Лапонин В.С., Савенкова Н.П.

ПОИСК АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ УРАВНЕНИИ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО.

Введение.

В основе математической постановки задачи распространения Бозе-Эйнштейновского конденсата (БЭК) [1 – 4] находится уравнение Гросса-Питаевского (ГП) [1 – 4]. Это классическое нелинейное уравнение, учитывающее эффекты межчастичного взаимодействия посредством эффективного среднего поля. Ввиду, аналогичности уравнения ГП в теории БЭК и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [5,6] в нелинейной оптике, многие явления, предсказанные и описанные в нелинейной оптике, можно ожидать и в макроскопических квантовых состояниях БЭК, несмотря на кардинальные различия физических систем.

Полное теоретическое описание БЭК требует привлечения квантовой теории многих частиц [2,6]. Многочастичный гамильтониан, описывающий N взаимодействующих бозонов, выражается через операторы бозонного поля $\hat{\Phi}(r), \hat{\Phi}^{\dagger}(r)$, отвечающие, соответственно, аннигиляции и рождению частицы в точке r. Приближение среднего поля обычно применяется для взаимодействующих систем для преодоления проблемы точного решения полного многочастичного уравнения Шредингера [6]. Помимо, избежания тяжелой вычислительной работы, теория среднего поля позволяет описать свойства системы с помощью набора параметров, имеющих ясный физический смысл. Это особенно справедливо в случае бозонов в ловушке.

В данной работе производится поиск аналитического солитонного решения в трехмерном уравнении Гросса-Питаевского. Ранее авторам работы [1] удалось получить аналитическое солитонное решение в двухмерном уравнении ГП. При этом под солитоном подразумевается уединенное возбуждение в нелинейной бездиссипативной среде [3]. Слово «уединенное» означает, что величина возбуждения (его амплитуда) убывает при удалении от центра солитона. Слово «бездиссипативной» означает, что при распространении солитонов механическая энергия сохраняется, в частности трение отсутствует.

Различные численные методы [7 – 9] и разностные схемы применялись для поиска солитонных решений. В работах [1 – 4] приводятся различные численные результаты поиска солитонных решений (темных, светлых, отраженных солитонов) в задаче взаимодействия БЭК с внешним потенциалом (препятствием, магнитной ловушкой и т.д.), которые можно будет сравнить с полученным аналитическим решением.

Постановка задачи.

Рассмотрим трехмерное уравнение Гросса-Питаевского, описывающее взаимодействие конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК) с препятствием (внешним потенциалом)

$$\begin{gathered}
i\hbar\partial_t u(t,x,y,z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}u(t,x,y,z) - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_{yy}u(t,x,y,z) - \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{zz}u(t,x,y,z) + V_0V(t,x,y,z)u(t,x,y,z) + \\
+NB_0\,|u(t,x,y,z)|^2\,u(t,x,y,z), \quad -\infty < x,y,z < +\infty, \quad t>0, \\
u(t,\pm\infty,y,z) = u(t,x,\pm\infty,z) = u(t,x,y,\pm\infty) = 0, \quad u(t=0,x,y,z) = u^0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где x, y, z - пространственные координаты, t - время, $u(t,x,y,z)$ - комплексная макроскопическая волновая функция, m - масса атома, $\hbar$ - постоянная Планка, N - число атомов в конденсате в выбранной области, B_0 описывает взаимодействие между атомами и имеет вид $B_0 = 4\pi\hbar^2 a / m$, где a - управляющий параметр, который положителен для отражения и отрицательный для притяжения. Положительное значение параметра B_0 отражает расфокусировку лазерного пучка, а отрицательное значение означает самофокусировку лазерного пучка. Функция $V(t,x,y,z)$ обозначает пространственно-временной потенциал внешних сил, действующих на конденсат (например, удерживающий потенциал ловушки) или потенциал, возникающий в связи с наличием препятствия внутри БЭК. V_0 обозначает амплитуду потенциала.

Зависимость потенциала от времени означает движение потенциала в соответствующем направлении. Для упрощения дальнейших исследований, будем считать, что потенциал не движется (не зависит от времени), а движется БЭК в направлении потенциала.

