

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ¹

Введение

Данная работа посвящена исследованию неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности со степенными нелинейностями

$$u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta. \quad (1)$$

Здесь $u = u(\bar{x}, t)$, где \bar{x} - пространственная переменная, t - время; $\sigma > 0$, $\beta > \sigma + 1$. Рассматривается двумерный случай ($\bar{x} \in R^2$).

Неограниченным, то есть *растущим в режиме с обострением*, называется решение, которое существует конечное время и в момент времени $t_f < \infty$, называемом моментом обострения, обращается в бесконечность на некотором множестве точек пространства [1], [2].

Интерес к этому уравнению возник в 70-х годах прошлого века в связи с изучением процессов распространения тепла при термоядерном горении плазмы. Тогда было открыто, что среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла процесс горения может идти в виде локализованных структур – локализованных в пространстве областей интенсивного горения [3]. Обнаруженное явление локализации тепла открывало новые подходы к решению проблемы управляемого термоядерного синтеза [4].

Впоследствии режимы с обострением нашли много новых интересных приложений [5], [6]. Одним из самых важных применений уравнения (1) является теоретическая демография. Показано, что оно при определенных соотношениях между параметрами описывает глобальную эволюцию человеческого общества [7], [8].

Уравнение (1) изучалось многими зарубежными и отечественными учеными, в том числе А.А.Самарским, С.П.Курдюмовым и их учениками (см. [1], [2]). В этих работах были поставлены и во многом решены проблемы математического и физического характера, касающиеся определения условий существования различных типов режимов с обострением, возникновения явления локализации (строгой и

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 08-01-00781

эффективной), нахождения и исследования автомодельных (или инвариантно-групповых) решений и условий их реализации и др.

Было показано, что среди всех решений, отвечающих произвольным начальным данным, особую роль играют автомодельные решения. Они являются аттракторами для других неограниченных решений, то есть другие решения в некоторой норме стремятся к автомодельным решениям, или как говорят, *выходят на автомодельный режим*. Было показано также, что автомодельные решения описывают все типы структур, которые могут возникать и развиваться в рассматриваемой нелинейной среде.

Автомодельная задача в многомерном случае представляет собой краевую задачу для нелинейного уравнения эллиптического типа. Показано, что в зависимости от значений параметров β и σ автомодельная задача может иметь неединственное решение. Автомодельные решения получили название собственных функций (СФ) нелинейной среды [9]. СФ отличаются друг от друга архитектурой, сложностью, количеством локальных максимумов, структурой их расположения, порядком симметрии, размером и др. Методы построения СФ, их свойства и зависимость от значений параметров изучались в работах [10]- [15].

Настоящая статья посвящена исследованию устойчивости двумерных автомодельных решений и изучению выхода на автомодельный режим произвольных финитных начальных распределений температуры на плоскости. Известно, что решения, растущие в режиме с обострением, не обладают устойчивостью по Ляпунову, но они могут обладать структурной устойчивостью [16]. Подробные исследования проводились в одномерном и радиально-симметричном случае [16]-[18]. Было показано, что структурно устойчивым автомодельным решением, является решение, отвечающее первой СФ – простой структуре с одним максимумом в центре симметрии. Другим структурно устойчивым автомодельным решением, правда с существенно меньшей областью притяжения, в одномерном случае является радиально-симметричная структура, имеющая вид цилиндрического слоя, в центре которого имеется «дырка», область с нулевой температурой [18]. Все остальные автомодельные решения (сложные СФ) не обладают структурной устойчивостью, но при резонансном возбуждении (когда начальное распределение соответствует профилю СФ) они могут развиваться в соответствии с автомодельным законом очень долго, почти до момента обострения, сохраняя свою структуру. Они были названы метастабильно устойчивыми решениями [9],[16], [19].

В работах [20],[21] в одномерных расчетах было показано, что сложные структуры могут развиваться не только из резонансных возмущений, они могут формироваться из достаточно произвольных неоднородных начальных распределений температуры. Кроме того, при определенных возмущениях они могут восстанавливать свою структуру.

Для приложений важным являются вопросы устойчивости двумерных автомодельных решений. Изучение эволюции некоторых начальных распределений температуры на плоскости проводилось в 80-х годах прошлого века в работах [22],[23]. Было показано, что локализация тепла и возникновение нестационарных структур имеет место и в многомерном случае. Однако тогда еще не были построены двумерные автомодельные решения, и исследование их устойчивости по отношению к различным возмущениям не могло быть проведено. Этому посвящена настоящая работа. В частности здесь проводится изучение влияния небольших возмущений, вносимых в структуру в центре и на периферии, влияния преобразования сжатия и растяжения, и некоторых других возмущений.

Сложные СФ можно рассматривать, как правильное объединение простых структур, при котором все части сложной структуры развиваются синхронно, то есть имеют один и тот же момент обострения. Это предположение было выдвинуто С.П. Курдюмовым [9] и названо *принципом объединения простых структур в сложные*, или принципом нелинейного синтеза. В настоящей работе впервые этот принцип получил подтверждение в вычислительном эксперименте. Показано, что две простые структуры, вначале несвязанные между собой, объединяются в одну сложную структуру с двумя вершинами. Сложная структура существует достаточно длительное время, следуя автомодельному закону развития. Но перед моментом обострения скорость роста в точках локальных максимумов становится больше, чем в центре симметрии, единство структуры нарушается, и она распадается.

В настоящей работе также исследуется динамика финитных возмущений на плоскости, имеющих один максимум. Изучаются разные стадии развития процесса: стадия растекания тепла, при которой носитель увеличивается, и стадия взрывного роста и локализации решения. Исследуется длительность этих стадий в зависимости от формы и амплитуды начального возмущения.

Рассматриваются также различные финитные возмущения, имеющие носитель, который отличается от круга (эллипс и др.). Исследуются особенности их выхода на автомодельный режим, описываемый первой радиально-симметричной СФ. Показано, в частности, что выход на автомодельный режим происходит лишь в

некоторой окрестности точки максимума, в то время как вся область локализации решения за время обострения не успевает симметризоваться.

1. Постановка задачи

Рассматривается процесс горения тепла в среде с нелинейным коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла. Считается, что распределение температуры $u = u(\bar{x}, t)$ на плоскости ($\bar{x} \in R^2$) удовлетворяет нелинейному уравнению теплопроводности (1). Исследуется случай, когда параметры связаны соотношением:

$$\beta > \sigma + 1, \sigma > 0. \quad (2)$$

Процесс горения инициируется заданием начального распределения температуры $u_0(\bar{x})$ на всей плоскости или в некоторой ограниченной области $\bar{D} = D + \Gamma$ с гладкой границей Γ .

$$u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}) \geq 0, \quad u_0(\bar{x}) \in C(R^2), \quad \sup_{\bar{x} \in R^2} u_0(\bar{x}) \leq M. \quad (3)$$

Начавшееся горение распространяется в холодную среду. На фронте распределения температуры, линии $l(t)$, граничные условия имеют вид:

$$u(\bar{x}, t) = 0, \quad u^\sigma \text{grad} u = 0. \quad (4)$$

Фронт может находиться на бесконечности, в этом случае краевые условия принимают вид:

$$u \rightarrow 0, \quad u^\sigma \text{grad} u \rightarrow 0. \quad (5)$$

Исследования проводятся в декартовой и полярной системах координат.

