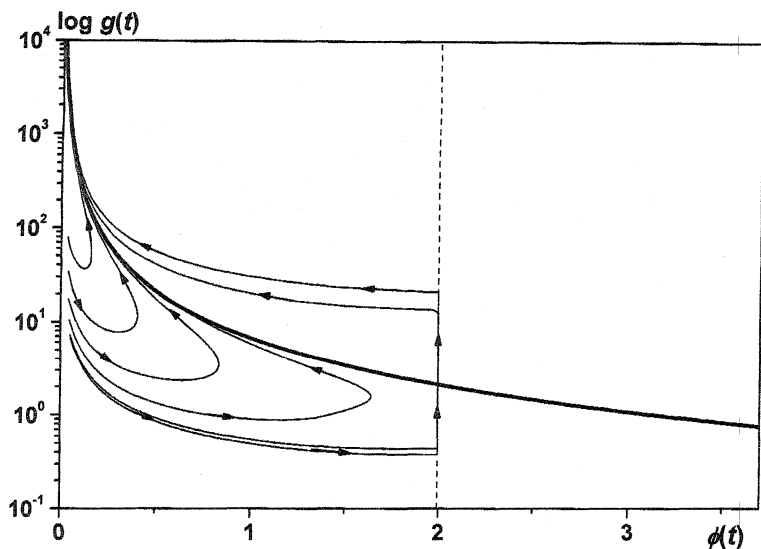


Рис. 7

Видно, что эволюция тех начальных возмущений, для которых область локализации получаемого решения меньше величины отрезка, происходит обычным образом, включая в себя две основные стадии развития (см. п.1). На фазовой плоскости траектории, соответствующие таким решениям, описывают небольшие петли. Однако те начальные распределения, для которых размер области локализации превосходит размер рассматриваемого отрезка, развиваются по другому сценарию. На фазовой плоскости таким решениям соответствуют длинные траектории. Когда фронт волны доходит до границ отрезка, стадия растекания прерывается, и на смену ей приходит стадия роста температуры на всей рассматриваемой области при постоянной полуширине. На рисунке этот этап развития решения соответствует тому, что траектории, дойдя до границы отрезка, уходят вертикально вверх, пересекают автомодельную кривую и таким образом «перескакивают» в надкритическую область. Затем, когда амплитуда достигает некоторого критического значения, решение переходит к стадии взрывного роста амплитуды в режиме с обострением, сопровождающемся сокращением полуширины, и решение выходит на автомодельный режим. Из рисунка видно, что на этой стадии траектории поворачивают влево и асимптотически прижимаются к автомодельной кривой. То есть, несмотря на то, что начальное возмущение берется ниже автомодельной траектории, решения в данном случае выходят на автомодельный режим из надкритической области.