Введем безразмерные координаты: $\eta_x = \dfrac{x}{x_c}, \eta_y = \dfrac{y}{y_c}, \eta_z = \dfrac{z}{z_c}$, где x_c, y_c, z_c характерные длины, относящиеся к конденсату, безразмерное время $\tau = \varepsilon t$ и безразмерную волновую функцию $\tilde{u}(\tau, \eta_x, \eta_y, \eta_z) =$

$=\sqrt{x_c y_c z_c} u(\varepsilon t, x_c x, y_c y, z, z_c)$. Сделав замены и преобразования, которые подробно описаны в работе [1], получим уравнение вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - iD_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - iD_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - iD_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + iuV(x,y,z) + i\alpha |u|^2 u = 0,$$
$$u(t,\pm\infty,y,z) = u(t,x,\pm\infty,z) = u(t,x,y,\pm\infty) = 0, u(t=0,x,y,z) = u^0, \qquad (2)$$
$$-\infty < x,y,z < \infty, t > 0.$$

Если $V(x,y,z)=0$, то из уравнения (2) получается хорошо известное уравнение Шредингера для нелинейной оптики. Параметр α - управляющий параметр, характеризующий фокусировку лазерного пучка.

Как говорилось ранее, функция $V(x,y,z)$ обозначает пространственно-временной потенциал внешних сил, действующих на конденсат, и определяется формулой (3).

$$V(x,y,z) = V_0 \exp\left(-\left(\frac{x - L_x/2}{a_{v_x}}\right)^{10} - \left(\frac{y - L_y/2}{a_{v_y}}\right)^{10} - \left(\frac{z - L_z/2}{a_{v_z}}\right)^{10} \right). \qquad (3)$$

Таким образом, параметры a_{v_x}, a_{v_y}, a_{v_z} характеризуют пространственное распределение потенциала, V_0 – параметр, характеризующий влияние потенциала на волновую функцию.

Поиск аналитического решения.

Аналитическое солитонное решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$u(t,x,y,z) = \rho(t,x,y,z) e^{iS(t,x,y,z)}, \qquad (4)$$

где $\rho(t,x,y,z)$ – действительная функция, характеризующая амплитуду, а $S(t,x,y,z)$ – действительная фаза волновой функции определяется формулой (6). Функция $\rho(t,x,y,z)$ задается следующим образом:

$$\rho(t,x,y,z) = \rho_0 \mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{x - x_0 - v_x t}{\tilde{a}_x}\right) \mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{y - y_0 - v_y t}{\tilde{a}_y}\right) \mathrm{ch}^{-1}\left(\frac{z - z_0 - v_z t}{\tilde{a}_z}\right), \qquad (5)$$

где v_x, v_y, v_z – компоненты скорости решения, ρ_0 – действительный параметр (амплитуда).

$$S(t,x,y,z) = \varphi(t) + k_1(t,y,z)[x - x_0 - v_x t] +$$
$$+ k_2(t,x,z)[y - y_0 - v_y t] + k_3(t,x,y)[z - z_0 - v_z t] \qquad (6)$$

Рассмотрим эволюцию волновой функции на достаточном расстоянии от препятствия (потенциала внешних сил $V(x,y,z)$), таком что $V_0 = 0$, тогда $V(x,y,z)=0$. Для подстановки (4) в (2), выпишем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial t}e^{iS}+i\rho\frac{\partial S}{\partial t}e^{iS},\ \ \beta u=\beta\rho e^{iS},\ \ \alpha u\,|\,u\,|^2=\alpha\rho^3 e^{iS}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial x}e^{iS}+i\rho\frac{\partial S}{\partial x}e^{iS},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}e^{iS}+i\rho\frac{\partial S}{\partial y}e^{iS},\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \rho}{\partial z}e^{iS}+i\rho\frac{\partial S}{\partial z}e^{iS},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}e^{iS}+2i\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x}e^{iS}+i\rho\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}e^{iS}-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 e^{iS},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}e^{iS}+2i\frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial S}{\partial y}e^{iS}+i\rho\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}e^{iS}-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 e^{iS},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}e^{iS}+2i\frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial S}{\partial z}e^{iS}+i\rho\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}e^{iS}-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 e^{iS},$$

Подставив (4) в уравнение (2), запишем отдельно уравнения для действительной и мнимой частей соответственно