В декартовой системе координат, где $\bar{x} = (x, y)$, уравнение имеет вид:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + (u^\sigma u_y)_y + u^\beta. \quad (6)$$

В полярной системе координат изменение функции $u(r, \varphi, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$u_t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^\sigma u_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u^\sigma u_\varphi) + u^\beta, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (7)$$

и выполняются дополнительные условия:

$$u|_{r=0} < \infty, \quad r u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi). \quad (8)$$

Цель настоящей работы состоит в исследовании решений начально-краевой задачи (6) (или (7),(8)), (3), (5). Задача решается численно. Рассматривается два случая. В первом случае в качестве начальных распределений температуры берутся некоторые автомодельные решения (описаны ниже), существующие на всей плоскости, и рассматривается их

развитие со временем. Исследуется устойчивость этих решений по отношению к различным возмущениям.

Во втором случае в качестве начальных функций $u_0(\bar{x})$ выступают финитные возмущения с одним максимумом. Исследуются особенности динамики их развития в режиме с обострением в двумерном случае. Обращается внимание на наличие и длительность нескольких стадий развития, на форму и размер области локализации, на то, как происходит выход их на автомодельный режим и др.

2. Автомодельные решения

Автомодельные решения поставленной задачи, о которых говорилось выше, имеют вид

$$u(r, \varphi, t) = g(t)\Theta(\xi, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (9)$$

где (r, φ) – координаты точки на плоскости в полярной системе координат, ξ – автомодельная переменная.

Функции $g(t)$ и $\psi(t)$ можно определить, подставляя выражение (9) в уравнение (1):

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta-1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta-1)}. \quad (10)$$

Автомодельное уравнение относительно функции $\Theta(\xi, \varphi)$ имеет вид:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 (\sigma+1)} \frac{\partial^2 \Theta^{\sigma+1}}{\partial \varphi^2} = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \Theta^\beta, \quad (11)$$

где τ – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (9). Исследовались ограниченные решения уравнения (11), которые удовлетворяют условиям на бесконечности, соответствующим (5), условиям в центре симметрии и условиям периодичности, аналогичным (8):

$$\Theta^\sigma \text{grad} \Theta \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (12)$$

$$\Theta \Big|_{\xi=0} < \infty, \quad \Theta^\sigma \text{grad} \Theta \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \Theta(\xi, \varphi) = \Theta(\xi, \varphi + 2\pi). \quad (13)$$

Автомодельная задача (11), (12), (13), представляет собой краевую задачу на собственные значения (СЗ) τ и собственные функции (СФ) $\Theta(\xi, \varphi)$ для нелинейного уравнения эллиптического типа (11). Если собственные значения τ и собственные функции $\Theta(\xi, \varphi)$ автомодельной задачи найдены, то распределение температуры в каждый момент времени задается формулами (9), (10). Отметим некоторые свойства автомодельных решений, которые следуют непосредственно из анализа

функций $g(t)$, $\psi(t)$ и уравнения (11) [10]–[13]. Так как $\beta > 1$ ($m < 0$), при положительном СЗ $\tau > 0$ они существуют конечное время $t = \tau$ (то есть не существуют в целом) и развиваются в режиме с обострением: $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \tau$. Физический смысл СЗ $\tau > 0$ – *время обострения*. При отрицательном СЗ $\tau < 0$ автомодельные решения существуют для любого $t > 0$ и описывают затухающий режим. Мы будем рассматривать режимы с обострением, то есть случай $\tau > 0$. При выбранных значениях параметров β и σ (2), как следует из формул (9) (10), амплитуда автомодельного решения растет в режиме с обострением ($g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \tau$), а все точки решения движутся к центру симметрии ($r(t) = \xi\psi(t)$, и $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \tau$), так что область интенсивного роста сокращается со временем; и в момент обострения функция $u(\bar{x}, t)$ обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии. Таким образом, автомодельные решения описывают сходящиеся к центру волны горения, или нестационарные диссипативные структуры. Это так называемый *LS* – режим с обострением, который рассматривается в настоящей работе.

В результате исследований автомодельной задачи, проводимых в течение 30 лет, были разработаны методы поиска двумерных СФ и построено большое количество различных структур. СФ отличаются друг от друга архитектурой, сложностью, порядком симметрии, принципом расположения локальных максимумов и т.д.. На рис. 1 изображены некоторые типы структур на плоскости. Число СФ зависит от параметров β и σ . Для данных значений β и σ существует определенный дискретный набор СФ, или как говорят – спектр СФ, по аналогии с задачей на СЗ и СФ для линейного эллиптического оператора. Чем ближе β к $\sigma + 1$, тем больше разнообразных структур имеется в спектре. При $\beta > 2\sigma + 1$ существует единственная СФ автомодельной задачи – простая структура с одним максимумом в центре (см. рис. 1). Известна оценка числа одномерных и радиально-симметричных СФ [24]. Вопрос о числе двумерных структур для данных значений параметров β и σ и вопрос о количестве различных типов структур остается на сегодняшний день открытым. В работе [14] предложен принцип классификации СФ и начата классификация известных двумерных структур.

