

## **ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ <sup>1</sup>**

### **Введение**

В работе исследуются двумерные и трехмерные автомодельные решения уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником тепла. Автомодельные решения развиваются в режиме с обострением [1]-[3], то есть обращаются в бесконечность в одной точке или некоторой области пространства за конечное время  $t_b$ , называемое временем обострения. Режимы с обострением являются промежуточными асимптотиками реальных процессов и имеют много приложений [4]-[11].

Исследования, проведенные разными авторами за последние 30 лет, выявили много интересных свойств решений нелинейного уравнения теплопроводности (см. обзоры в [1]-[3]). В частности, было показано, что автомодельные решения задают все типы структур и волн, которые могут существовать в данной нелинейной среде. В LS-режиме автомодельные решения описывают нестационарные диссипативные структуры, локализованные в некоторой области пространства. Среди них существуют как простые структуры, с одним максимумом, так и сложные структуры, содержащие много максимумов. Все они описываются спектром собственных функций (СФ) автомодельной задачи с одним момент обострения. В одномерном случае спектр СФ был изучен в [12]-[14], а в радиально-симметричном случае и в среде с распределенной плотностью – в [13]-[18]. В [17] методами бифуркационного анализа определено число СФ автомодельной задачи и подробно исследованы свойства спектра в зависимости от геометрии области и закона распределения плотности.

Среди СФ можно выделить структурно устойчивые решения и метастабильно устойчивые решения [12], [17]. Структурно устойчивые решения являются асимптотиками многих решений с произвольными начальными данными. До недавнего времени считалось, что структурно устойчивыми решениями являются только решения, имеющие один максимум в центре симметрии. В [17] [18] было показано, что радиально-симметричное автомодельное решение с одним максимумом, но имеющее нулевую область в центре (структура в виде сферического или цилиндрического слоя) также является структурно устойчивым решением. Метастабильно устойчивыми решениями являются все остальные СФ автомодельной задачи. Метастабильно устойчивые решения представляют интерес, поскольку речь идет о режимах с обострением, существующих ко-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-06-80254).

нечное время. Метастабильно устойчивые СФ, объединяющие много максимумов в отличие от произвольных распределений температуры существуют почти все время обострения, и могут сохранять свою структуру при росте температуры в десятки и сотни раз. При приближении к моменту обострения они или распадаются на простые структуры, независимо горящие со своим моментом обострения, или вырождаются в одну структуру с одним максимумом [17].

В связи с новыми приложениями нестационарных диссипативных структур в социологии [9], [11] в частности к проблемам коэволюции сложных систем [6], [20],[21] и квантовой механике [15], [20]-[22] представляет интерес исследование спектра многомерных тепловых структур, которые являются решениями автономной задачи для уравнения нелинейной теплопроводности в пространстве. Автомодельная задача представляет собой краевую задачу для нелинейного уравнения эллиптического типа. Впервые такая задача рассматривалась в [23]-[25], [19]. Были построены некоторые типы двумерных структур и изучена их архитектура. В настоящей работе исследуются как двумерные, так и трехмерные СФ. Строится разностная аппроксимация нелинейного уравнения на сетке с учетом граничных условий. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Ньютона. Поскольку данная задача имеет неединственное решение, главной проблемой для реализации метода Ньютона является построение достаточно хороших начальных приближений к собственным функциям. Фактически, эту сложную задачу необходимо сначала исследовать аналитически. В [23]-[25] был разработан метод построения начальных приближений, основанный на линеаризации рассматриваемого уравнения около частного пространственно-однородного решения и сшиванием решения этого линейного уравнения с асимптотикой нелинейной задачи. Этот метод позволил получить хорошие приближения и построить целый ряд двумерных структур. В [26] методом сшивания были получены более сложные линейные приближения, использующие несколько гармоник по углу и построены более сложные двумерные СФ. Первые двумерные СФ были построены более двадцати лет назад, когда еще не было мощных компьютеров. Используемые сетки были настолько грубыми, что не позволяли одну и ту же структуру получить в декартовой и полярной системе координат на разных сетках. Это обстоятельство заставило усомниться в полученных численно результатах и на время оставить исследования сложных многомерных структур.

Расчеты собственных функций, проведенные в настоящей работе позволяют со всей определенностью заявить о существовании многомерных неоднородных по углу тепловых структур. Построены как двумерные, так и трехмерные СФ. Многомерные СФ продолжены по параметру,

и проведен их бифуркационный анализ. Данный подход позволяет определить не только область существования по параметру данной СФ и изучить эволюцию ее формы, но и подойти к вопросу классификации многомерных структур и определении их числа. Для характеристики структуры необходимо знать порядок ее симметрии, количество слоев и количество максимумов в них. Было показано, что некоторые СФ отходят от радиально симметричных решений, а другие непосредственно от пространственно-однородного решения при больших значениях  $\beta$ . При  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  число собственных функций резко возрастает, появляются новые типы структур. Впервые найдены сложные СФ, с нулевой областью в центре или с несколькими нулевыми областями внутри себя. Такие структуры описывают многосвязные области локализации горения в пространстве.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящими от температуры по степенному закону. Распределение температуры  $T(\mathbf{r}, t)$  в пространстве удовлетворяет уравнению нелинейной теплопроводности:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \text{div}(\chi_0 T^\sigma \text{grad} T) + q_0 \rho T^\beta. \quad (1)$$

и граничным условиям на бесконечности:

$$\chi_0 T^\sigma \text{grad} T \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0. \quad (2)$$

$r \rightarrow \infty \qquad r \rightarrow \infty$

Где  $E = c_V T$ ,  $c_V, \chi_0, q_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 1$  – заданные параметры, а  $\rho$  – плотность:  $\rho = A r^{-k}$ ,  $0 \leq k < 2$ . В дальнейшем без ограничения общности константы  $\chi = \chi_0 / A c_V$ ,  $q = q_0 / c_V$  положим равными единице.

Горение инициируется заданием некоторого начального распределения температуры  $T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}) \leq M < \infty$ .

Задача состоит в том, чтобы найти все типы тепловых структур, которые могут возникать в заданной нелинейной среде. С этой целью исследуются автомодельные решения задачи (1) (2) вида:

а) в трехмерном пространстве:

$$T(r, \theta, \varphi, t) = g(t) \Theta(\xi, \theta, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (3)$$

б) на плоскости:

$$T(r, \varphi, t) = g(t) \Theta(\xi, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (4)$$

где  $\xi$  – автомодельная переменная, а функции  $g(t)$  и  $\psi(t)$  находятся из подстановки (3) в уравнение (1) [17]-[18]:

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta-1}, \quad n = \frac{\beta-\sigma-1}{(\beta-1)(-k+2)}, \quad (5)$$

Автомодельное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\xi^v} \frac{\partial}{\partial r} (\xi^v \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}) + \frac{1}{\xi^2(\sigma+1)} \Delta_{\theta, \varphi} (\Theta^{\sigma+1}) = -\frac{m}{\tau} \xi^{-k} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi^{-k+1} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \xi^{-k} \Theta^\beta,$$

$$v=2, \quad \Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (6)$$

$$v=1, \quad \Delta_{\theta, \varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

где  $\tau$  – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (4).

Автомодельные решения развиваются в режиме с обострением при  $\tau > 0$  (так как  $\beta > 1$ ), и  $\tau$  имеет смысл времени обострения.

Исследуется решения уравнения (6), удовлетворяющие следующим граничным условиям, соответствующим (2):

$$\Theta \Big|_{\xi=0} < \infty, \quad \Theta^\sigma \text{grad } \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \quad (7)$$

Задача (6), (7) является задачей на собственные значения (СЗ)  $\tau$  и собственные функции (СФ)  $\Theta(\theta, \xi, \varphi)$ . Нетрудно показать, что если исследуемая задача имеет решение при некотором значении  $\tau = \tau_1 > 0$ , то она имеет решение и при любом другом значении  $\tau = \tau_2 > 0$ , и эти решения

связаны преобразованием подобия:  $\Theta(\xi, \theta, \varphi, \tau_2) = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^m \Theta\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \xi, \tau_1\right)$ .

Это свойство позволяет не рассматривать все значения  $\tau$ , а выбрать одно удобное, например  $\tau = (\beta-1)^{-1}$ , и найти соответствующий ему спектр функций  $\Theta(\xi, \theta, \varphi, \tau)$ . При этом значении  $\tau$  гомотермическое (пространственно-однородное) решение уравнения (6):

$$\Theta_H = ((\beta-1)\tau)^{-1/\beta-1} \quad (8)$$

становится равным  $\Theta_H = 1$ .

Исследования, проведенные ранее (см. например [14], [17], [25]) показали, что в зависимости от параметров  $\beta$  и  $\sigma$  существует три типа автомодельных решений с обострением. При  $\beta \geq \sigma+1$  они описывают локализованные процессы горения. В настоящей работе рассматривается так называемый  $LS$  – режим. Он имеет место при  $\beta > \sigma+1$  и отвечает условиям (7). Автомодельные решения  $LS$  – режиме представляют собой не-

стационарные диссипативные структуры. Все точки такой структуры движутся к центру симметрии ( $n > 0$  см. (5)), полуширина области горения сокращается, и температура при  $t = \tau$  обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии.