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+D_x\left(2\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\dfrac{\partial S}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)+D_y\left(2\dfrac{\partial \rho}{\partial y}\dfrac{\partial S}{\partial y}+\rho\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)+\\ +D_z\left(2\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\dfrac{\partial S}{\partial z}+\rho\dfrac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)=0,\\ \rho\dfrac{\partial S}{\partial t}-D_x\left(\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}-\rho\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right)-D_y\left(\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}-\rho\left(\dfrac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)-\\ -D_z\left(\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}-\rho\left(\dfrac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right)+\alpha\rho^3+\beta\rho=0.\end{cases} \tag{7}$$

Для компактности и удобства введем следующие переменные

$$\tilde{x}=\left(\frac{x-x_0-v_x t}{\tilde{a}_x}\right),\quad \tilde{y}=\left(\frac{y-y_0-v_y t}{\tilde{a}_y}\right),\quad \tilde{z}=\left(\frac{z-z_0-v_z t}{\tilde{a}_z}\right).$$

Тогда $[\tilde{x}\tilde{a}_x]=[x-x_0-v_x t],\quad [\tilde{y}\tilde{a}_y]=[y-y_0-v_y t],\quad [\tilde{z}\tilde{a}_z]=[z-z_0-v_z t].$

Найдем частные производные для ρ и S:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\rho\frac{v_x}{\tilde{a}_x}\mathrm{th}(\tilde{x})+\rho\frac{v_y}{\tilde{a}_y}\mathrm{th}(\tilde{y})+\rho\frac{v_z}{\tilde{a}_z}\mathrm{th}(\tilde{z}),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\frac{1}{\tilde{a}_x}\rho\,\mathrm{th}(\tilde{x}),\qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}=\frac{1}{\tilde{a}_x}\rho\left(-\frac{1}{\tilde{a}_x}\mathrm{th}^2(\tilde{x})+\frac{1}{\tilde{a}_x}\mathrm{ch}^{-2}(\tilde{x})\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}=-\frac{1}{\tilde{a}_y}\rho\,\mathrm{th}(\tilde{y}),\qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}=\frac{1}{\tilde{a}_y}\rho\left(-\frac{1}{\tilde{a}_y}\mathrm{th}^2(\tilde{y})+\frac{1}{\tilde{a}_y}\mathrm{ch}^{-2}(\tilde{y})\right),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=-\frac{1}{\tilde a_z}\rho\,\mathrm{th}(\tilde z),\qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}=\frac{1}{\tilde a_z}\rho\left(-\frac{1}{\tilde a_z}\mathrm{th}^2(\tilde z)+\frac{1}{\tilde a_z}\mathrm{ch}^{-2}(\tilde z)\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial k_1}{\partial t}[\tilde a_x\tilde x]-v_xk_1+\frac{\partial k_2}{\partial t}[\tilde a_y\tilde y]-v_yk_2+\frac{\partial k_3}{\partial t}[\tilde a_z\tilde z]-v_zk_3,$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}=k_1+\frac{\partial k_2}{\partial x}[\tilde a_y\tilde y]+\frac{\partial k_3}{\partial x}[\tilde a_z\tilde z],\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 k_2}{\partial x^2}[\tilde a_y\tilde y]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial x^2}[\tilde a_z\tilde z],$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial k_1}{\partial y}[\tilde a_x\tilde x]+k_2+\frac{\partial k_3}{\partial y}[\tilde a_z\tilde z],\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial y^2}[\tilde a_z\tilde z],$$

$$\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{\partial k_1}{\partial z}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial k_2}{\partial z}[\tilde a_y\tilde y]+k_3,\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 k_1}{\partial z^2}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}[\tilde a_y\tilde y].$$

Первое уравнение системы (7) в частных производных примет вид:

$$\rho\frac{v_x}{\tilde a_x}\mathrm{th}(\tilde x)+\rho\frac{v_y}{\tilde a_y}\mathrm{th}(\tilde y)+\rho\frac{v_z}{\tilde a_z}\mathrm{th}(\tilde z)-$$

$$-\rho\frac{2D_x}{\tilde a_x}\mathrm{th}(\tilde x)\left(k_1+\frac{\partial k_2}{\partial x}[\tilde a_y\tilde y]+\frac{\partial k_3}{\partial x}[\tilde a_z\tilde z]\right)+\rho D_x\left(\frac{\partial^2 k_2}{\partial x^2}[\tilde a_y\tilde y]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial x^2}[\tilde a_z\tilde z]\right)-$$

$$-\rho\frac{2D_y}{\tilde a_y}\mathrm{th}(\tilde y)\left(\frac{\partial k_1}{\partial y}[\tilde a_x\tilde x]+k_2+\frac{\partial k_3}{\partial y}[\tilde a_z\tilde z]\right)+\rho D_y\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial y^2}[\tilde a_z\tilde z]\right)-$$

$$-\rho\frac{2D_z}{\tilde a_z}\mathrm{th}(\tilde z)\left(\frac{\partial k_1}{\partial z}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial k_2}{\partial z}[\tilde a_y\tilde y]+k_3\right)+\rho D_z\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial z^2}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}[\tilde a_y\tilde y]\right)=0,$$