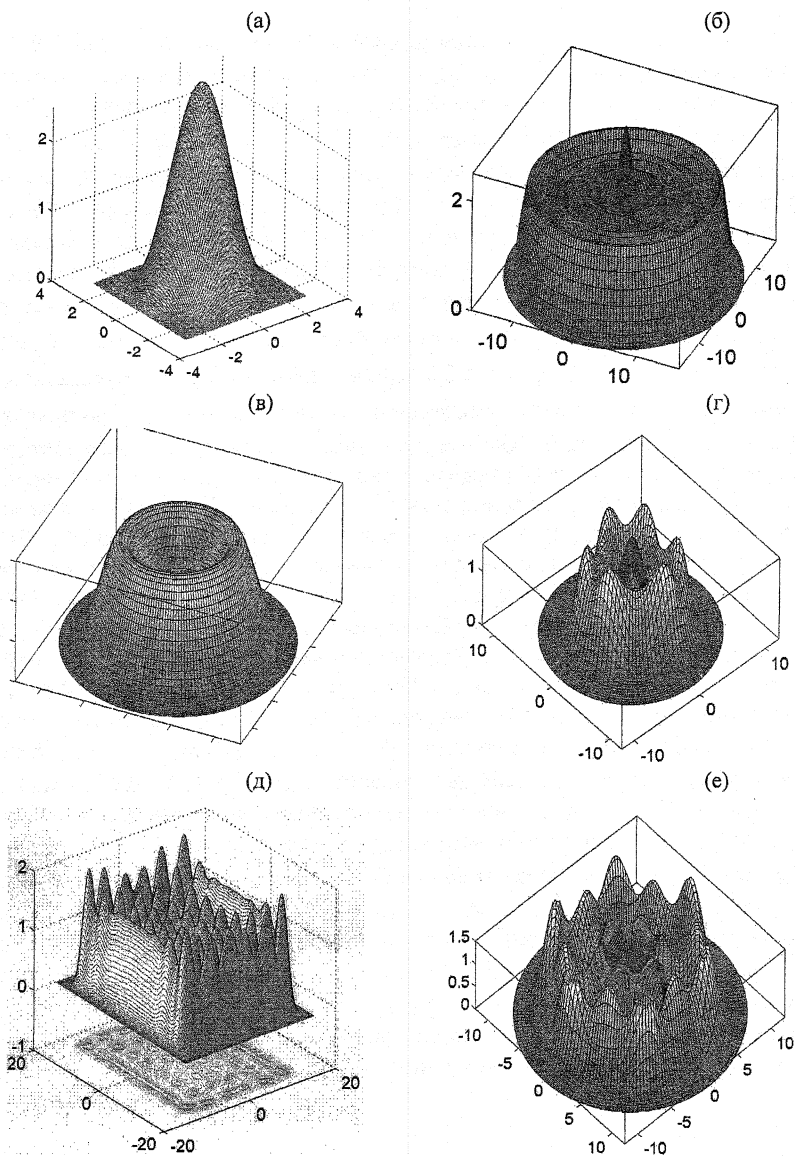


Рис.1 Двумерные СФ $\Theta(x, y)$: (а) простая структура; (б) радиально-симметричная структура; (в) структура с дыркой в центре; (г) сложная структура, порядок симметрии 3; (д) сложная структура, имеющая строение типа «авеню – стрит»; (е) сложная структура с дыркой в центре, порядок симметрии 6.

3. Устойчивость неограниченных решений. Основные определения

Известно, что автомодельные решения (9), (10) неустойчивы по отношению к малым возмущениям. Малые изменения начального профиля приводят к малому изменению времени обострения τ , что в свою очередь приводит к сколь угодно большому различию между решениями, начиная с некоторого момента времени, близкого к τ . Однако эти решения могут обладать *структурной устойчивостью* в смысле выхода на автомодельный режим.

Дадим несколько определений.

Определение 1. Полушириной $r_h(t)$ профиля решения $u(r, \varphi, t)$ в момент времени t называется расстояние от начала координат до линии на плоскости $\zeta(t)$, в точках которой решение принимает значение, равное половине максимума данного профиля. Другими словами, $r_h = \max_{\bar{x} \in \zeta} \rho(O, \bar{x})$, где $\bar{x} = (r, \varphi)$, $O = (0, 0)$, $\zeta(t) = \left\{ \bar{x} : u(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} \max_{\bar{x}} u(\bar{x}, t) \right\}$.

В *LS*-режиме с обострением полуширина автомодельного решения уменьшается с течением времени.

Определение 2. Пусть $u(r, \varphi, t)$ – решение уравнения (7). Преобразование решения (нормировка) по формуле

$$\bar{\theta}(\xi, \varphi, t) = \frac{1}{g(t)} u(\psi(t)r, \varphi, t), \quad (14)$$

где функции $g(t)$ и $\psi(t)$ определены формулами (10), называется *автомодельной обработкой* $u(r, \varphi, t)$. Сама функция $\bar{\theta}(\xi, \varphi, t)$ называется *автомодельным представлением* $u(r, \varphi, t)$.

Все собственные функции, а также гомотермическое решение (пространственно-однородное решение уравнения (1): $u(\bar{x}, t) = u^0 g(t)$) являются стационарами преобразования (14). Нормированное автомодельное решение будем обозначать через $\bar{\theta}_a(\xi, \varphi)$.

Определение 3. Автомодельное решение $u_a(r, \varphi, t)$ называется *структурно устойчивым*, если существует достаточно широкий класс решений с начальными данными $u_0(r, \varphi) \neq u_a(r, \varphi, 0)$, автомодельные представления которых стремятся в некоторой норме к $\bar{\theta}_a(\xi, \varphi)$, когда $t \rightarrow \tau$.

$$\|\bar{\theta}(\xi, \varphi, t) - \bar{\theta}_a(\xi, \varphi)\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \tau.$$

Определение 4. Автомодельное решение $u_a(r, \varphi, t)$ называется *метастойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует класс начальных данных $u(r, \varphi, 0) \approx u_a(r, \varphi, 0)$ и время τ_ε ($\tau - \tau_\varepsilon \ll \tau$), такие что для автомодельных представлений соответствующих решений выполнено

$$\|\bar{\theta}(\xi, \varphi, t) - \bar{\theta}_a(\xi, \varphi)\| < \varepsilon \text{ для } 0 \leq t \leq \tau_\varepsilon.$$

Понятие автомодельной обработки одномерных решений и структурной устойчивости были впервые введены в [16]. Определение метастабильной устойчивости дано в [19].

При исследовании структурной устойчивости автомодельного решения в качестве начального распределения температуры бралась либо сама СФ $\Theta(\xi, \varphi)$ – *резонансное возбуждение*, либо некоторая близкая функция к $\Theta(\xi, \varphi)$, либо произвольная функция $u(r, \varphi, 0)$. Однако нахождение нормированного решения по формуле (14) невозможно, поскольку для нерезонансного возбуждения неизвестен момент обострения τ , который входит в функции $g(t)$ и $\varphi(t)$. Поэтому в численных расчетах в каждый выбранный момент времени t значение функции $u(r, \varphi, t)$ в каждой точке сетки делится на максимум распределения температуры u_{\max} , а значение r – на координату полуширины $r_h(t)$ (или координату другой удобной выделенной точки). Полученное таким образом нормированное решение в случае устойчивости или стремится к стационарному распределению, или остается стационаром (для резонансных возбуждений).

В численных расчетах всегда вносятся возмущения в решение из-за погрешности аппроксимации и ошибок дискретизации. При расчете решения, развивающегося в *LS*-режиме с обострением, происходит сильное сокращение пространственно-временных масштабов по мере приближения к моменту обострения. Приходится существенно уменьшать шаг по времени, а в случае сильного сжатия решения, требуется адаптивная сетка и по пространству. Расчеты рано или поздно приходится прекращать, поскольку ошибки, вносимые дискретизацией, становятся очень большими, и теряется аппроксимация. В одномерном и радиально-симметричном случае многие расчеты доводились до роста температуры на 5 порядков, что составляло 99,99999 времени обострения. Было показано, что структурно устойчивым решением является автомодельное решение, отвечающее первой СФ с одним максимумом. Другим структурно-устойчивым автомодельным решением, правда, с существенно меньшей областью притяжения, является структура с дыркой (см. рис. 1в) [18]. Все остальные СФ являются метастабильно-устойчивыми автомодельными решениями. Время их существования зависит от параметров уравнения, сложности структуры, точности

численного метода. Показано, что при резонансном возбуждении достаточно простые структуры, содержащие до 5 максимумов, могут расти в соответствии с автомодельным законом, сохраняя свою структуру на 5 порядков. Кроме того, показано, что они могут восстанавливать свою структуру при определенных возмущениях профиля распределения и формироваться из достаточно произвольных немонотонных распределений температуры [21]. То есть класс начальных данных в определении 4 не ограничивается резонансными возбуждениями, а является достаточно широким.

В настоящей работе проводится исследование устойчивости некоторых автомодельных решений на плоскости. Используется разностный метод. В некоторой области пространства, согласованной с рассматриваемым решением, строится равномерная сетка в декартовой или полярной системах координат. Нелинейное уравнение теплопроводности и граничные условия аппроксимируются со вторым порядком [25]; для решения полученных нелинейных сеточных уравнений используется метод простой итерации. Адаптивная подвижная сетка по пространству не применялась, шаг по времени уменьшался в соответствии с увеличением скорости роста решения. Обычно расчеты прекращались при росте температуры на 2-3 порядка. Проводилась автомодельная обработка не всей структуры, а нескольких ее главных сечений.