Для дальнейших исследований удобно перейти к функции  $U(\xi, \theta, \varphi) = \Theta^{\sigma+1}$ , тогда уравнение (6) перейдет в:

$$\Delta U + (\sigma + 1)\xi^{-k} \left\{ -\frac{\beta - \sigma - 1}{2 - k} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( U^{1/(\sigma+1)} \right) + U^{\beta/(\sigma+1)} - U^{1/(\sigma+1)} \right\} = 0. \quad (9)$$

Из асимптотического анализа следует, что при  $\xi \rightarrow \infty$  СФ  $\Theta(\theta, \xi, \varphi)$  имеют асимптотику:

$$U \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} C(\theta, \varphi) * \xi^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{(-k+2)(\sigma+1)}{\beta - \sigma - 1} > 0, \quad (10)$$

и удовлетворяют уравнению:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} U + \alpha U = 0. \quad (11)$$

Поставленную задачу можно переформулировать следующим образом: Найти функции  $U(\xi, \theta, \varphi)$ , удовлетворяющие в некоторой области  $D$  (которую тоже надо найти) уравнению (9), а на границе области – условию (11).

Решать эту задачу будем итерационным методом Ньютона. Для его реализации необходимо выбрать такую область  $D$ , чтобы на ее границе решение с хорошей точностью описывалось асимптотикой (10), выбрать сетку, написать разностную аппроксимацию уравнения (9) на сетке, построить достаточно хорошее начальное приближение к искомому решению, и наконец полученную систему сеточных нелинейных алгебраических уравнений решить итерационным способом. Наибольшая трудность состоит в построении начального приближения к решению, фактически заранее мы должны представить весь спектр собственных функций.

## 2. Построение начальных приближений

**2.1. Спектр радиально-симметричных СФ.** Радиально-симметричные СФ являются частным случаем рассматриваемой задачи. Они подробно исследовались в работах [14], [17], [18] и др. Было показано, что в  $LS$  – режиме автомодельная задача может иметь несколько СФ  $\Theta_i(\xi)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , в зависимости от значений параметров  $\beta$  и  $\sigma$ . В одномерном случае и постоянной плотности их число определяется формулой [17]:

$$\begin{cases} N = [a], & \text{если } a \text{ – нецелое, } a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \\ N = a - 1, & \text{если } a \text{ – целое} \end{cases} \quad (12)$$

Первая СФ имеет максимум в начале координат и монотонно убывает на интервале  $(0, \infty)$ . Следующие СФ являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. Нечетные СФ в начале координат имеют максимум с  $\Theta_{2j+1}(0) > \Theta_H$ , а четные – минимум с  $0 < \Theta_{2j}(0) < \Theta_H$ . В области своей немонотонности они совершают колебания около гомотермического решения. Из формулы (12) следует, что при  $\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1$  автомоделная задача в LS режиме имеет единственное решение – СФ  $\Theta_1(\xi)$ . Чем больше номер СФ, тем уже интервал по параметру  $\beta$ , в котором она существует. Проведенный анализ показал, что собственная функция  $\Theta_j$  с номером  $j = 2, 3, 4, \dots$  существует в интервале

$$\sigma + 1 < \beta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \frac{j(\sigma + 1) - 1}{J - 1}. \quad (13)$$

При  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  число СФ стремится к бесконечности.

Спектры СФ в сферически-симметричном и цилиндрически-симметричном случаях и распределенной плотности при многих значениях параметров устроены аналогичным образом, и число СФ определяется формулой (12). Однако, при  $\beta$  близких к  $\sigma + 1$  происходят качественные изменения в спектре: 1) появляются, так называемые СФ с «дыркой», имеющие нулевую область в центре; 2) нечетные СФ, начиная с третьей выпадают из спектра. Чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$  тем больше в спектре четных СФ с дыркой, и тем больше нечетных СФ отсутствует в спектре. На рис. 1 представлен вид первых двенадцати цилиндрически-симметричных СФ при  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3.05$ ,  $k = 0$ . Среди имеющихся 40 СФ (см. формулу (12)) две структуры «с дыркой»  $\Theta_2(\xi)$ ,  $\Theta_4(\xi)$  и 38 обычных.

Исследования показали, что СФ в области немонотонности хорошо описываются функцией  $\Theta_j(\xi) \approx \Theta_H(1 + A_j u(\xi))$ , где  $u(\xi)$  – решение линеаризованного около  $\Theta_H$  уравнения ( $u(0) = 1$ ):

$$\frac{1}{\xi^v} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^v \frac{du}{d\xi} \right) - \frac{\beta - \sigma - 1}{-k + 2} \xi^{-k+1} \frac{du}{d\xi} + (\beta - 1) \xi^{-k} u = 0, \quad (14)$$

если правильно подобрать амплитуду  $A_j$ , для каждой СФ свою. На рис. 1 представлен вид СФ и вид решений уравнения (14) (пунктирная линия) с начальными данными:  $u_j(0) = \Theta_j(0)$ ,  $u_j'(0) = 0$ . Мы видим, что действительно уравнение (14) хорошо описывает колебания СФ около гомотермического решения. Вне области немонотонности СФ быстро уменьшаются, и, начиная с некоторого значения:  $\xi > \xi_f(j)$ , хорошо описываются асимптотикой (10) (тонкая линия).

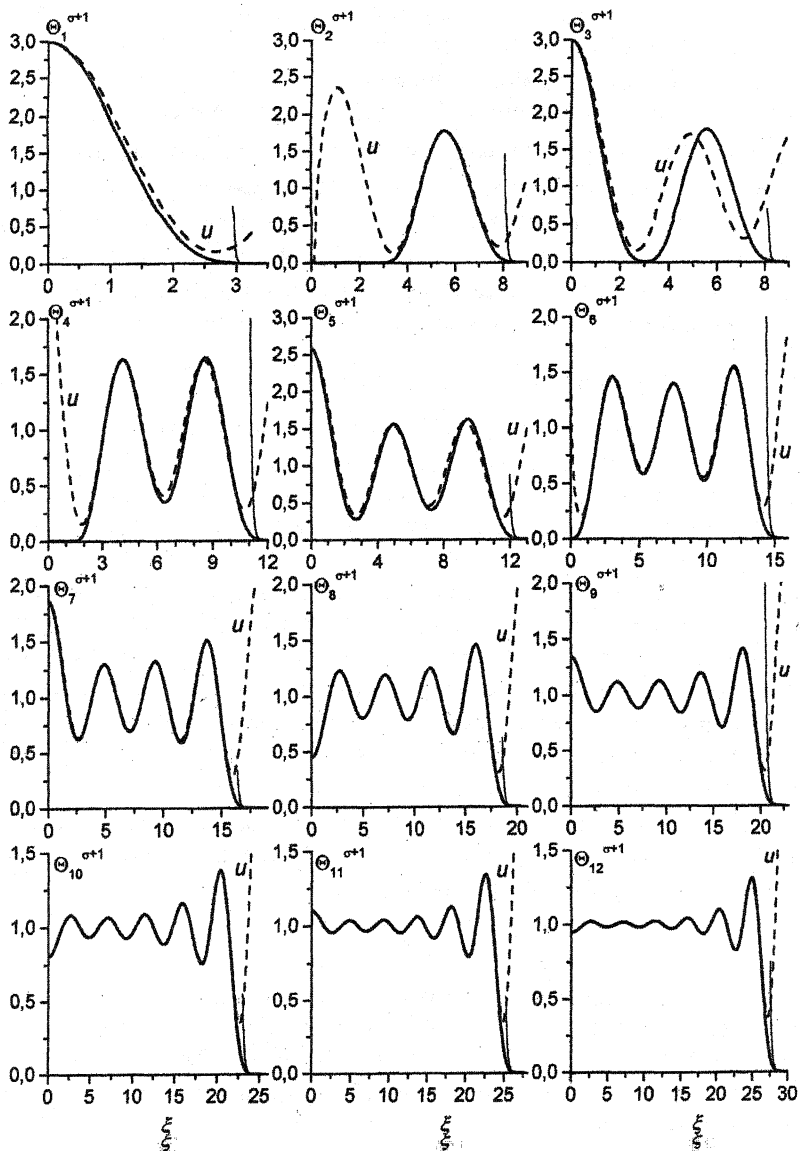


Рис. 1. Спектр цилиндрически-симметричных СФ (первые 12 шт.)

$$\sigma = 2, \beta = 3.05, k = 0$$

Радиально-симметричные СФ удобно строить методом пристрелки [17]. Однако этот метод не может быть перенесен на многомерный случай. Поэтому в [23]-[25] был разработан итерационный метод построения СФ автомодельной задачи, с использованием заранее построенного начального приближения. Начальные приближения строятся методом сшивания решений линеаризованного уравнения (14) с асимптотикой (10). Приближенное решение  $\tilde{U}(\xi)$  к СФ  $\Theta^{\sigma+1}(\xi)$  ищется в виде:

$$\tilde{U}(\xi) = \begin{cases} 1 + C_1 u(\xi), & \xi < \xi_0 \\ C_2 \xi^{-\alpha}, & \xi > \xi_0 \end{cases}.$$

Неизвестные  $C_1$ ,  $C_2$  и точка  $\xi_0$  определяются из условия  $\tilde{U}(\xi) \in C^{(2)}$ , то есть непрерывности при  $\xi = \xi_0$  функций  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{U}'$ ,  $\tilde{U}''$ . Таких приближений можно построить как раз столько, сколько СФ имеет автомодельная задача (12). Отмечу, что структуры с дыркой тогда еще не были найдены, и поэтому приближения строились только для обычных СФ. Исследования показали, что такие линейные приближения являются хорошими начальными приближениями к СФ, и метод Ньютона сходится. Приближение можно значительно улучшить, если взять функцию  $\sqrt{\tilde{U}(\xi)}$ .