где $\rho=\rho_0\mathrm{ch}^{-1}(\tilde x)\mathrm{ch}^{-1}(\tilde y)\mathrm{ch}^{-1}(\tilde z)$. Домножив полученное уравнение системы на $\rho_0^{-1}\mathrm{ch}^2(\tilde x)\mathrm{ch}^2(\tilde y)\mathrm{ch}^2(\tilde z)$ и раскрыв скобки, получим:

$$\frac{v_x}{\tilde a_x}\mathrm{sh}(\tilde x)\mathrm{ch}(\tilde y)\mathrm{ch}(\tilde z)+\frac{v_y}{\tilde a_y}\mathrm{ch}(\tilde x)\mathrm{sh}(\tilde y)\mathrm{ch}(\tilde z)+\frac{v_z}{\tilde a_z}\mathrm{ch}(\tilde x)\mathrm{ch}(\tilde y)\mathrm{sh}(\tilde z)-$$

$$-\frac{2D_x}{\tilde a_x}\mathrm{sh}(\tilde x)\mathrm{ch}(\tilde y)\mathrm{ch}(\tilde z)\left(k_1+\frac{\partial k_2}{\partial x}[\tilde a_y\tilde y]+\frac{\partial k_3}{\partial x}[\tilde a_z\tilde z]\right)+$$

$$+D_x\mathrm{ch}(\tilde x)\mathrm{ch}(\tilde y)\mathrm{ch}(\tilde z)\left(\frac{\partial^2 k_2}{\partial x^2}[\tilde a_y\tilde y]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial x^2}[\tilde a_z\tilde z]\right)-$$

$$-\frac{2D_y}{\tilde a_y}\mathrm{ch}(\tilde x)\mathrm{sh}(\tilde y)\mathrm{ch}(\tilde z)\left(\frac{\partial k_1}{\partial y}[\tilde a_x\tilde x]+k_2+\frac{\partial k_3}{\partial y}[\tilde a_z\tilde z]\right)+$$

$$+D_y\mathrm{ch}(\tilde x)\mathrm{ch}(\tilde y)\mathrm{ch}(\tilde z)\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial y^2}[\tilde a_z\tilde z]\right)-$$

$$-\frac{2D_z}{\tilde a_z}\mathrm{ch}(\tilde x)\mathrm{ch}(\tilde y)\mathrm{sh}(\tilde z)\left(\frac{\partial k_1}{\partial z}[\tilde a_x\tilde x]+\frac{\partial k_2}{\partial z}[\tilde a_y\tilde y]+k_3\right)+$$

$$+D_z \operatorname{ch}(\tilde{x})\operatorname{ch}(\tilde{y})\operatorname{ch}(\tilde{z})\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial z^2}[\tilde{a}_x\tilde{x}]+\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}[\tilde{a}_y\tilde{y}]\right)=0.$$

Упростим последнее уравнение, сгруппировав однородные члены.