4. Исследования устойчивости автомодельных решений

Как и ожидалось, структурной устойчивостью обладает первая СФ Θ_1 – простая радиально-симметричная структура с максимумом в центре (см. рис. 1а). Даже на достаточно грубых сетках (140 точек по радиусу, 60 по углу) нормированное решение не изменяется при росте температуры в максимуме на 4 порядка (рис. 2). Сечения автомодельной обработки профилей решения практически сливаются, что говорит о том, что решение следует автомодельному закону в течение всего времени расчета (Рис. 3). Структурная устойчивость первой СФ использовалась для обработки качества вычислительного алгоритма, выбора шагов по времени и пространству.

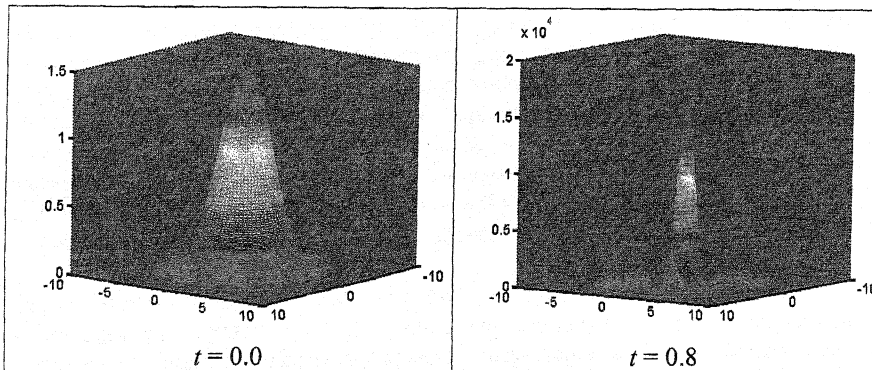


рис. 2 Эволюция Θ_1 . $\sigma = 1.0$, $\beta = 2.25$

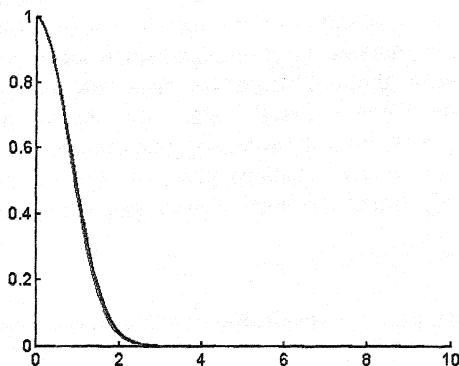


Рис. 3 Автомодельная обработка профилей сечений Θ_1 .

Изучим теперь структурную устойчивость автомодельного решения, описываемого радиально-симметричной структурой с дыркой $\Theta_2(\xi)$ (см. рис. 1в). Как было сказано выше, это решение оказалось структурно устойчивым автомодельным решением уравнения:

$$u_t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^\sigma u_r) + u^\beta.$$

Рассмотрим теперь устойчивость данного решения на плоскости, как радиально-симметричного решения уравнения (7). Расчеты показали, что на сетке 120×70 функция Θ_2 сохраняет свою структуру при росте максимума до 10000 (Рис. 4); нормированные профили расходятся незначительно (рис. 5) из-за ошибок дискретизации. Этот расчет позволяет нам сделать вывод о структурной устойчивости рассматриваемого автомодельного решения.

Исследуем теперь влияние различных возмущений на устойчивость СФ Θ_2 . Расчеты показали, что если «возмутить» начальный автомодельный профиль на периферии структуры, где она близка к нулю, то возмущенный участок со временем разглаживается, наблюдается сходимость нормированных профилей к автомодельному решению. Противоположный результат получается, если «возмутить» СФ Θ_2 в районе ее максимума. Расчеты показали, что внесение локального небольшого возмущения в области максимума приводит к перекоосу структуры, который начинается сразу и со временем усиливается (см. рис. б). Таким образом, на плоскости структура Θ_2 с дыркой является структурно устойчивой, но чрезвычайно чувствительна к возмущениям профиля в области максимума функции.

Сложные двумерные СФ, имеющие два и более локальных максимума, которые исследовались в расчетах, оказались, как и ожидалось, метастабильно устойчивыми. Так, структура $\Theta_{1 \times 2}$, имеющая два локальных максимума и порядок симметрии 2

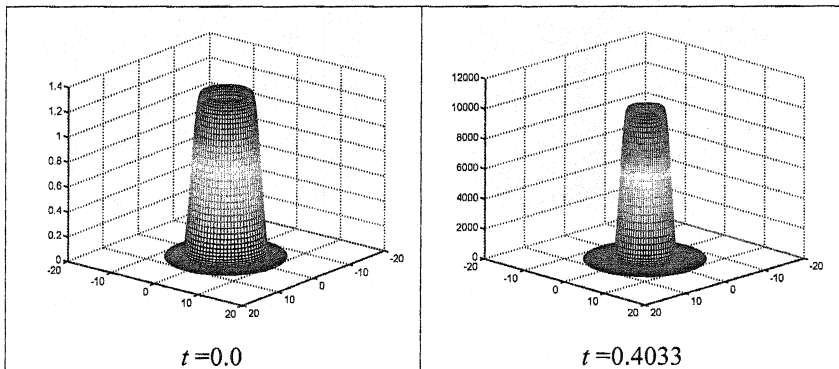


Рис. 4 Эволюция структуры с "дыркой".

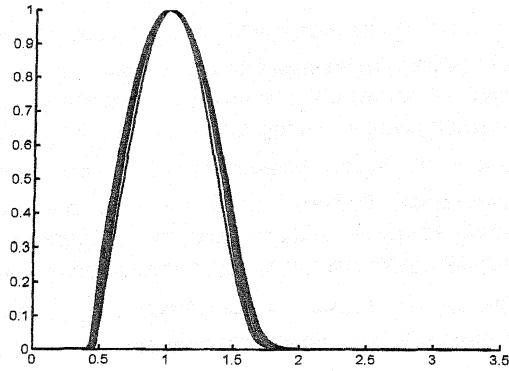


рис. 5 Автомодельная обработка профилей структуры с "дыркой".

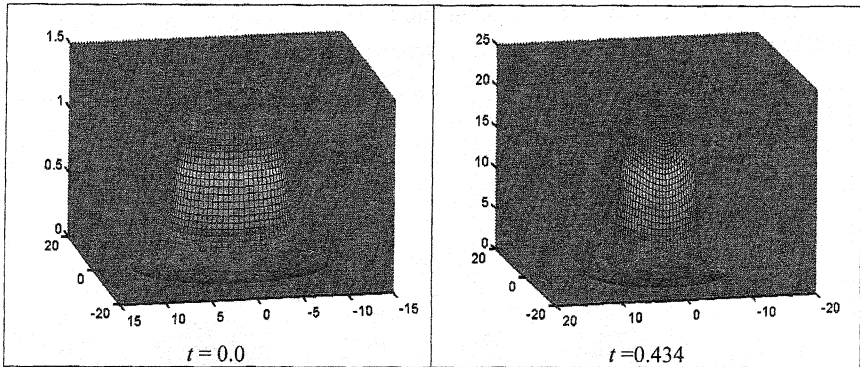


рис. 6 Эволюция возмущенной в области максимума структуры Θ_2 .