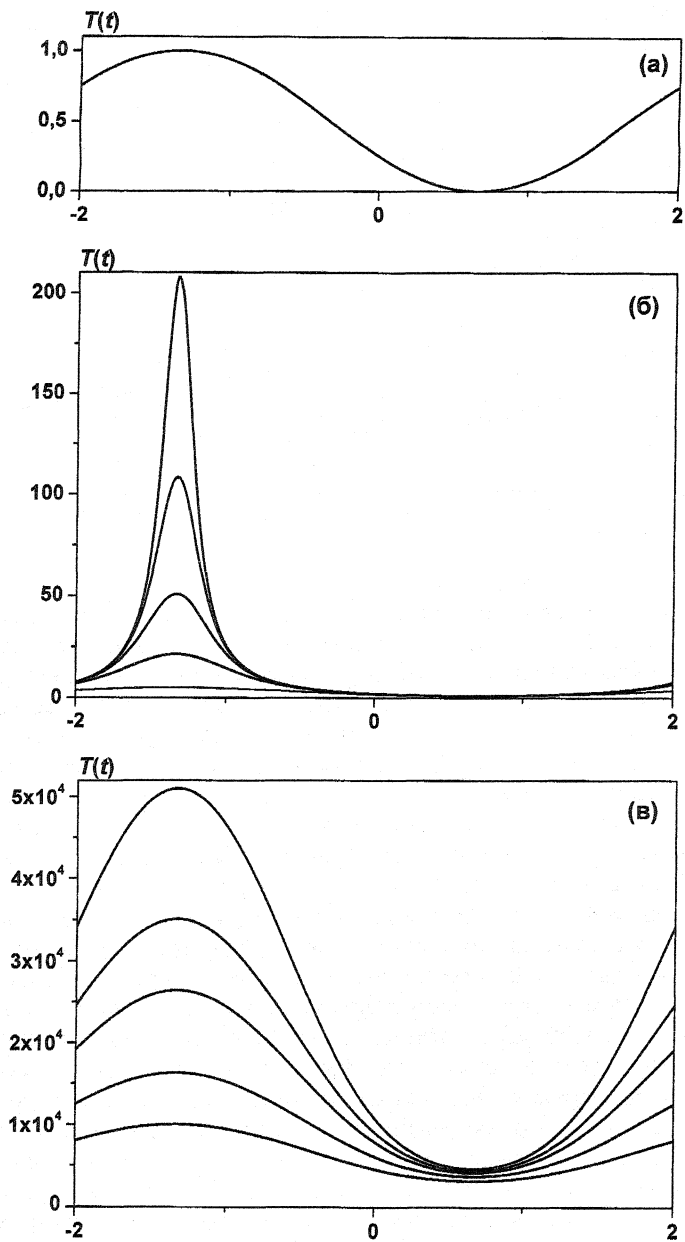


Рис. 8

Исследуем теперь, как будет развиваться на отрезке малой длины несимметричное начальное возмущение. В качестве примера возьмем функцию, имеющую один максимум и один минимум, изображенную на рис. 8(а).

Рассмотрим два случая, отвечающих разным наборам параметров: случай, далекий от S-режима ($\sigma = 1$, $\beta = 3.2$), когда полуширина области горения сравнительно быстро сокращается с ростом температуры, и случай, близкий к S-режиму ($\sigma = 1$, $\beta = 2.2$), когда сокращение полуширины происходит медленно, и формируются структуры широкие и малоподвижные. На Рис.8(б) показаны профили распределения температуры в разные моменты времени для первого случая, а на Рис.8(в) – для второго. Видно, что в обоих случаях несимметричность профилей температуры сохраняется, причем максимум и минимум распределения остаются в тех же точках отрезка. Как и следовало ожидать, в первом случае формируется более узкая структура, интенсивный рост температуры идет только вблизи максимума распределения, а минимум распределения и значение функции на границе увеличиваются незначительно. Во втором случае температура существенно растет на всей области пространства, в том числе и в минимуме.

5. Формирование сложных структур

В предыдущих разделах, изучая динамику развития начальных возмущений на отрезке малой длины, мы исследовали их выход на автомодельный режим, соответствующий первой СФ Θ_1 – простой структуре, имеющей один максимум. Была показана структурная устойчивость данной СФ: в окрестности максимума все точки решения начально-краевой задачи на отрезке развивались по автомодельному закону, отличия решения от СФ Θ_1 наблюдались в окрестности минимума распределения, где температура невелика и ограничена некоторым предельным распределением в течение всего времени существования решения, развивающегося в режиме с обострением. Очевидно, что при применении автомодельной обработки, когда каждая точка распределения делится на максимум температуры, стремящийся в бесконечность, эти отличия стремятся к нулю.

Сложные СФ, имеющие несколько максимумов, как уже было сказано, не обладают структурной устойчивостью, но имеют метастабильную устойчивость. При резонансном возбуждении горения, то есть когда в качестве начального распределения берется сложная СФ, решение длительное время, при росте максимума температуры на несколько порядков, следует автомодельному закону, описываемому данной СФ. Однако вблизи момента обострения сложные структуры

распадаются на простые, которые начинают развиваться независимо, каждая со своим моментом обострения. Время существования сложной структуры зависит от величины и характера вносимых возмущений (например, от грубости дискретизации на сетке при численном счете), от параметров среды, от количества максимумов и от других факторов. В целом можно сказать, что чем сложнее СФ тем меньше время ее существования.

Недавно было показано, что сложные СФ гораздо устойчивее, чем предполагалось раньше; они могут формироваться из произвольных немонотонных распределений и восстанавливаться при некоторых достаточно больших возмущениях, вносимых в численном счете. На Рис.9 представлена эволюция «возмущенной» второй СФ Θ_2 , имеющей два максимума. В начальном распределении срезана часть верхушки одной из вершин и для компенсации добавлен «горб» сбоку (см. Рис.9(а), нижний профиль). Видно, что процессы диффузии быстро приводят к сглаживанию возмущений. Один максимум сначала отстает от роста другого (Рис.9(а)), но затем догоняет его, структура восстанавливается и существует в течение всего времени счета при росте температуры на 4 порядка (см. Рис.9(б)).