$$\operatorname{ch}(\tilde{y})\operatorname{ch}(\tilde{z})\left[\operatorname{sh}(\tilde{x})\left(\frac{2D_x}{\tilde{a}_x}\left(k_1+\frac{\partial k_2}{\partial x}[\tilde{a}_y\tilde{y}]+\frac{\partial k_3}{\partial x}[\tilde{a}_z\tilde{z}]\right)-\frac{v_x}{\tilde{a}_x}\right)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{ch}(\tilde{x})D_x\left(\frac{\partial^2 k_2}{\partial x^2}[\tilde{a}_y\tilde{y}]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial x^2}[\tilde{a}_z\tilde{z}]\right)\right]+$$
$$+\operatorname{ch}(\tilde{x})\operatorname{ch}(\tilde{z})\left[\operatorname{sh}(\tilde{y})\left(\frac{2D_y}{\tilde{a}_y}\left(\frac{\partial k_1}{\partial y}[\tilde{a}_x\tilde{x}]+k_2+\frac{\partial k_3}{\partial y}[\tilde{a}_z\tilde{z}]\right)-\frac{v_y}{\tilde{a}_y}\right)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{ch}(\tilde{y})D_y\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2}[\tilde{a}_x\tilde{x}]+\frac{\partial^2 k_3}{\partial y^2}[\tilde{a}_z\tilde{z}]\right)\right]+$$
$$+\operatorname{ch}(\tilde{x})\operatorname{ch}(\tilde{y})\left[\operatorname{sh}(\tilde{z})\left(\frac{2D_z}{\tilde{a}_z}\left(\frac{\partial k_1}{\partial z}[\tilde{a}_x\tilde{x}]+\frac{\partial k_2}{\partial z}[\tilde{a}_y\tilde{y}]+k_3\right)-\frac{v_z}{\tilde{a}_z}\right)+\right.$$
$$\left.+\operatorname{ch}(\tilde{z})D_z\left(\frac{\partial^2 k_1}{\partial z^2}[\tilde{a}_x\tilde{x}]+\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}[\tilde{a}_y\tilde{y}]\right)\right]=0.$$

На основании полученного уравнения получим систему (8).

$$\begin{cases} k_1(t,y,z)+\dfrac{\partial k_2(t,x,z)}{\partial x}[y-y_0-v_y t]+\dfrac{\partial k_3(t,x,y)}{\partial x}[z-z_0-v_z t]=\dfrac{v_x}{2D_x}, \\ \dfrac{\partial^2 k_2(t,x,z)}{\partial x^2}[y-y_0-v_y t]+\dfrac{\partial^2 k_3(t,x,y)}{\partial x^2}[z-z_0-v_z t]=0, \\ \dfrac{\partial k_1(t,y,z)}{\partial y}[x-x_0-v_x t]+k_2(t,x,z)+\dfrac{\partial k_3(t,x,y)}{\partial y}[z-z_0-v_z t]=\dfrac{v_y}{2D_y}, \\ \dfrac{\partial^2 k_1(t,y,z)}{\partial y^2}[x-x_0-v_x t]+\dfrac{\partial^2 k_3(t,x,y)}{\partial y^2}[z-z_0-v_z t]=0, \\ \dfrac{\partial k_1(t,y,z)}{\partial z}[x-x_0-v_x t]+\dfrac{\partial k_2(t,x,z)}{\partial z}[y-y_0-v_y t]+k_3(t,x,y)=\dfrac{v_z}{2D_z}, \\ \dfrac{\partial^2 k_1(t,y,z)}{\partial z^2}[x-x_0-v_x t]+\dfrac{\partial^2 k_2(t,x,z)}{\partial z^2}[y-y_0-v_y t]=0. \end{cases} \tag{8}$$

Из этой системы получаем выражения для $k_1, \quad k_2, \quad k_3$:

$$k_1(t,y,z)=\frac{v_x}{2D_x}, \quad k_2(t,x,z)=\frac{v_y}{2D_y}, \quad k_2(t,x,y)=\frac{v_z}{2D_z}. \tag{9}$$

Запишем в частных производных второе уравнение системы (7), отвечающее за мнимую часть исходного уравнения.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - v_x k_1 - v_y k_2 - v_z k_3 + \alpha\rho_0^2 \mathrm{ch}^{-2}(\tilde{x})\mathrm{ch}^{-2}(\tilde{y})\mathrm{ch}^{-2}(\tilde{z}) + \beta +$$
$$+\frac{\partial k_1}{\partial t}[\tilde{a}_x\tilde{x}] - \frac{D_x}{a_x^2}\left(\mathrm{th}^2(\tilde{x}) - \mathrm{ch}^{-2}(\tilde{x})\right) + D_x\left(k_1 + \frac{\partial k_2}{\partial x}[\tilde{a}_y\tilde{y}] + \frac{\partial k_3}{\partial x}[\tilde{a}_z\tilde{z}]\right)^2 +$$
$$+\frac{\partial k_2}{\partial t}[\tilde{a}_y\tilde{y}] - \frac{D_y}{a_y^2}\left(\mathrm{th}^2(\tilde{y}) - \mathrm{ch}^{-2}(\tilde{y})\right) + D_y\left(\frac{\partial k_1}{\partial y}[\tilde{a}_x\tilde{x}] + k_2 + \frac{\partial k_3}{\partial y}[\tilde{a}_z\tilde{z}]\right)^2 +$$
$$+\frac{\partial k_3}{\partial t}[\tilde{a}_z\tilde{z}] - \frac{D_z}{a_z^2}\left(\mathrm{th}^2(\tilde{z}) - \mathrm{ch}^{-2}(\tilde{z})\right) + D_z\left(\frac{\partial k_1}{\partial z}[\tilde{a}_x\tilde{x}] + \frac{\partial k_2}{\partial z}[\tilde{a}_y\tilde{y}] + k_3\right)^2 = 0.$$