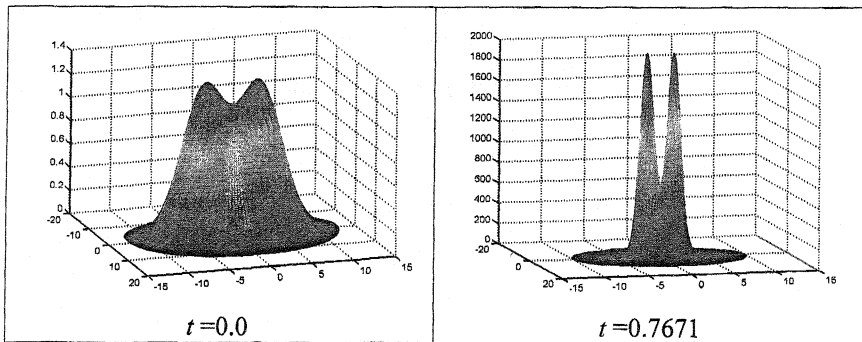


рис. 7 Эволюция структуры $\Theta_{1 \times 2}$

на сетке 150×56 сохраняет свою структуру при росте в 20 раз. Затем скорость роста центра становится меньше скорости роста максимумов, единство структуры нарушается, и она распадается на две простые независимые структуры, имеющие разные моменты обострения. Аналогичные результаты получены для более сложных структур. Наши результаты согласуются с результатами исследования устойчивости некоторых двумерных СФ, проведенных в работе [17] на адаптивных сетках методом конечных элементов.

5. Исследование влияния различных возмущений на автомодельные решения

В данном пункте представлены результаты численного исследования эволюции решений, отвечающих начальным функциям, близким к СФ $\Theta_{1 \times 2}$. Расчеты показали, что если при $t = 0$ ее слабо возмутить, например, немного сжать или растянуть, то время существования структуры сокращается. Время жизни t_s для возмущенной СФ зависит от ее сложности, от параметров среды, от качества вычислительного алгоритма и от степени возмущения. Можно сказать, что чем сильнее возмущение, тем меньше времени сохраняется начальная структура.

На Рис. 8а-в показана эволюция "растянутой" структуры $\Theta_{1 \times 2}$ с двумя максимумами. Вблизи начала координат решение растет гораздо медленнее, чем в точках локальных экстремумов. Сложная структура распадается на две независимые простые структуры.

При сжатии начальной функции локальные максимумы наоборот начинают сближаться и, в конце концов, слипаются, происходит вырождение в простую структуру с одним максимумом (см. Рис. 8 г-е).

Растяжение или сжатие структуры производится путем умножения исходного шага сетки по радиусу h_r на коэффициент k ($k > 1$ соответствует растяжению, $k < 1$ - сжатию). В наших расчетах производилось сжатие с коэффициентом $k = 0.8$ и растяжение с коэффициентом $k = 1.2$.

Расчеты показали, что любая сложная СФ наиболее чувствительна к возмущениям в районе локальных максимумов, время жизни сильно уменьшается даже при незначительных возмущениях. На Рис. 8ж-и показано, как развивается структура $\Theta_{1 \times 2}$, если срезать верхушку одного из локальных максимумов. Мы видим, что рост структуры в окрестности срезанной вершины отстает от роста другой невозмущенной вершины, и разрыв увеличивается со временем.

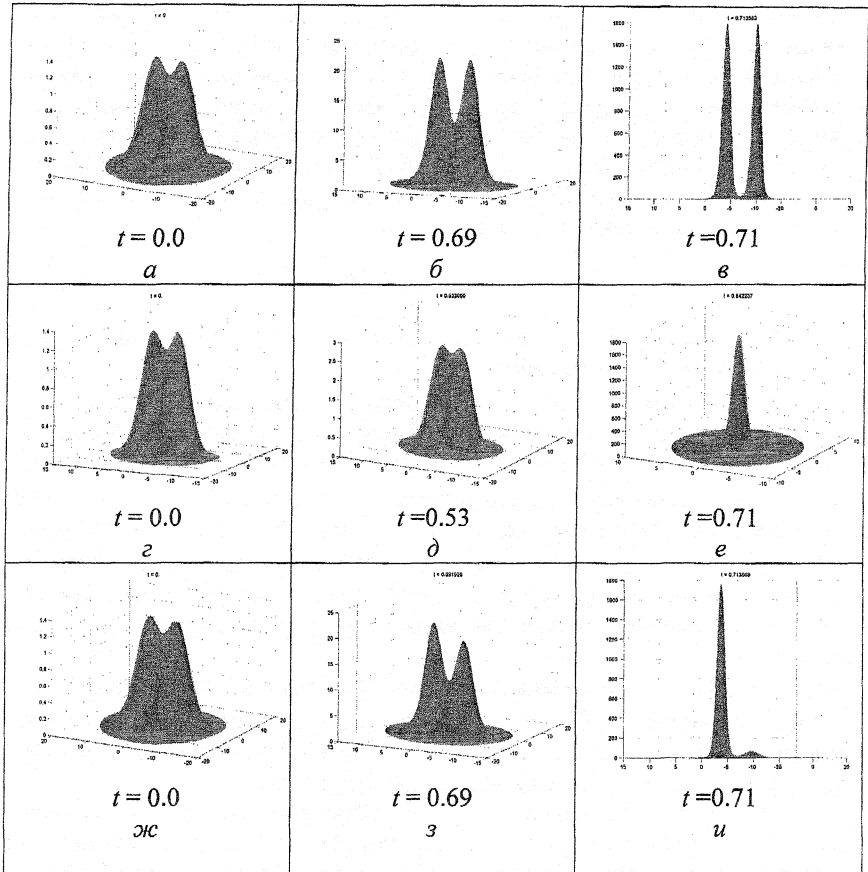


Рис. 8 Эволюция возмущенной структуры $\Theta_{1 \times 2}$.

В результате при приближении к моменту обострения максимум срезанной вершины становится пренебрежимо малым по сравнению с другим максимумом, и горение среды вырождается в развитие структуры с одним максимумом.

6. Динамика финитных возмущений на плоскости

В этом разделе рассматривается эволюция неограниченных решений задачи, отвечающих финитным (т.е. отличным от нуля на ограниченном множестве) начальным функциям с одним максимумом в начале координат. Интуитивно ясно, что такие решения должны выходить на автомодельный режим, отвечающий первой СФ. Доказано [1], что при $\beta > \sigma + 1$ любое неограниченное решение уравнения (1), отвечающее

финитной начальной функции, локализовано. Таким образом, можно говорить о выходе на автомодельный режим лишь в некоторой области, а не на всей плоскости, поскольку автомодельные решения в LS-режиме существуют на всей плоскости.

В этом разделе исследуются различные стадии эволюции и их длительность, зависимость размера области локализации от амплитуды начального распределения температуры и др.