## 2.2. Построение линейных приближений к многомерным СФ

Непосредственное перенесение методики сшивания (14) для получения приближений к многомерным СФ невозможно, поскольку точка сшивания  $\xi_0$  в двумерном случае превращается в линию, а в трехмерном – в некоторую поверхность; таким образом, приходится решать задачу со свободной границей, на которой теперь  $C_2$  не константа, а функция. В работах [23]- [25] А. Б. Потаповым был разработан алгоритм получения линейных приближений к двумерным СФ. Перенесем его почти без изменения на трехмерный случай. Сферически-симметричные СФ будем рассматривать как вырожденные решения, однородные по углу, а трехмерные СФ – как снимающие это вырождение. Исследование автомодельного уравнения (9) будем проводить, и в декартовой системе координат, и в сферической. Предположим, что, как и радиально-симметричные многомерные собственные функции в некоторой области, содержащей начало координат, совершают колебания около гомотермического решения и описываются линеаризованным около  $\Theta_H$  уравнением, а вне этой области быстро стремятся к нулю и выходят на асимптотику (10).

**1. Класс собственных функций  $EJLMt$ .** Построение приближений и исследование их архитектуры проведен сначала в сферической системе координат. Линеаризуем уравнение (9), считая, что в некоторой области  $\Theta(\xi, \theta, \varphi) \approx \Theta_H(1 + u(\xi, \theta, \varphi))$ , где функция  $u$  описывается уравнением:



$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}) + \frac{1}{\xi^2} \Delta_{\theta, \varphi} u - \frac{\beta - \sigma - 1}{-k + 2} \xi^{-k+1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (\beta - 1) \xi^{-k} u = 0. \quad (15)$$

Решения уравнения (15) найдем методом разделения переменных.

$$u(\xi, \theta, \varphi) = R(\xi) Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (16)$$

где  $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  – сферическая функция.

Уравнение для радиальной части имеет вид:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \frac{dR}{d\xi}) - \frac{\beta - \sigma - 1}{-k + 2} \xi^{-k+1} \frac{dR}{d\xi} + (\beta - 1) \xi^{-k} R - \frac{l(l+1)}{\xi^2} R = 0. \quad (17)$$

Заменой переменных  $R = z^{\frac{l}{-k+2}} F(z)$ ,  $z = \frac{\beta - \sigma - 1}{(-k+2)^2} \xi^{-k+2}$  оно сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$zu'' + (b - z)u' + a_1 u = 0, \quad b = 1 + \frac{2l+1}{-k+2}, \quad a_1 = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1} - \frac{l}{-k+2} > 0, \quad (18)$$

решением которого является вырожденная гипергеометрическая функция:

$$u(z) = CM(-a_1, b, z), \quad C = \text{const.}$$

Следовательно, радиальная часть имеет вид:

$$R_{n,l}(\xi) = C_1 \xi^l M\left(-\frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1} + \frac{l}{-k+2}, 1 + \frac{2l+1}{-k+2}, \frac{\beta - \sigma - 1}{(-k+2)^2} \xi^{-k+2}\right). \quad (19)$$

$C_1$  – произвольная постоянная. При  $l = 0$  формула (19) дает сферически-симметричное решение. Задавая  $l = 1, 2$ , и т.д. получаем другие невырожденные решения для радиальной части. Число  $l$  не может превысить  $l_{\max}$ , которое находится из условия  $a_1 > 1$ :

$$l_{\max} = [(a - 1)(-k + 2)]. \quad (20)$$

Функция  $R_{n,l}(\xi)$  имеет на полуоси  $0 \leq \xi < \infty$   $N_l$  нулей. Если  $a_l$  целое число, то  $N_l = a_l$ , иначе  $N_l = [a_l] + 1$ . Число СФ на единицу меньше числа нулей  $N_l$  (см. формулу (12)).

Сферическая функция имеет вид:

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^l [A_{l,m} \cos(m\varphi) + B_{l,m} \sin(m\varphi)] P_l^m(\cos \theta), \quad (21)$$

где  $P_l^m(\cos \theta)$  – присоединенная функция Лежандра. Для данного значения  $l$  существует  $2l + 1$  линейно независимых функций  $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ .

Итак, общее решение  $u(\xi, \theta, \varphi)$  линеаризованного уравнения найдено. Теперь построим приближения  $\tilde{U}(\xi, \theta, \varphi)$  к СФ  $U(\xi, \theta, \varphi)$ . Как и в радиально-симметричном случае приближение  $\tilde{U}(\xi, \theta, \varphi)$  будем считать непрерывной функцией  $\in C^2$  и искать в виде:

$$\tilde{U}(\xi, \theta, \varphi) = \begin{cases} 1 + u(\xi, \theta, \varphi), & \xi \in D \\ C(\theta, \varphi)\xi^{-p}, & \xi \notin D \end{cases} \quad (22)$$

Однако задачу сшивания (22) функции  $u(\xi, \theta, \varphi)$  с асимптотикой (10) на границе  $\Gamma$  заранее неизвестной области  $D$  будем решать приближенно. Сначала сделаем некоторые предположения об архитектуре СФ. Будем считать, что СФ обладают некоторой симметрией. Будем рассматривать только те СФ, которые имеют несколько плоскостей симметрии, проходящих через центр. В этом случае можно выделить некоторый сферический сектор – минимальный период в СФ, с углом раствора  $\varphi$  по одному направлению и  $\theta$  – по другому; тогда СФ переходит в себя при повороте на угол  $\frac{2\pi}{m_0}$  по оси  $\varphi$  и – на угол  $\frac{2\pi}{l_0}$  по оси  $\theta$  ( $m_0$  и  $l_0$  – целые числа). Кроме того, предположим, что среди СФ существуют такие, в которых преобладают отдельные моды по углу, так же как существует вырожденная мода – сферически-симметричная СФ, и будем только рассматривать решения линейной задачи вида:

$$u(\xi, \theta, \varphi) = R_{n,l}(\xi)P_{l,m}(\cos \theta) \cos m\varphi. \quad (23)$$

Функцию  $1 + u(\xi, \theta, \varphi)$  (так как  $\Theta_H = 1$ ) будем сшивать с асимптотикой только на некоторых лучах. Для этого функцию  $1 + AR_{n,l}(\xi)$  “сошьем” с асимптотикой  $C\xi^p$  с использованием условий непрерывности функции и ее первых и вторых производных, получим  $n_l = N_l - 1$  функций  $f_j(\xi)$ :

$$f_j(\xi) = \begin{cases} 1 + A_j R_{n,l}(\xi), & \xi < \xi_{0j} \\ C_j \xi^{-p}, & \xi \geq \xi_{0j} \end{cases} \quad (24)$$

Условия (24) позволяют определить  $n_l$  констант  $A_j, C_j$  и точек сшивания  $\xi_{0j}$ . Зная значения констант  $A_j$ , строим функции  $f_{j+1}^*(\xi)$ :

$$f_{j+1}^*(\xi) = \begin{cases} 1 - A_j R_{n,l}(\xi), & \xi < \xi^* \\ C_j^* \xi^{-p}, & \xi \geq \xi^* \end{cases} \quad (25)$$

с условиями сшивания (непрерывности функции и ее первой производной):

$$\begin{cases} 1 - A_j R_{n,l}(\xi^*) = C_j^* (\xi^*)^{-p} \\ -A_j R_{n,l}'(\xi^*) = -p C_j^* (\xi^*)^{-p-1} \end{cases} \quad (26)$$

Система (36) имеет несколько решений для  $C_j^*$  и  $\xi^*$ , возьмем то из них, для которого функция  $f_{j+1}^*(\xi)$  имеет  $j+1$  экстремум. Рассмотрим функции  $G^1(\xi)$  и  $G^2(\xi)$ :  $G^1 = \frac{1}{2}(f_{j+1}^*(\xi) + f_j(\xi))$ ,  $G^2 = \frac{1}{2}(f_{j+1}^*(\xi) - f_j(\xi))$ . Отметим, что функция  $G^1(\xi) \equiv 1$  при  $\xi < \xi_{0j}$  и  $G^1(\xi) = C\xi^p$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ; а

функция  $G^2(\xi) = A_j R_{n,l}(\xi)$  при  $\xi < \xi_0$ . В качестве линейного приближения для собственной функции возьмем:

$$\tilde{U}_{l,m,j}(\xi, \theta, \varphi) = \frac{1}{2}(f^*_{j+1} + f_j) + \frac{1}{2}(f^*_{j+1} - f_j) P_{l,m}(\cos \theta) \cos m \varphi. \quad (27)$$

Функция  $\tilde{U}(\xi, \theta, \varphi)$  удовлетворяет почти всем требуемым свойствам, а именно, в шаре  $\xi < \xi_0$   $\tilde{U}(\xi, \theta, \varphi) = 1 + u(\xi, \theta, \varphi)$ , а при  $\xi \rightarrow \infty$  ведет себя как  $C(\theta, \varphi) \xi^p$ . Недостатком данных приближений является то, что вторая производная функции по  $\xi$  терпит разрыв в при  $\xi = \xi^*$ .