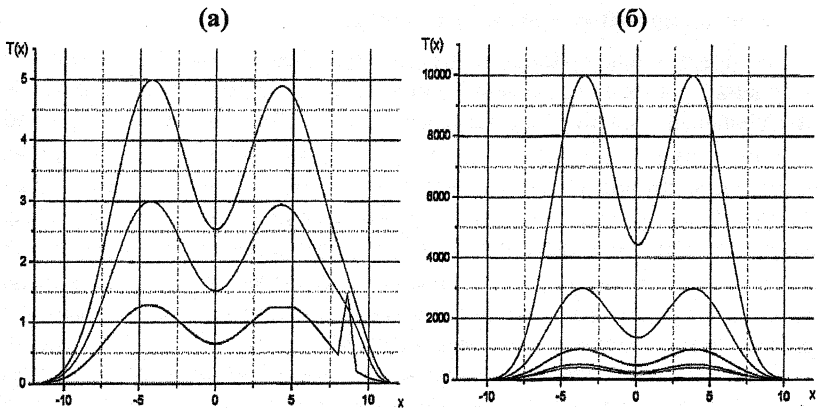


Рис. 9

Если размер области локализации и расположение максимумов после перестройки начального профиля оказывается близким к СФ, то может сформироваться сложная структура, которая будет определять длительное время согласованную динамику развития в нелинейной среде. На Рис.10(а) показано, как начальное синусоидальное распределение с 8-ю максимумами разглаживается, потом формируется метастабильная

структура, состоящая из 4-х максимумов; последняя существует недолго и распадается на 4 независимые простые структуры. Если максимумы начального распределения находятся на расстоянии большем или приблизительно равном фундаментальной длине, то процесс горения происходит в виде независимых простых структур, каждая из которых имеет свое время обострения (см. Рис.10(б)).

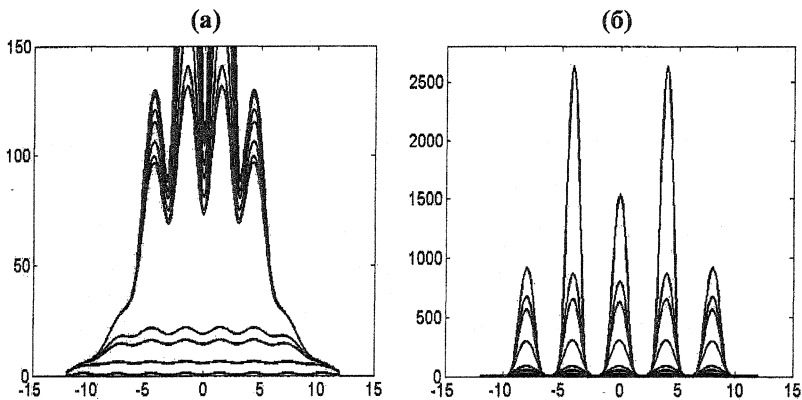


Рис. 10

В приведенных расчетах границы не оказывали влияние на решение задачи, начальное финитное распределение температуры свободно растекалось на прямой, и область локализации была меньше отрезка наблюдения. Теперь исследуем эволюцию немонотонных начальных распределений на отрезке малой длины с периодическими граничными условиями. Проведенные исследования показали, что и в этом случае могут формироваться сложные структуры.

На Рис.11 показана эволюция решения при начальном распределении, имеющем восемь максимумов. Значения параметров равны $\chi_0 = q_0 = 1$, $\sigma = 1$, $\beta = 2.299$. Из рисунка видно, что начальное возмущение быстро сглаживается и приобретает вид, близкий к пространственно-однородному ненулевому фону (см. Рис.11(а)); за счет того, что стадия растекания тепла ограничена размерами рассматриваемой области, температурный фон продолжает расти на всем отрезке. Затем на этом фоне начинает формироваться сложная структура, имеющая три максимума (см. Рис.11(б)). Эта структура существует длительное время, вплоть до значений температуры порядка 10^6 , затем второй и третий максимумы постепенно сливаются в один, и структура распадается на две

простые независимые структуры, развивающиеся со своими моментами обострения.