а) Эволюция усеченных СФ

Собственные функции положительны на всей плоскости, на бесконечности они стремятся к нулю. При достаточно больших значениях ξ СФ $\Theta(\xi, \varphi)$ описываются асимптотикой следующего вида [13]:

$$\Theta(\xi, \varphi) \approx C(\varphi) \cdot \xi^{-p}, \quad p = 2/(\beta - \sigma - 1). \quad (15)$$

Таким образом, вне некоторой ограниченной области, содержащей начало координат, они монотонно убывают. Первая СФ $\Theta_1(\xi)$, имеющая единственный максимум в начале координат убывает на всей плоскости, при $\xi > 0$.

Если подставить (15) в выражение для автомодельного решения (9), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры не зависит от времени, он описывает предельное распределение температуры при $t \rightarrow \tau$:

$$T(r, t) \xrightarrow{t \rightarrow \tau} C(\varphi) r^{-p}. \quad (16)$$

Точки структуры близкие к распределению (16) за время обострения почти не растут, бурный рост идет только в центре, где функция (15) достигает огромных значений. Поэтому можно предположить, что возмущение СФ на периферии, где она близка к асимптотике (16), не оказывает на автомодельный закон роста в центральной части структуры. Действительно, выше было показано, что собственные функции устойчивы к небольшим локальным возмущениям, вносимым на периферии СФ. Теперь рассмотрим, как влияет усечение на первую СФ Θ_1 .

В качестве начального распределения возьмем функцию, которая совпадает с первой СФ внутри некоторого круга с центром в начале координат и равна нулю вне этого круга. Было исследовано несколько начальных функций, которые отличались величиной отброшенной части у первой СФ.

Проведенные расчеты показали, что такое отбрасывание приводит на начальной стадии к небольшой перестройке профиля решения вблизи границы круга усечения; центральная часть структуры при этом следует автомодельному закону. Далее наблюдается выход рассматриваемого решения на автомодельный режим в смысле обработки (14).

Отбрасывание даже весьма значительной части первой СФ не влияет на динамику ее развития вблизи момента обострения; всегда в некотором круге, содержащем начало координат, наблюдается выход на автомодельный режим. На рис. 9 показано, как происходит выход на автомодельный режим усеченной первой СФ, у которой была отброшена часть вне круга, где функция меньше 0.2. Выход на автомодельный режим с хорошей точностью наблюдался уже при росте максимума решения примерно в 13 раз.

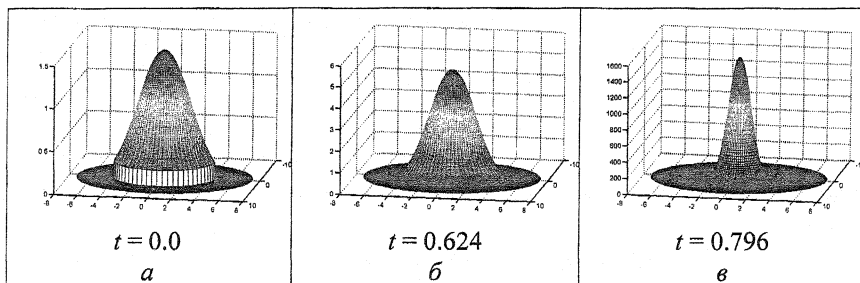


рис. 9 Эволюция усеченной первой СФ.

б) Эволюция радиально-симметричных финитных возмущений

Рассмотрим эволюцию финитного радиально-симметричного начального распределения с одним максимумом в центре на примере функций вида:

$$u_0(r) = \begin{cases} A_0 \cos^2\left(\frac{\pi r}{2r_0}\right), & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (17)$$

Исследования проводились для значений параметров, удовлетворяющих соотношению: $\sigma + 1 < \beta < \sigma + 2$, то есть когда для автомодельных решений вида (9) существует только *LS*-режим с обострением [16]. В численных расчетах было установлено, что если амплитуда начального распределения (17) меньше некоторого критического значения A_* ($A_0 < A_*$), то решение сначала затухает, а его носитель увеличивается, что соответствует процессу растекания тепла. Рост температуры начинается спустя некоторое время, — сначала медленный, затем все быстрее и быстрее. Происходит локализация решения, носитель перестает увеличиваться. Исследования показали, что длительность стадии затухания и размеры области локализации увеличиваются при уменьшении амплитуды A_0 . При небольших значениях A_0 стадия растекания может быть очень долгой. Пример такого

расчета приведен на Рис. 10, на котором показаны сечения профилей радиально симметричного решения.

Если же начальная амплитуда (17) превышает A_* ($A_0 > A_*$), то рост решения начинается сразу. При этом решение тоже немного растекается, затем локализуется. Размеры области локализации, как показали расчеты, также увеличиваются при уменьшении A_0 .

Так для значения $A_0 = 280$ ($r_0 = ?$, $\sigma = ?$, $\beta = ?$) радиус локализации $R_L = 1.995$, а для $A_0 = 10$, $R_L = 3.78$; дальнейшее уменьшение A_0 приводит к незначительному увеличению радиуса R_L : для $A_0 = 0.7$ $R_L = 4.375$.

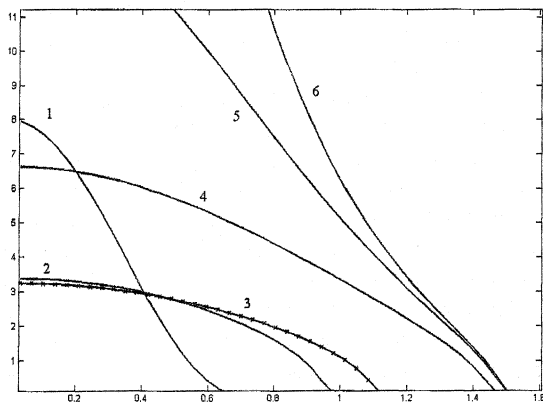


Рис. 10 Профили симметричного финитного решения.

Величина критического значения A_* зависит от параметров σ , β и радиуса начального распределения (17) r_0 . Исследования показали, что при фиксированных параметрах σ , β , чем меньше радиус, тем больше значение A_* , и на оборот. Так, для достаточно узкого возмущения с $r_0 = 0.7$, $A_* = 1500$, а для радиуса $r_0 = 3.5$ критическая амплитуда очень мала: $A_* \approx 0.67$.

Таким образом, можно утверждать, что размер области локализации в LS -режиме зависит не только от параметров среды, но и от формы начального возмущения.

в) Эволюция не радиально-симметричных финитных возмущений

Теперь выясним, как происходит выход на автомодельный режим некоторых несимметричных финитных возмущений, имеющих один

локальный максимум в начале координат. В качестве начальных возмущений будем брать функции вида:

$$u_0(r, \varphi) = \begin{cases} A_0 \cos^2\left(\frac{\pi r}{2l(\varphi)}\right), & r \leq l(\varphi), \\ 0, & r > l(\varphi), \end{cases} \quad (18)$$

где A_0 – амплитуда (которую можно варьировать), а $l(\varphi)$ – замкнутая кривая в полярной системе координат, описывающая границу носителя возмущения $u_0(r, \varphi)$. Условно назовем эти кривые, соответственно, эллипс (рис. 10), "гантеля" (рис.11), "яйцо" (рис.12) и "полумесяц" (рис. 13). Расчеты "гантели" и "полумесяца" проводились при значении параметров $\sigma = 1.9$, $\beta = 3.7$, а эллипса и "яйца" – при $\sigma = 1.0$, $\beta = 2.25$.