Оценим число приближений, которые можно построить таким способом при заданных значениях параметров  $\sigma$ ,  $\beta$  и  $k$ . При каждом  $l$  и  $m$  можно построить  $n_l$  приближений. Очевидно, должно выполняться соотношение  $n_l \geq 1$ , что накладывает ограничения на  $l$ :  $l \leq l_{\max}$ . При данном  $l$   $m$  может принимать  $l + 1$  значение:  $m = 0, 1, \dots, l$ . Таким образом, общее число приближений  $N$  равно:

$$N = \sum_{l=1}^{[(a-1)(-k+2)]} (l+1)[a_l], \quad a = \frac{\beta-1}{\beta-\sigma-1}, \quad a_l = a - \frac{l}{-k+2}, \quad (28)$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ . Отметим, что это приближения к обычным СФ, то есть параметры  $\beta$  и  $\sigma$  таковы, что спектр не содержит структур с нулевой областью в центре.

Рассмотрим архитектуру приближений к СФ из класса  $E_j L M m$ . Составим табличку из трех чисел  $n$ ,  $l$  и  $m_l$ , определяющих спектр собственных функций:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, \dots, N - \text{главное число; } N = \begin{cases} a-1 \\ [a] \end{cases}, \quad a = \frac{\beta-\sigma-1}{\beta-1}; \\ l &= 0, 1, 2, \dots, (n-1) - \theta\text{-орбитальное число;} \\ m_l &= 0, 1, 2, \dots, l - \varphi\text{-угловое число;} \end{aligned} \quad (29)$$

Главное число  $n$  характеризует число сферических слоев, в которых располагаются максимумы и минимумы собственной функции с номером  $n$ . Число  $N$  при этом определяет максимально возможное число таких слоев и оно также определяет число вырожденных сферически-симметричных СФ. Первая вырожденная СФ имеет единственный максимум в центре симметрии и самую маленькую область эффективной локализации. Вторая вырожденная СФ в центре симметрии имеет в т. 0 минимум и ярко выраженный максимум во втором слое, третья СФ имеет самый большой максимум в третьем слое, четвертая – в четвертом, и т. д. Все области эффективной локализации у вырожденных СФ – шары, чем больше номер СФ, тем больше фундаментальная длина.

Теперь рассмотрим СФ неоднородные по углу, у которых  $l$  отлично от нуля, а  $m_l = 0$ . Чтобы понять, как устроены такие структуры мысленно

представим себе неоднородный по плотности шар, плотность которого меняется в соответствии с радиальной частью СФ. Рассечем этот шар несколькими плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости. Выберем их так, чтобы в этих плоскостях полиномы Лежандра  $P^0_l(\cos\theta)$  имели максимумы или минимумы. Пусть радиальная часть в каком-то сферическом слое имеет максимумы плотности, при пересечении слоя плоскостью образуется линия – окружность, на которой, если  $P^0_l(\cos\theta)$  в этой плоскости имел максимум, то плотность возрастет, если минимум, то плотность уменьшится. В результате каждый сферический слой расслоится на линии, так что при переходе от линии к линии плотность будет меняться от максимальной до минимальной. Где же будет сосредоточена основная «масса» такой структуры? Теперь нетрудно представить, что при снятии вырождения по  $l$  СФ распадется на несколько «бубликов», или торов, расположенных концентрическим образом в одном горизонтальном слое, или нескольких слоях, в них то и сосредоточена почти вся «масса» данной структуры.

При снятии вырождения по углу  $\varphi$  ( $m_l > 0$ ) торы будут распадаться на отдельные «шарики», в которых и будет находиться главная часть «массы» СФ.

Таким образом, принцип организации трехмерных тепловых структур заключается в следующем: максимумы распределения температур располагаются концентрическими слоями. Число максимумов в слое определяется параметрами  $l$  и  $m$ , число слоев – номером собственной функции  $j$ . Трехмерные СФ из этого класса аналогичны построенным ранее [23]-[25] двумерным структурам из класса  $EjMm$ .

Двумерных СФ из класса  $EjMm$  при  $j=1$  имеют  $m$  максимумов, находящихся на окружности в углах правильного  $m$ -угольника. В случае  $j=2$  максимумы расположены в два слоя на двух концентрических окружностях по  $m$  штук на каждой в углах правильных  $m$ -угольников, которые повернуты на угол  $\pi/m$  один относительно другого. Аналогично организованы и другие с.ф.  $EjMm$ : они имеют  $jm$  максимумов, расположенных в  $j$  слоях на концентрических окружностях в вершинах правильных  $m$ -угольников. То есть усложнение организации идет по двум направлениям: увеличение числа максимумов в слое и увеличение числа слоев.

## 2. Класс собственных функций $E_{i/j/k}$ .

Рассмотрим теперь другой тип структур, описываемых автомодельным уравнением (9) в декартовой системе координат. Если СФ из класса  $EjLIMm$  можно рассматривать как снимающие вырождение по углу у сферически-симметричных решений, то исследуемые в этом разделе многомерные автомодельные решения, можно рассматривать, как снимающие вырождение по переменным  $y$  и  $z$  по отношению к одномерным СФ.

Линеаризируем уравнение (9), считая что в некоторой области  $\Theta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \approx 1 + u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , где  $|u| \ll 1$ , тогда получим:

$$\Delta_{\xi_1, \xi_2, \xi_3}(u) = -(\beta - 1)u + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} (\xi_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial u}{\partial \xi_3}), \quad (30)$$

$$v = 2, \quad \Delta_{\xi_1, \xi_2, \xi_3} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}$$

Решение уравнения (30) будем искать методом разделения переменных в виде:

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = c_1 u_1(\xi_1) + c_2 u_2(\xi_2) + c_3 u_3(\xi_3), \quad (31)$$

так чтобы решение (31) включало бы вырожденные моды как частный случай. Тогда функции  $u_i(\xi_i)$   $i=1,2,3$  должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi_i^2} + (\beta - 1)u_i - \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = 0. \quad (32)$$

Решением уравнения (32), ограниченным при  $\xi = 0$ , является вырожденная гипергеометрическая функция:

$$u_i(\xi_i) = M\left(-\frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \frac{1}{2}, \frac{\beta - \sigma - 1}{4} \xi_i^2\right). \quad (33)$$

Для построения приближений к собственным функциям нужно найденное решение линеаризованного уравнения, «сшить» с асимптотикой (10). В двумерном случае шивание вида (24) проводилось отдельно по каждой координате  $\xi_i$ , и в качестве линейного приближения бралась функция равная произведению, полученных таким образом «одномерным» функций. Поступим аналогичным способом, и в качестве приближения к СФ возьмем:

$$\tilde{U}_{i,j,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f_i(\xi_1) f_j(\xi_2) f_k(\xi_3), \quad (34)$$

где  $f(\xi_i)$  является СФ рассматриваемой автомодельной задачи в одномерном случае, то есть удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{d\xi} \left( f^\sigma \frac{df}{d\xi} \right) = -f + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} + f^\beta. \quad (35)$$

Нелинейное многомерное автомодельное уравнение (9) не позволяет провести разделение переменных, однако функцию (34) можно рассматривать как приближенное решение нелинейного уравнения (9) (нелинейное приближение). Действительно, одномерная СФ в области немонотонности описывается линейным приближением:  $f(\xi_i) \approx 1 + Au(\xi_i)$ , следовательно, и функция  $\tilde{U}_{i,j,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  приближенно описывается линейным уравнением (32), так как с точностью до квадратичных членов:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i,j,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &\approx (1 + A_i u(\xi_1))(1 + A_j u(\xi_2))(1 + A_k u(\xi_3)) \approx \\ &\approx 1 + A_i u(\xi_1) + A_j u(\xi_2) + A_k u(\xi_3) + \\ &+ A_i A_j u(\xi_1) u(\xi_2) + A_k A_i u(\xi_1) u(\xi_3) + A_k A_j u(\xi_3) u(\xi_2) + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

При стремлении одной из переменных  $\xi_i$  к бесконечности (по прямым параллельным осям координат) функция  $\tilde{U}_{i,j,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  имеет нужную асимптотику (10). Таким образом, нелинейное приближение (34) отвечает главным требованиям.

Отнесем такие СФ к классу  $E_{i/j/k}$  и подсчитаем их количество. Очевидно, что перестановка любых двух индексов дает ту же самую собственную функцию, но повернутую на некоторый угол. Поэтому можно считать, что  $1 \leq i \leq j \leq k \leq N$ , где  $N$  – число одномерных СФ (12). Откуда полное число таких приближений равно:

$$N_{i,j,k} = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}, \quad N = \begin{cases} a-1 \\ [a] \end{cases}, \quad a = \frac{\beta-1}{\beta-\sigma-1}. \quad (37)$$

Архитектуру СФ  $E_{i/j/k}$  можно представить себе следующим образом. Рассмотрим трехмерную кубическую решетку. Функция  $\tilde{U}_{i,j,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  будет иметь в тех точках максимум, в которых имеют максимумы функции  $f_i(\xi_1)$ ,  $f_j(\xi_2)$  и  $f_k(\xi_3)$  одновременно (то же самое справедливо и для минимумов). Таким образом, максимумы и минимумы распределения температуры будут располагаться в узлах трехмерной решетки рядами, параллельными осям координат. Этот класс трехмерных с.ф. аналогичен классу  $E_{i/j}$  двумерных с.ф., в котором максимумы функций расположены в  $i$  рядах по  $j$  штук в каждом ряде. Ранее наибольшее количество двумерных структур было построено именно из этого класса.

Замечание. Построенные выше приближения можно назвать одно-модовыми, поскольку они используют решение линейного уравнения, включающего только одну гармонику. В работе [26] были построены более сложные начальные приближения, которые строятся путем сшивания решения линеаризованного уравнения, составленного из нескольких кратных гармоник, с асимптотикой. С этих начальных приближений методом Ньютона удалось построить более сложные СФ, с расщепленными максимумами и в полярной системе координат, и в декартовой.