Подставив в последнее уравнение выражения (9) и домножив на $\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\mathrm{ch}^2(\tilde{z})$, получим:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{v_x^2}{4D_x} - \frac{v_y^2}{4D_y} - \frac{v_z^2}{4D_z} + \beta\right)\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\mathrm{ch}^2(\tilde{z}) + \alpha\rho_0^2 -$$
$$-\frac{D_x}{\tilde{a}_x^2}\mathrm{sh}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\mathrm{ch}^2(\tilde{z}) + \frac{D_x}{\tilde{a}_x^2}\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\mathrm{ch}^2(\tilde{z}) - \frac{D_y}{\tilde{a}_y^2}\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{sh}^2(\tilde{y})\mathrm{ch}^2(\tilde{z}) +$$
$$+\frac{D_y}{\tilde{a}_y^2}\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{z}) - \frac{D_z}{\tilde{a}_z^2}\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\mathrm{sh}^2(\tilde{z}) + \frac{D_y}{\tilde{a}_y^2}\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y}) = 0.$$

Используя тригонометрические тождества $\mathrm{ch}^2(\tilde{z})\left(\mathrm{sh}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y}) - \mathrm{ch}^2(\tilde{y})\right) \equiv$

$\equiv \mathrm{ch}^2(\tilde{z})\left(2\mathrm{sh}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y}) - \mathrm{ch}^2(\tilde{x})\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\right)$, $\alpha\rho_0^2 \equiv \alpha\rho_0^2\left(\mathrm{ch}^2(\tilde{x}) - \mathrm{sh}^2(\tilde{x})\right)\times$
$\times\left(\mathrm{ch}^2(\tilde{y}) - \mathrm{sh}^2(\tilde{y})\right)\left(\mathrm{ch}^2(\tilde{z}) - \mathrm{sh}^2(\tilde{z})\right)$ и сгруппировав однородные члены, получим следующее уравнение:

$$\mathrm{ch}^2(\tilde{x})\left(\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\left[\mathrm{sh}^2(\tilde{z})\left(\frac{2D_z}{\tilde{a}_z^2} - \alpha\rho_0^2\right) + \mathrm{ch}^2(\tilde{z})\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{v_x^2}{4D_x} - \frac{v_y^2}{4D_y} -\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{v_z^2}{4D_z} + \beta\right)\right] + \mathrm{sh}^2(\tilde{y})\left[\mathrm{ch}^2(\tilde{z})\left(\frac{2D_y}{\tilde{a}_y^2} - \alpha\rho_0^2\right) + \alpha\rho_0^2\mathrm{sh}^2(\tilde{z})\right]\right) + \qquad (10)$$
$$+\mathrm{sh}^2(\tilde{x})\left(\mathrm{ch}^2(\tilde{y})\left[\alpha\rho_0^2\mathrm{sh}^2(\tilde{z}) + \mathrm{ch}^2(\tilde{z})\left(\frac{2D_x}{\tilde{a}_x^2} - \alpha\rho_0^2\right)\right] + \alpha\rho_0^2\mathrm{sh}^2(\tilde{y})\right) = 0.$$

Так как уравнение (10) верно для любой точки (x, y, z) из рассматриваемой области, выразим из этого уравнения фазовый сдвиг $\varphi(t)$:

$$\left(\frac{2D_z}{\tilde{a}_z^2}-\alpha\rho_0^2\right)\left(\frac{2D_y}{\tilde{a}_y^2}-\alpha\rho_0^2\right)\left(\frac{2D_x}{\tilde{a}_x^2}-\alpha\rho_0^2\right)-$$

$$-\alpha\rho_0^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{v_x^2}{4D_x}-\frac{v_y^2}{4D_y}-\frac{v_z^2}{4D_z}+\beta\right)=0.$$