Численные исследования показали, что в общем случае вначале происходит растекание решения и перестройка профиля начального распределения. Затем растекание прекращается, решение локализуется в некоторой области и начинается рост внутри области локализации. Вне зависимости от формы начального возмущения, решение постепенно симметризуется вблизи начала координат. Носитель решения не успевает превратиться в круг до прекращения растекания, поскольку область роста в LS -режиме сжимается. Форма и размеры области локализации решения зависят от начального возмущения.

Таким образом, решение становится радиально симметричным только внутри некоторой окрестности начала координат. Другими словами, начиная с некоторого момента времени t_1 : $t_0 < t_1 < t < t_f$ внутри круга радиуса $r_0 > 0$ решение не зависит от угла, а вне этого круга существенно зависит от угла φ .

Расчеты показали, что границы носителей некоторых возмущений в процессе развития претерпели значительные изменения: участки вогнутости у "гантели" (рис.11) и "полумесяца" (рис.13) стали выпуклыми, а область локализации этих решений приблизилась к эллипсоидальной форме. Максимум распределения (18) типа "полумесяц", находившийся в начале координат в момент времени t_0 , оказался сдвинутым от начала координат. У распределения типа "яйцо" (Рис. 13) заметно изменились размеры носителя (из-за растекания решения), а его форма в целом не изменилась до самого момента локализации: так размер носителя вдоль положительной полуоси x остался меньше, чем на остальных полуосях.

У возмущения типа эллипса скорость растекания по оси x оказалась значительно больше, чем по оси y , и соотношение длин осей эллипса изменилось (стало ближе к единице). В целом можно утверждать, что при большом различии размеров полуосей эллипса, стадия растекания и

медленного роста становится весьма длительной, если же полюсы близки, то стадия взрывного роста наступает значительно быстрее.

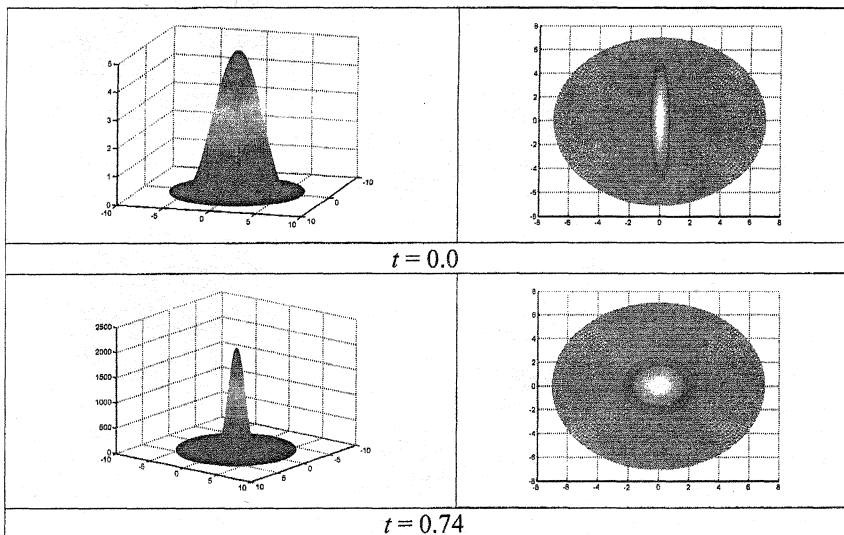


рис. 11

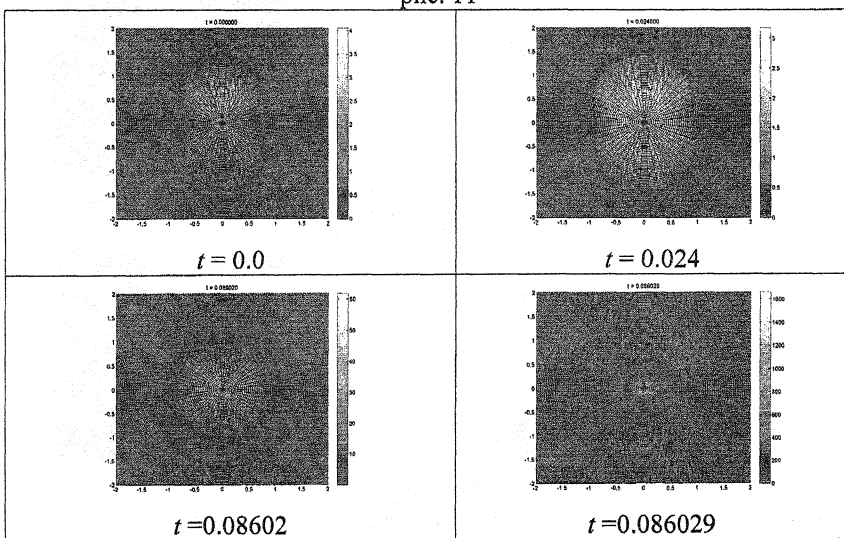


Рис. 12

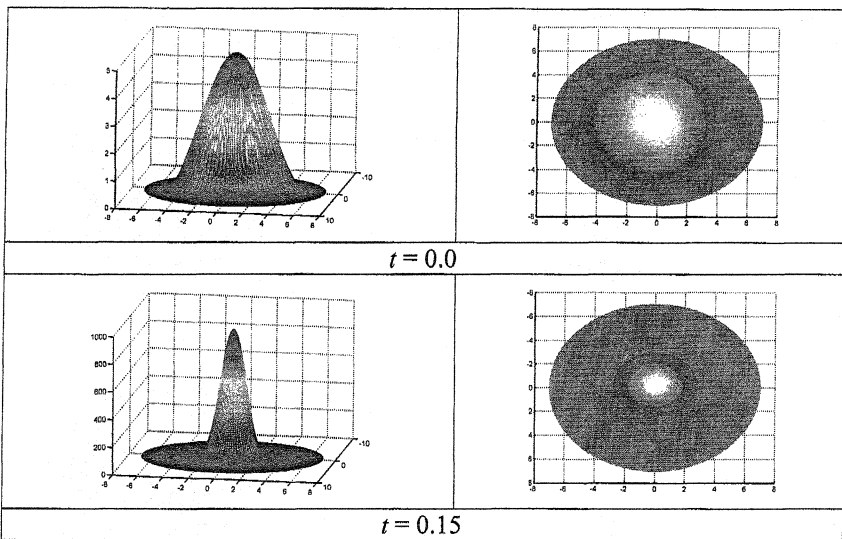


Рис. 13

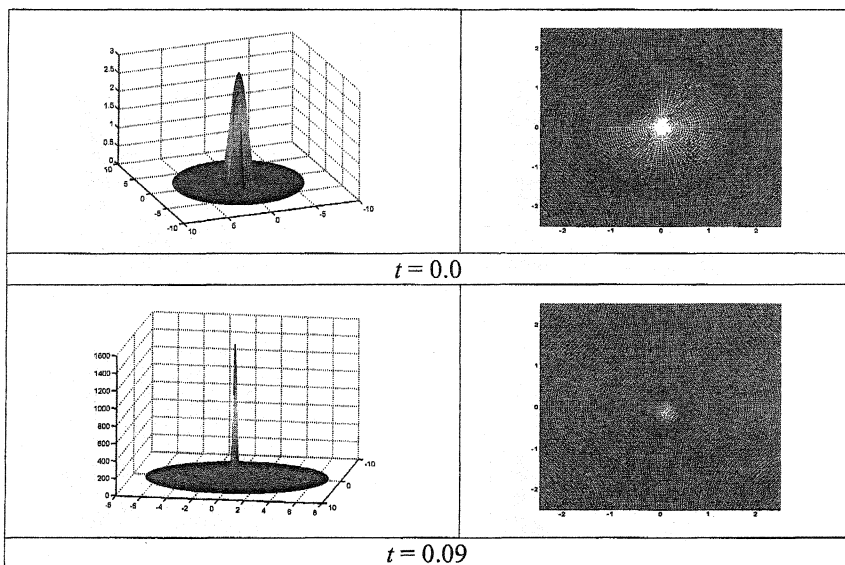


Рис. 14

7. Формирование сложных структур

Сложные собственные функции можно рассматривать как единые системы, объединяющие простые структуры. Сложная структура