### 3. Численный метод построения двумерных СФ

Расчеты автомодельной задачи (9), (11) проводились в области  $D$ , такой что на границе области искомая функция была бы мала ( $U|_{\Sigma} \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ ) и асимптотика (10) выполнялась с хорошей точностью. При численном решении автомодельной задачи учитывалась сим-

метрия искомой СФ, и в соответствии с ней выбирался сектор с углом раствора  $2\pi/m$  (где  $m$  – порядок симметрии СФ) в котором и строилось решение. При  $m = 4, 8, \dots$  использовалась декартова система координат, в остальных случаях – полярная.

**В декартовой системе координат** задача решалась в прямоугольнике, расположенном в первом квадранте, на равномерной сетке с шагами  $h_x$  по оси  $x$  и  $h_y$  по оси  $y$ . Количество узлов сетки выбиралось в зависимости от сложности СФ. Обычно 100-200 по каждой переменной. Во внутренних точках уравнение (9) аппроксимировалось на пятиточечном шаблоне разностной схемой второго порядка точности (здесь  $k = 0$ ):

$$U_{x\bar{x}} + U_{y\bar{y}} + (\sigma + 1) \left\{ -\frac{\beta - \sigma - 1}{2 - k} \left[ x \left( U^{1/(\sigma+1)} \right)_x^0 + y \left( U^{1/(\sigma+1)} \right)_y^0 \right] \right\} + (\sigma + 1) (U^{\beta/(\sigma+1)} - U^{1/(\sigma+1)}) = 0 \quad (38)$$

где  $U_x$ ,  $U_{\bar{x}}$ ,  $U_{0x}$  соответственно левая, правая и центральная производные. На осях координат задавались условия симметрии. На двух других сторонах прямоугольника, считалось, что решение выходит на асимптотику, и на четырехточечном шаблоне аппроксимировалось условие (11). Полученная система нелинейных уравнений решалась методом Ньютона. При его реализации учитывалась ленточная структура матрицы. В качестве начального приближения бралась функция равная произведению одномерных СФ:

$$\tilde{U}_{i,j}(x, y) \approx \Theta_i^{\sigma+1} * \Theta_j^{\sigma+1} \quad (39)$$

**В полярной системе координат** задача решалась в секторе  $0 \leq \varphi \leq 2\pi/m$ ,  $0 \leq r \leq R_f$ . Значение  $R_f$  бралось достаточно большим. Использовалась равномерная сетка и по углу, и по радиусу, с шагами соответственно  $h_\varphi$  и  $h_r$ . Первая точка по радиусу, в которой вычислялось решение была на полшага  $0.5h_r$ , сдвинута от центра. Во внутренних точках уравнение (11) аппроксимировалось пятиточечной разностной схемой второго порядка точности:

$$\frac{1}{r_i h_r} [r_{i+0.5h} U_r - r_{i-0.5h} U_{\bar{r}}] + \frac{1}{r_i^2} U_{\varphi\bar{\varphi}} - (\sigma + 1) \frac{\beta - \sigma - 1}{2 - k} \left[ r \left( U^{1/(\sigma+1)} \right)_r^0 \right] + (\sigma + 1) [U^{\beta/(\sigma+1)} - U^{1/(\sigma+1)}] = 0 \quad (40)$$

В точке  $r = 0$  и задавалось условие равенства нулю производной функции  $U$ . На внутренних границах сектора  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi/m$  задавались условия симметрии, на внешней границе, дуге радиуса  $R_f$  аппроксимировалось условие (11) – выхода решения на асимптотику. В качестве начального приближения бралась функция, полученная методом сши-

вания. Полученная система нелинейных уравнений решалась методом Ньютона.

Результаты расчетов, проведенные и в декартовой и полярной системе координат показали эффективность предложенного метода решения и его хорошую сходимость к СФ. В качестве теста служили одномерные радиально-симметричные структуры, построенные методом пристрелки. Для проверки реальности существования построенной СФ использовался а) метод сгущения сетки, б) проверялось, чтобы на границе области функция была бы мала, скажем  $\Theta(\xi, \varphi) < 10^{-2}$ .

## 4. Результаты численных расчетов

### 4.1 Двумерные собственные функции.

Численные расчеты проводились для различных параметров  $\beta, \sigma$  и  $k=0$  в полярной и декартовой системах координат. Часть СФ была построена с использованием начальных приближений, описанных выше, другая часть была получена методом продолжения по параметру. Решение строилось с учетом симметрии в некотором секторе, затем достраивалось на всю область и представлялось на графике в трехмерном изображении. Строились также разрезы СФ вдоль некоторых направлений и их линии уровня для наглядного представления архитектуры СФ. Наибольшая часть структур была сосчитана в декартовой системе координат, поскольку для нее наиболее просто строить начальные приближения. Результаты исследований позволили выявить ряд закономерностей в зависимости спектра СФ от значений параметров.

На рис. 2 представлены шесть СФ при  $\beta = 3.5, \sigma = 2$ , построенных в декартовой системе координат. Все эти структуры были получены методом Ньютона, и близки к начальным приближениям вида (39). Всего таких приближений для данных значений параметров существует десять. Только одна СФ  $U_{2,2}$  не была построена, итерации сошлись к цилиндрически-симметричному решению.

С целью выяснения, почему выпала из спектра СФ  $U_{2,2}$ , была принята попытка построения этой СФ при меньшем значении параметра  $\beta$ . Это удалось сделать при  $\beta = 3.2$ . На рис. 3 в представлено трехмерное изображение этой структуры. Мы видим, что СФ имеет четыре ярко выраженные вершины, находящиеся в углах квадрата, разделенные глубоким минимумом в начале координат и «ущельями», расположенными по осям координат. СФ  $U_{2,2}$  при  $\beta = 3.2$  была продолжена в обе стороны по параметру  $\beta$ . На рис. 3 представлена эволюция структуры  $U_{2,2}$  с изменением значения  $\beta$ . Мы видим, что при уменьшении  $\beta$  вершины растут, а провалы между ними уменьшаются.



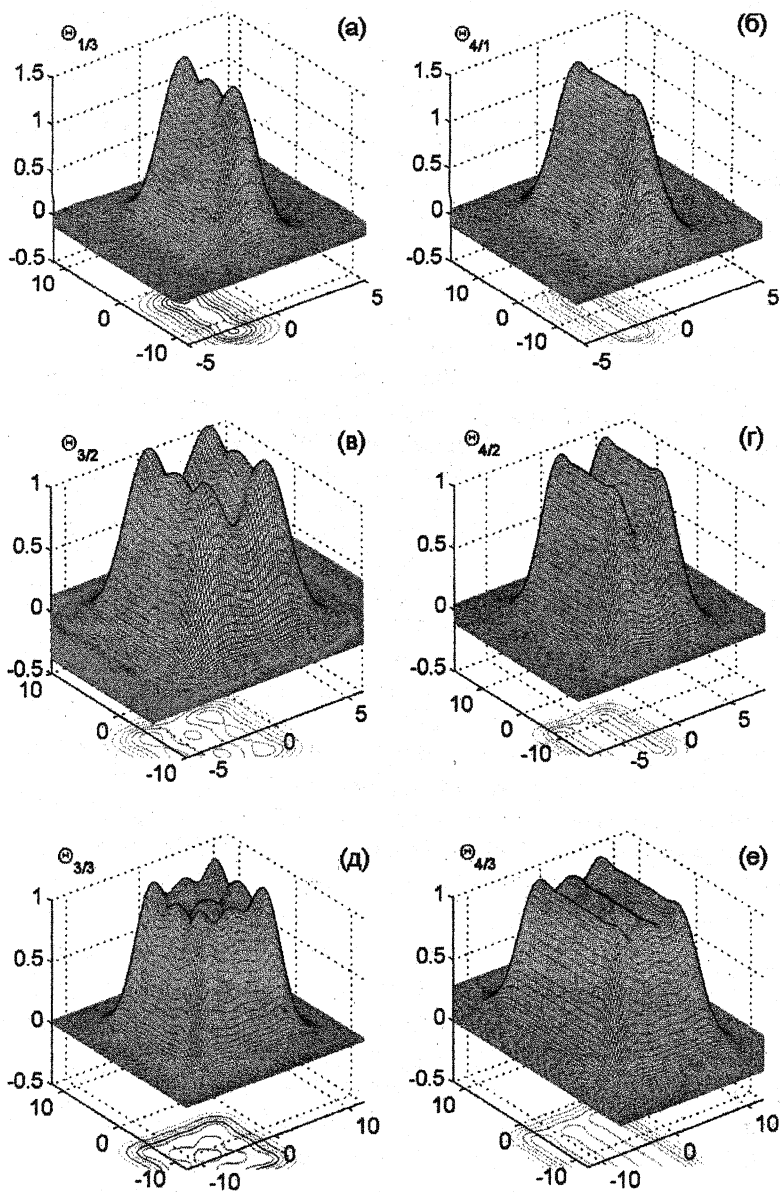


Рис. 2. Двумерные СФ из класса  $\Theta_{ij}(x, y)$  при  $\beta = 3.5$ ,  $\sigma = 2$ .