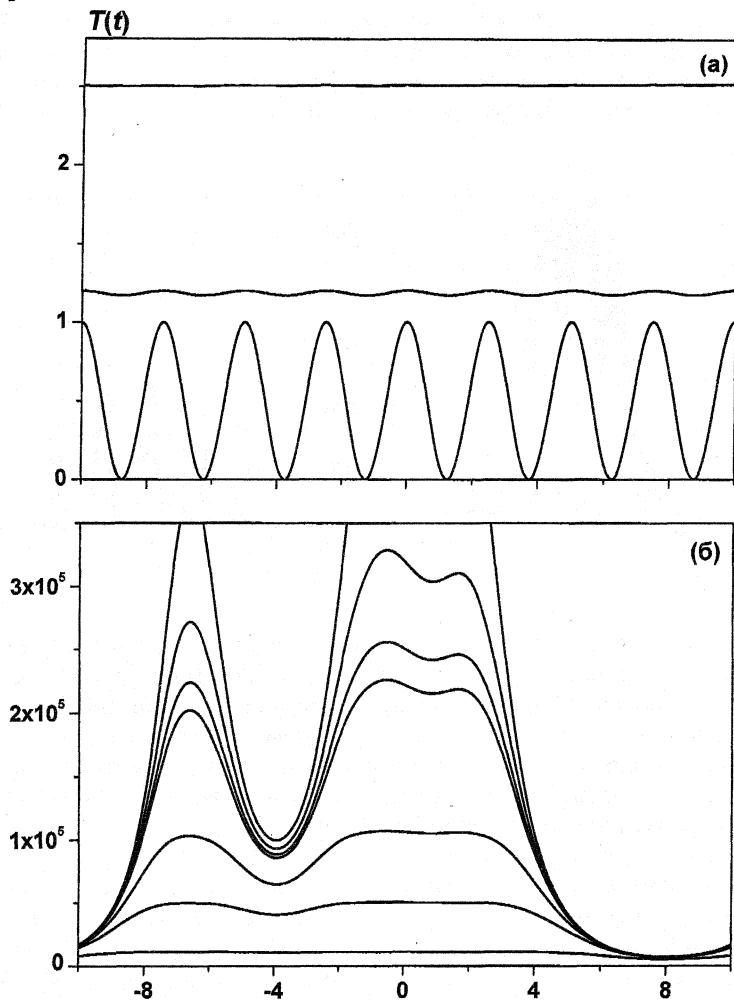


Рис. 11

Заключение

В работе проведено исследование динамики решений одномерного нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла (1) в области значений параметров $\beta > \sigma + 1$, при которых автомодельные

решения уравнения развиваются в LS -режиме с обострением. В этом случае имеет место явление локализации тепла, и процесс горения на развитой стадии идет в виде простых или сложных пространственных структур с сокращающейся полушириной.

Изучена динамика различных начальных распределений и особенности выхода их на автомодельный режим, а также зависимость размера области локализации решения от формы начального финитного возмущения. Различные сценарии эволюции начальных возмущений наглядно отражены на фазовой плоскости $(\varphi(t), g(t))$, где $\varphi(t)$ – это полуширина решения, а $g(t)$ – его амплитуда.

Показана возможность циклического развития решений на фоне общего роста в режиме с обострением за счет скачкообразного изменения коэффициентов уравнения χ_0, q_0 .

Исследован случай, когда размер отрезка наблюдения много меньше характерного размера области локализации тепла для рассматриваемых начальных распределений. Показано, что и в этом случае все начальные возмущения выходят на автомодельный закон развития, однако сценарий выхода имеет свои особенности.

Приведены примеры формирования сложных пространственных структур, развивающихся в режиме с обострением, в том числе на отрезке малой длины.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заключинский Л. А. и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики // Док. АН СССР, 1967, Т.173, №4, 808-811.
2. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
3. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А.Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука. 1996. С. 95-164.
4. Лобанов А.И., Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови – // В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002 г., с. 346-367.
5. Кириченко Н.А. Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии // В книге Режимы с обострением. Эволюция идеи. – М.: Наука. 1998. с. 217-230.

6. С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
7. В.А. Белавин, С.П. Капица, С.П. Курдюмов Математическая модель демографических процессов с учетом пространственного распределения //Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 1998. Т.38. №6.– С.885-902.
8. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики //СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
9. Режимы с обострением: эволюция идеи / Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.
10. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.
11. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. //J. Discrete and continuous dynamical systems, 2002, V. 8, № 2, pp. 399-433.
12. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Жур. вычислит. Матем. и матем. Физ. 1983, т. 23, № 2, с. 380-390.
13. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации //Современные проблемы мат. физики и выч. математики. М. Наука 1982, 217–243.
14. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Док. АН СССР, 1976, Т.227, №2.
15. Галактионов В. А. Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^\alpha u_x)_x + u^\beta$ //Дифференц. ур-ния, 1985, т. 21, № 1, с. 15-23.
16. Куркина Е.С., Курдюмов С.П. Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением //Доклады АН, Т. 395, № 6, с.1–6, 2004 г.
17. Курдюмов С.П., Куркина Е.С. «Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником» // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.
18. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1983.