возникает при «правильном», сбалансированном перекрытии областей простых структур, тогда все входящие в нее элементы (подсистемы) начинают развиваться синхронно, то есть с одним моментом обострения. Это принцип коэволюции, или принцип нелинейного синтеза, который С.П. Курдюмов выдвинул в 1979 г. [9].

Действительно, в разделе 5 мы видели, что СФ $\Theta_{1 \times 2}$ очень чувствительна к деформациям сжатия или растяжения, изменяющим расстояние между двумя ее вершинами. Изменение этого расстояния приводит к быстрому развалу структуры. Естественно предположить, что взяв в качестве начального распределения два «горба», описываемых функцией (17), можно подобрать расстояние между ними так, чтобы они объединились в структуру $\Theta_{1 \times 2}$. Эту идею удалось реализовать. Было найдено нужное финитное начальное распределение, которое в процессе своего развития образует структуру с двумя максимумами $\Theta_{1 \times 2}$.

Начальная функция имела вид $f_0(r, \varphi) = \max_{i=1,2} \left[A \cos^2 \left(\frac{\pi(r-r_i)}{2r_0} \right) \right]$.

Амплитуда A была равна максимальному значению $\Theta_{1 \times 2}$. Центры горбов r_i находились на таком же расстоянии, что и максимумы функции $\Theta_{1 \times 2}$.

Несколько профилей соответствующего решения, взятых в некоторые моменты времени представлено на Рис. 15. В начальный момент времени это два отдельных горба, между которыми есть еле заметная перемычка. На среднем рисунке высота перемычки значительно поднялась и почти догнала соответствующее значение у СФ $\Theta_{1 \times 2}$. На последнем рисунке представлена сформировавшаяся структура.

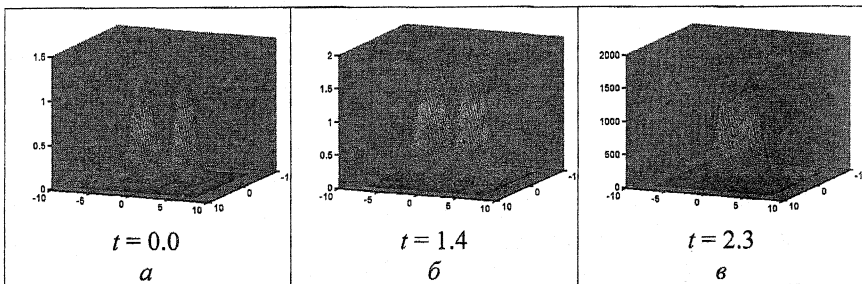


Рис. 15. Формирование сложной структуры
($\sigma = 0.5, \beta = 1.78$)

Эта структура развивалась по автомодельному закону в течение достаточно длительного времени, при росте локальных максимумов примерно со 100 до 2500. Затем накопившиеся ошибки дискретизации привели к дисбалансу структуры, рост температуры в центре стал

отставать от роста температуры в максимумах. В результате структура сошла с автомодельной траектории и постепенно развалилась на две независимые простые структуры.

Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987.
2. Режимы с обострением. Эволюция идеи. М.: Наука, 1998, 255с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заключаминский Л. А. и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высоко-температурного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики //ДАН СССР, 1967, Т.173, № 4, 808-811.
4. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью //Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
5. Лобанов А.И, Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови //В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002 г., с. 346-367.
6. Кириченко Н.А. Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии //В книге Режимы с обострением. Эволюция идеи. – М.: Наука.1998. с. 217-230.
7. Белавин В.А., Катица С.П., Курдюмов С.П. Математическая модель демографических процессов с учетом пространственного распределения //ЖВМ и МФ– 1998. Т.38. №6.– С.885-902.
8. Белавин В.А., Князева Е.Н., Куркина Е.С. Математическое моделирование глобальной динамики мирового сообщества //В. сб. «Нелинейность в современном естествознании» М.- Изд. Наука, 2008, С. 384-408.
9. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. //Препринт ИПМ АН СССР № 29, 1979. //Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М. Наука 1982, 217-243.
10. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А.Б., Самарский А.А.. Архитектура многомерных тепловых структур // ДАН СССР, 1984, Т. 274, № 5, с. 1071-1075
11. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. // ЖВМ и МФ 1986. Т. 26. № 8. С. 1189-1205.

12. *Потапов А.Б.* Построение двумерных собственных функций нелинейной среды // Препринт № 8 М.: ИПМатем. АН СССР, 1986.
13. *Куркина Е.С.* Двумерные и трехмерные тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью// Прикладная математика и информатика № 17, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2004, с.84 - 112.
14. *Куркина Е.С., Никольский И.М.* Бифуркационный анализ спектра двумерных тепловых структур, развивающихся в режиме с обострением //Прик. матем. и информат. М.: Изд-во МГУ, 2005. 22. С. 30-45.
15. *Куркина Е.С.* Многосвязные структуры горения нелинейной среды// Препринт ИПМ РАН, № 26, 2006, 25с.
16. *Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМ и МФ 1983, т. 23, 2, с. 380-390
17. *Димова С.Н., Касчиев М.С., Колева М.Г.* Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов //Матем. моделир. Т. 4, № 3, 1992, с. 74-83.
18. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* Спектр собственных функций авто-модельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. 9. С. 1619-1637.
19. *Димова С.Н.* Численное исследование нестационарных диссипативных структур // Автореферат на соискание степени доктора физико-математических наук, Дубна, 2004. 38 с.
20. *Куркина Е.С.* Спектр двумерных локализованных структур, развивающихся в режиме с обострением. //Динамика сложных систем, 2007, №1, Т.1, С. 17-38.
21. *Куретова Е.Д., Куркина Е.С.* Режимы с обострением в задаче для нелинейного уравнения теплопроводности на отрезке малой длины // Прикладная математика и информатика № 29, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2008.
22. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // ДАН СССР, 1980, Т.251, № 4.
23. *Dimova S.N., Kastchiev M.S., Koleva M.G., Vasileva D.P.* Numerical analysis of radially nonsymmetric blow-up solutions of a nonlinear parabolic problem. // J. Comp. Appl. Math., 97, 1998, 81-97.
24. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* Спектр собственных функций авто-модельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.
25. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., Наука, 1996.