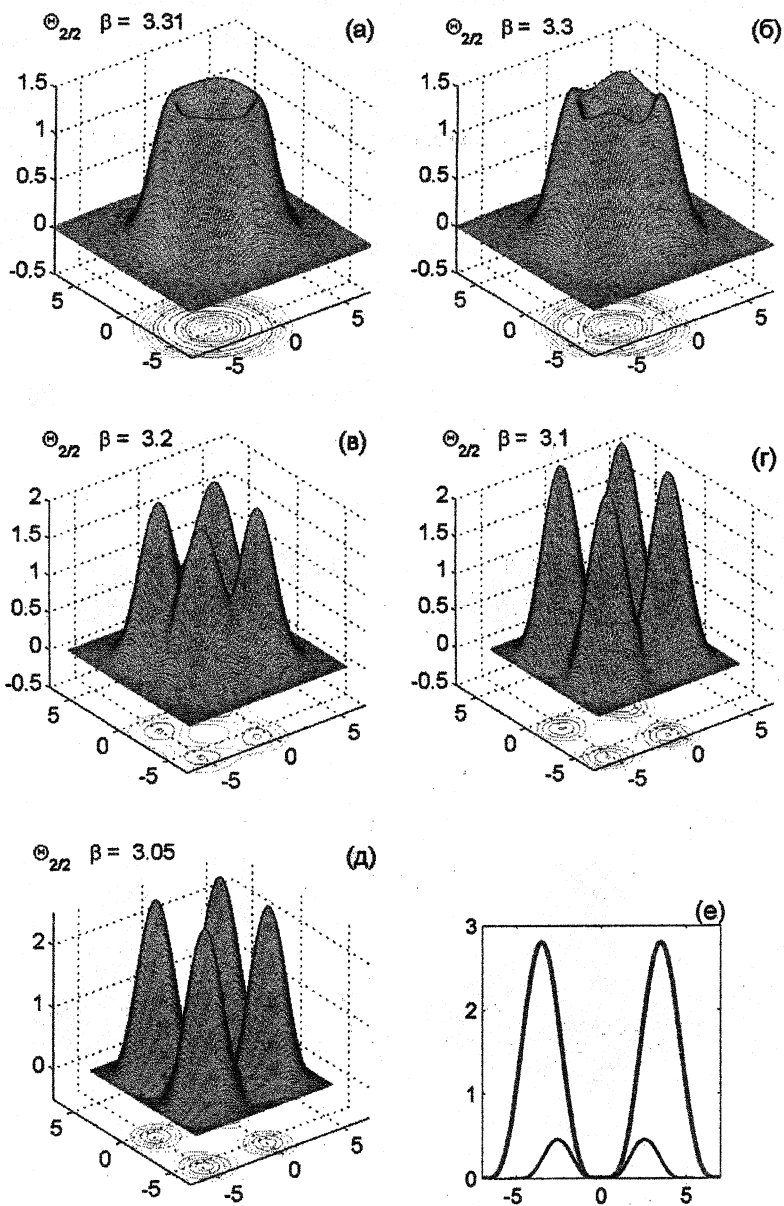


Рис. 3. Эволюция СФ  $\Theta_{2/2}(x, y)$  при изменении параметра  $\beta$ .

Примерно при  $\beta = 3.08$  центральный минимум опускается до нуля, и в центре образуется нулевая область (в расчетах  $U < 10^{-8}$ ). При дальнейшем уменьшении  $\beta$  нулевая область увеличивается (см. рис. 3д, е), и затем структура распадается на четыре независимые локализованные структуры с одной вершиной, соответствующие первой СФ при данном значении  $\beta$ .

При увеличении параметра  $\beta$  максимумы СФ  $U_{2,2}$  уменьшаются, и провалы между вершинами уменьшаются (рис. 3 а, б). При  $\beta \approx 3.32$  СФ  $U_{2,2}$  вырождается в цилиндрически – симметричную СФ  $U_2$ .

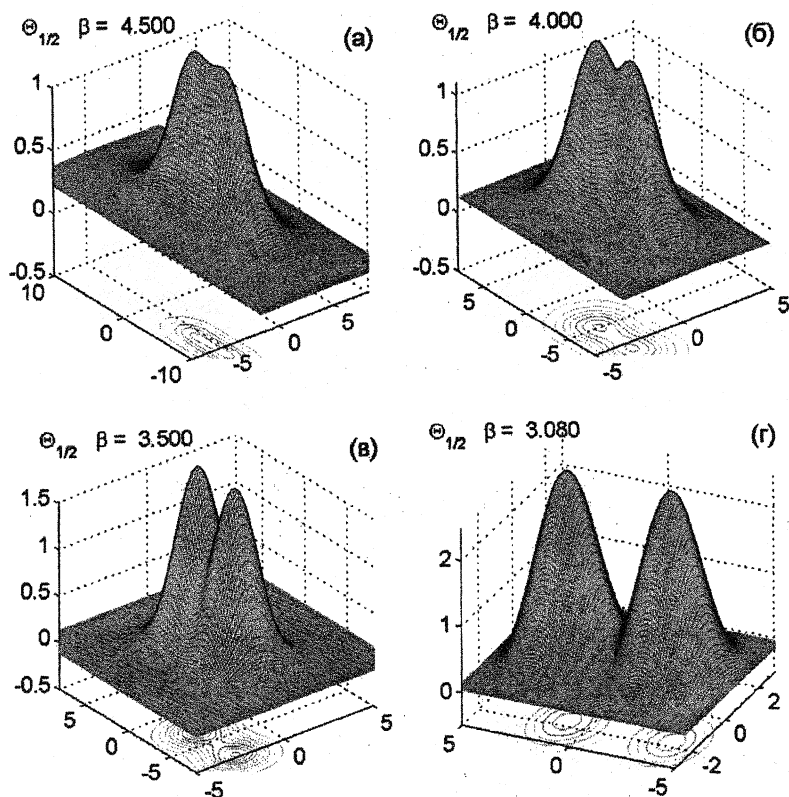


Рис. 4. Эволюция СФ  $\Theta_{1/2}(x, y)$  при изменении параметра  $\beta$ .

Эволюция СФ из этого класса при больших значениях  $\beta$  может иметь другой характер. На рис. 4 представлена эволюция СФ  $U_{1/2}$  с изменением параметра  $\beta$ . Хорошим приближением для этой СФ является функция, равная произведению одномерных с.ф.:

$$\tilde{U}_{1/2}(x, y) \approx \Theta_1^{\sigma+1}(y) * \Theta_2^{\sigma+1}(x) \quad (41)$$

СФ  $U_{1,2}$  состоит из двух вершин, разделенных ущельем, проходящим по оси ординат (рис. 4 в). В центре находится точка типа седла: в разрезе по оси абсцисс она соответствует минимуму, разделяющему два максимума, а в разрезе по оси ординат – максимуму. С уменьшением параметра  $\beta$  провал между двумя вершинами увеличивается, а значение максимумов растёт (рис. 4 г), и при некотором значении  $\beta$ , близком к  $\sigma + 1$ , СФ разваливается на две простые локализованные структуры, соответствующие первой СФ. При увеличении параметра  $\beta$  абсолютные значения максимумов уменьшаются, а значение минимума СФ в центре увеличивается. СФ  $U_{1/2}$  при больших значениях  $\beta$  напоминает хребет со слабо выраженными двумя вершинами (рис. 4а, б). При стремлении параметра  $\beta$  к бифуркационному значению, соответствующему слиянию одномерной второй СФ с гомотермическим решением, наблюдается увеличение размеров хребта вдоль оси абсцисс и стремление вершины хребта к гомотермическому решению. По другому направлению (оси ординат) ширина хребта (области локализации) почти не меняется (рис. 4а). Сечение по оси ординат близко к первой СФ, а по оси абсцисс – ко второй. В точке бифуркации  $\beta = 5$  вторая СФ вырождается в бесконечный хребет, идущий вдоль оси ординат с максимумом равным гомотермическому решению. Таким образом, СФ  $U_{1/2}$  в отличие от СФ  $U_{2/2}$  не ответвляется от какой-либо цилиндрически-симметричной СФ, а сохраняет свою структуру вплоть до точки бифуркации, соответствующей ответвлению от гомотермического решения.

Расчеты показали, что общая тенденция эволюции СФ с изменением параметра  $\beta$  такова. При  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  все двумерные СФ разваливаются при некотором значении  $\beta$  на простые структуры с одной вершиной, соответствующие первой цилиндрически-симметричной СФ. У сложных структур это расщепление идет постепенно с уменьшением  $\beta$ . Сначала в районе абсолютного минимума образуется область с нулевым значением функции (как у СФ  $U_{2/2}$  на рис. 3 д, е), затем нулевые области образуются и в окрестности других минимумов. На рис. 6 а представлена затейливая архитектура СФ  $U_{n2m12}$  при  $\beta = 3.05$ , а на рис. 6 б изображены ее линии уровня. СФ можно рассматривать как состоящую из двух колец «гор». В центре внутреннего кольца, имеющего четыре вершины, нахо-

дится нулевая область (на рис. 6 б серая область, обведенная белой линией). Внешнее кольцо гор состоит из 12 вершин, объединенных в четыре группы по три вершины. В каждом из углов квадрата между двух колец также находятся нулевые области (на рис. 6 б они светло-серого цвета, рядом с белыми областями). С уменьшением параметра  $\beta$  нулевые области сливаются, вершины локализуются, и структура распадается.