Отсюда получаем выражение для фазового сдвига $\varphi(t)$.

$$\varphi(t)=\left[\frac{1}{\alpha\rho_0^2}\left(\frac{2D_z}{\tilde{a}_z^2}-\alpha\rho_0^2\right)\left(\frac{2D_y}{\tilde{a}_y^2}-\alpha\rho_0^2\right)\left(\frac{2D_x}{\tilde{a}_x^2}-\alpha\rho_0^2\right)-\beta+\right.$$

$$\left.+\frac{v_x^2}{4D_x}+\frac{v_y^2}{4D_y}+\frac{v_z^2}{4D_z}\right]t+C_1=C_2t+C_1, \qquad (11)$$

где C_1 – действительная константа, обозначающая постоянную фазу во времени и пространстве.

В итоге аналитическое решение примет вид

$$U(t,x,y,z)=\rho_0\mathrm{ch}^{-1}(\tilde{x})\mathrm{ch}^{-1}(\tilde{y})\mathrm{ch}^{-1}(\tilde{z})\times$$

$$\times\exp\left[i\left(C_2\,t+\frac{v_x}{2D_x}[\tilde{x}\tilde{a}_x]+\frac{v_y}{2D_y}[\tilde{y}\tilde{a}_y]+\frac{v_z}{2D_z}[\tilde{z}\tilde{a}_z]+C_1\right)\right]. \qquad (12)$$

Также можно вычислить пространственные размеры солитона используя формулы: $\tilde{a}_x^2=\dfrac{2D_x}{\alpha\rho_0^2}$, $\tilde{a}_y^2=\dfrac{2D_y}{\alpha\rho_0^2}$, $\tilde{a}_z^2=\dfrac{2D_z}{\alpha\rho_0^2}$.

Заключение.

В данной работе получено аналитическое солитонное решения для трехмерного уравнения Гросса-Питаевского, которое описывает взаимодействие БЭК с внешним потенциалом. Благодаря этому, теперь есть возможность сравнить ранее полученные численные результаты по поиску солитонных решений в трехмерном уравнении ГП с аналитическим решением, что позволит оценить эффективность и точность применяемых численных методах.

Используя полученное решение, можно детально рассмотреть макроскопическую динамику конденсированного атомного облака в трехмерном внешнем параболическом потенциале, создаваемом магнитной ловушкой (возможный вид внешнего потенциала).

Как известно, после взаимодействия БЭК с потенциалом внешних сил (магнитная ловушка или пучок лазера), формируется не только основной солитон [1], но и отраженный солитон [2], который распространяется в обратном направлении, однако имеет такой же профиль. Поэтому можно использовать, полученное нами аналитическое решение не только для поиска основного солитонного решения, но и отраженного.

Список литературы.

1. Trofimov V. A., Rozantsev A. V. 2d soliton formation of BEC at its interaction with external potential // Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering. – Vol. 8497. – 2012. – P. 84970F.
2. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.
3. Laponin V. S. Search for soliton solutions in the three-dimensional Gross-Pitaevskii equation // Computational Mathematics and Modeling. — 2014. — Vol. 25, no. 3. — P. 306–314.
4. Laponin V. S., Savenkova N. P. Search for 2-d solitons in gross-pitaevskii equation // Computational Mathematics and Modeling. — 2014. — Vol. 25, no. 1. — P. 1–8.
5. Savenkova N. P., Laponin V. S. A numerical method for finding soliton solutions in nonlinear differential equations // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2013. — Vol. 37, no. 2. — P. 49–54.
6. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. – 234с.
7. Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., Troshchiev Yu.V. Modeling of vorticle objects created in gatchina discharge // IEEE Transactions on Plasma Science, 2012, V. 40(12), P. 3158–3161.
8. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Yu.V., Shuteev S.A., Skladchikov S.A., Vinke E.E., Gusein-zade N.G. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. II. The study of vortex formation process // Bulletin of the Lebedev Physics Institute, 2011, V. 38, P. 275-282.
9. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Shuteev S.A., Skladchikov C.A., Maslov A.K., Elensky V.G. Computer simulation of vortex self-maitenance and amplification // MOSCOW UNIVERSITY PHYSICS BULLETIN, 2013, V. 68, № 4, P. 317-319.