При увеличении параметра  $\beta$  амплитуда отклонений от гомотермического решения в области немонотонности СФ уменьшается. СФ при бифуркационном значении параметра либо вырождаются в цилиндрически-симметричные структуры, либо прекращают свое существование, сливаясь с к гомотермическим решением в некоторой неограниченной области плоскости. Исследования показали, что в последнем случае точка бифуркации для СФ  $U_{ij}$  ( $j \geq i$ ) совпадает с бифуркационным значением параметра  $\beta_j$  (13) для одномерной СФ. Поскольку рассматриваемые СФ  $U_{ij}$  очень близки к приближению (41), образованному произведением двух одномерных СФ, то можно предположить, что при  $\beta \rightarrow \beta_j$  двумерная СФ превращается в структуру, состоящую из одного или более бесконечных хребтов, в зависимости от значения  $i$ . При  $i = j$  СФ сливается с гомотермическим решением на всей плоскости  $(x, y)$ . Последний случай имел место для СФ  $U_{4/4}$ .

Исследования показали, что в полярной системе координат приближения типа (24), (25) значительно хуже приближений вида (39) в декартовой системе координат. Они только качественно передают вид СФ.

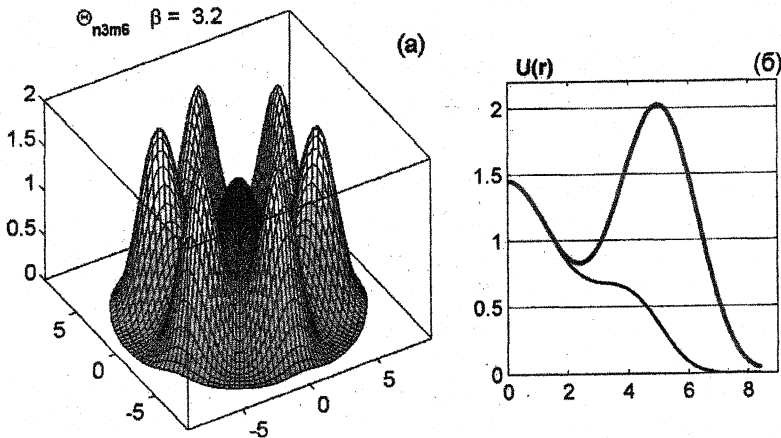


Рис. 5. СФ  $U_{n3m6}(r, \varphi)$ .

Итерации плохо сходятся к СФ, или вообще расходятся. В [19] с помощью начальных приближений другого вида удалось построить некоторые СФ. В целом, вопрос о существовании многих СФ, имеющих порядок симметрии не кратный четырем, остается в настоящее время открытым. На рис. 5 представлен вид одной из СФ рассчитанной в полярной системе координат.

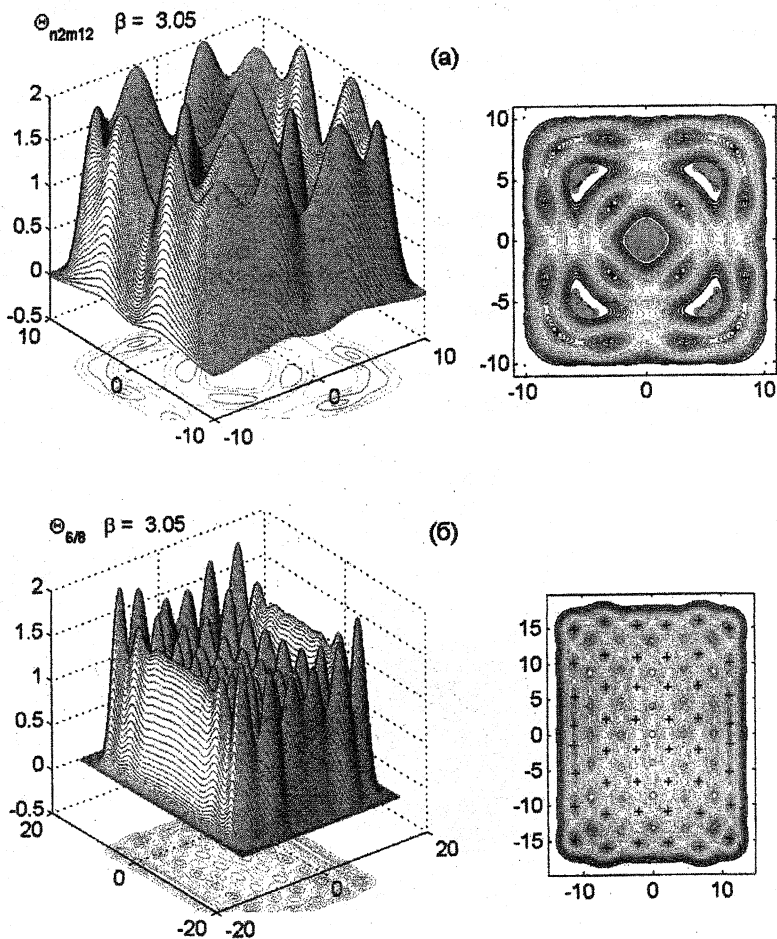


Рис. 6. Сложные СФ  $\Theta_{i/j}(x, y)$  и их линии уровня (слева) при  $\beta$  близких к  $\sigma + 1$ .

Результаты расчетов выявили следующие особенности спектра СФ при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  1) число сложных СФ состоящих из многих максимумов резко увеличивается (рис. 6 б); 2) некоторые СФ выпадают из спектра (они уже развалились к этому значению параметра); 3) появляются СФ, содержащие внутри себя одну ли несколько областей с нулевым значением температуры (рис. 3 д) (многосвязные области локализации), 4) появляются структуры нового типа, в которых максимумы образуют группы (рис.6 а).

При численном построении СФ отслеживался выход решения на асимптотику (10), то есть область бралась достаточно большой, так чтобы на границе СФ была бы мала. Рис. 7 демонстрирует влияние размеров области. На этом рисунке показана функция, которая не является искомым решением автомодельной задачи. Представленная функция, построена на мелкой сетке в полярной системе координат, итерации сошлись к ней с огромной точностью. Однако, как видно из сечений этой функции, по некоторым направлениям она на границе равна примерно 0.33, что является очень большим значением, для которого асимптотика (10) не выполняется. Попытка увеличения размера области привели к тому, что сначала вид решения стал меняться с размерами области, и при большом увеличении области итерации разошлись вообще.

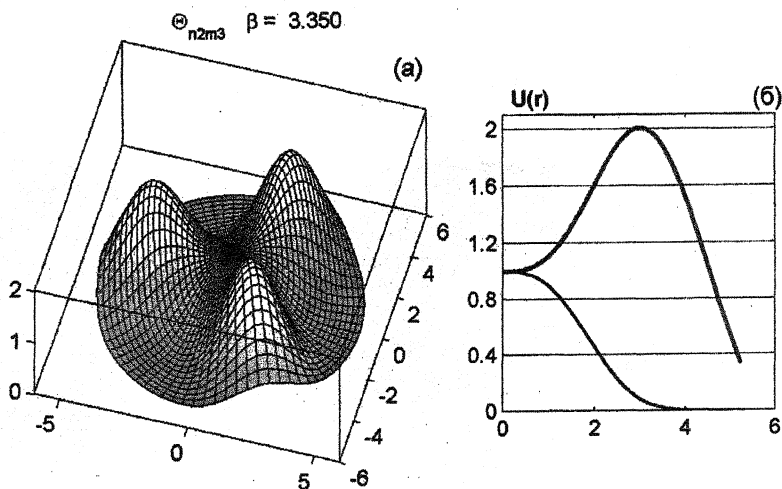


Рис. 7. Решение разностной задачи, которое не является решением дифференциальной задачи.

## 4.2 Трехмерные СФ

В настоящей работе были построены некоторые трехмерные СФ из класса  $U_{i,j,k}$ , то есть те, которые имеют четвертый порядок симметрии по углу  $\varphi$  и четвертый порядок симметрии по углу  $\theta$ . С учетом симметрии они строились только в одной восьмой части всей области, в первом октанте декартовой системы координат. Они рассчитывались в области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед  $G: \{0 \leq x \leq x_f, 0 \leq y \leq y_f, 0 \leq z \leq z_f\}$ . Использовалась равномерная сетка с числом узлов  $30 \times 30 \times 30$  и шагами  $h_x$ ,  $h_y$  и  $h_z$  по каждой оси. Во внутренних точках уравнение (11) аппроксимировалось на семиточечном шаблоне разностной схемой второго порядка точности, аналогичной для двумерного случая (42). В качестве начального приближения бралась функция:

$$\tilde{U}_{i,j,k}(x,y) \approx \Theta_i^{\sigma+1} * \Theta_j^{\sigma+1} * \Theta_k^{\sigma+1}, \quad (42)$$

равная произведению одномерных с.ф.

На гранях  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  ставились условия симметрии, на параллельных им гранях аппроксимировалось условие выхода на асимптотику (10):

$$xU_x + yU_y + zU_z + \frac{2(\sigma+1)}{\beta - \sigma - 1} U(x,y,z) = 0. \quad (43)$$

Полученная система разностных уравнений на сетке решалась методом Ньютона. В большинстве расчетов итерации сходились быстро к СФ, очень близкой к приближению (42). Для наглядного представления архитектуры СФ в трехмерном изображении строилась поверхность уровня равного полуширины СФ, характеризующая форму области локализации. Также строились разрезы СФ по осям координат и главной диагонали прямоугольного параллелепипеда. На рис. 8 представлены области локализации и сечения некоторых трехмерных структур.

Исследование эволюции СФ при изменении параметра  $\beta$  показало, что она аналогична эволюции двумерных структур из класса  $U_{i,j}$ . Так при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  СФ  $U_{i,j,k}$  ( $i \leq j \leq k$ ) распадается на простые структуры. На рис. 9 представлена СФ  $U_{2,2,2}$  при двух значениях параметра  $\beta$ ,  $\sigma = 2$ . Исследования показали, что при уменьшении параметра  $\beta$  максимумы СФ увеличиваются, минимумы уменьшаются, и начиная с некоторого значения параметра появляется нулевая область внутри СФ (рис. 9 б), и наконец при бифуркационном значении  $\beta$  СФ распадается на простые структуры, описываемые первой сферически-симметричной СФ с областью локализации в виде шара.



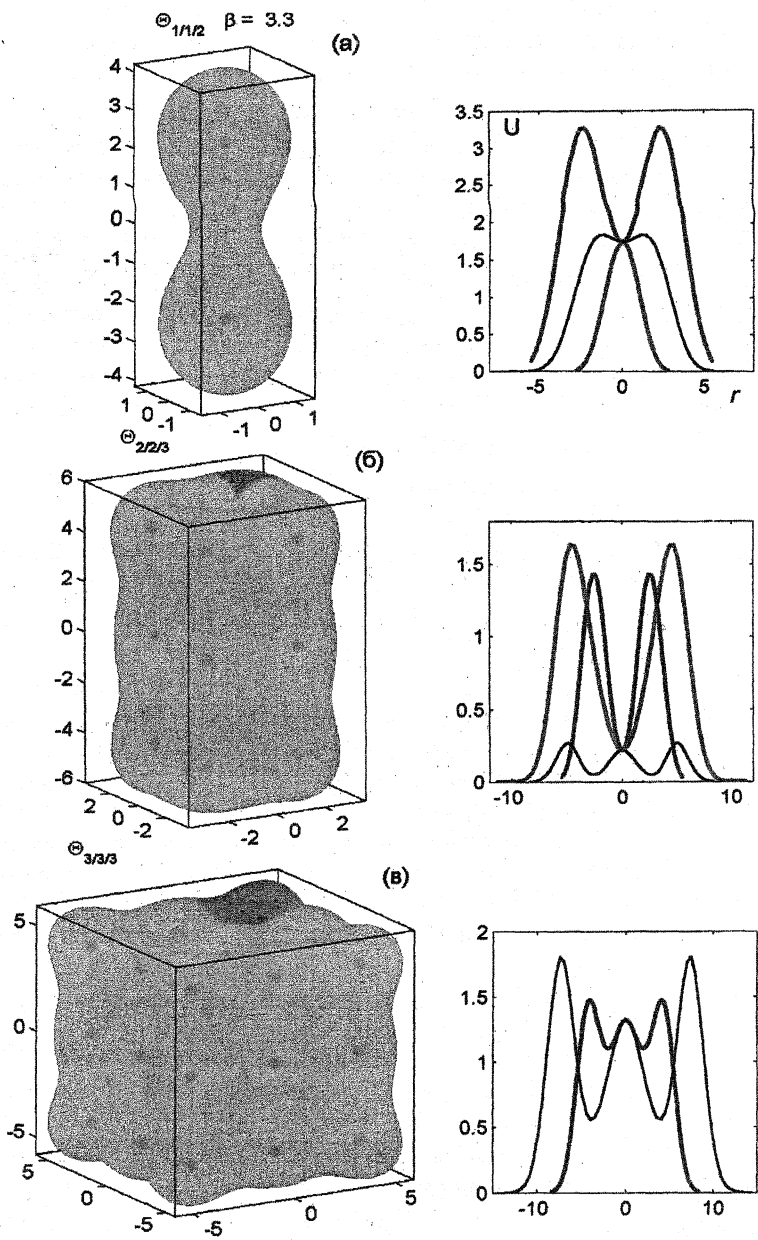


Рис. 8. Трёхмерные СФ  $\Theta_{i/j/k}(x, y, z)$  при  $\beta = 3.3$ ?  $\sigma = 2$ .

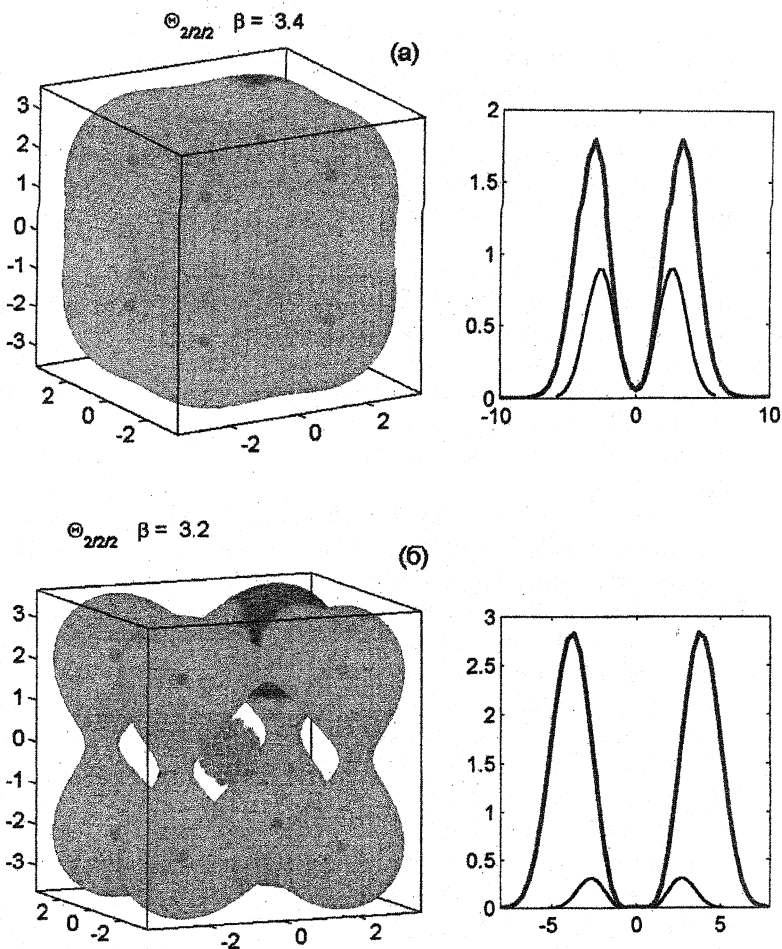


Рис. 9. Форма области локализации СФ  $\Theta_{2/2/2}(x, y, z)$  при двух значениях  $\beta$ . б) Внутри структуры существует нулевая область, отмеченная серыми кружками.

Автор выражает благодарность С. П. Курдюмову за полезные обсуждения, и Н.В. Пескову за помощь в проведении расчетов.

## Литература

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи. –М.: Наука.1998. – 255с.
2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.
3. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. //J. Discrete and continuous dynamical systems, 2002, V. 8, № 2, pp. 399-433.
4. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью //Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
5. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Потанов А.Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы//Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука. 1996. С. 95-164.
6. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики //СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
7. Лобанов А.И, Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови – //В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002 г., с. 346-367.
8. Кириченко Н.А. Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии //В книге Режимы с обострением. Эволюция идеи. –М.: Наука.1998. с. 217-230.
9. Белавин В.А., Курдюмов С.П. Режимы с обострением в демографической системе: Сценарий усиления нелинейности //Жур. Вычислит. Матем. и Матем. Физ., 2000, Т.40, №2, С.238-251.
10. Капица С.П. Феноменологическая теория роста населения Земли // Успехи физ. наук, 1996, Т.166, №1, с.63-80.
11. С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
12. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Док. АН СССР, 1976, Т.227, №2.
13. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // Док. АН СССР, 1977, Т.237, №6.
14. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Жур. вычислит. Матем. и матем. Физ. 1983, т. 23, № 2, с. 380-390.
15. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Самарский А.А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // Док. АН СССР, 1980, Т.251, №3.

16. Димова С. Н., Касичев М. С., Курдюмов С. П. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // Жур. вычислит. матем. и матем. физ. 1989, т. 29, № 11, с. 1683–1704.
17. Куркина Е. С. Исследование спектра автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Прик. матем. и информат. М.: Изд-во МГУ, 2004. № 16. С. 27–65.
18. Куркина Е. С., Курдюмов С. П. Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением // Доклады АН, Т. 395, № 6, с. 1–6, 2004 г.
19. Димова С. Н., Касичев М. С., Колева М. Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов // Матем. моделир. Т. 4, № 3, 1992, С. 74–83.
20. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Препринт ИПМатем. АН СССР, М., 1979, № 29.; // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М. Наука 1982, 217–243.
21. Kurdumov S. P. Evolution and self-organization laws in complex systems // Int. J. Modern Phys. C1. 1990, 299–327.
22. Куркина Е. С. Атом как структура горения нелинейной среды. // «Синергетика». Труды семинара. Естественнонаучные и гуманитарные аспекты. М.: МИФИ, 2004 г., Том № 7, 37–51.
23. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потапов. Исследования многомерной архитектуры собственных функций нелинейной среды: Препринт № 75 М.: ИПМатем. АН СССР. 1982.
24. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потапов, А.А. Самарский. Архитектура многомерных тепловых структур // Док. АН СССР. 1984. Т. 274. № 5. С. 1071–1075.
25. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потапов, А.А. Самарский. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 8. С. 1189–1205.
26. А.Б. Потапов. Построение двумерных собственных функций нелинейной среды: Препринт № 8 М.: ИПМатем. АН СССР. 1986.
27. Галактионов В. А. Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения  $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$  // Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 1, с. 15–23.
28. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко и др. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // Док. АН СССР, 1980, Т. 251, № 4.