П.Д. Лебедев, А.А. Успенский

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ *

Предложены аналитические и численные алгоритмы построения функции оптимального результата и ее множеств Лебега для задачи управления по быстродействию с круговой индикатрисой скоростей. Подход к построению решения задачи быстродействия использует по существу специфику динамики управляемой системы. Круговая вектограмма возможных скоростей позволяет трактовать сечения множества управляемости как волновые фронты, источник которых распределен равномерно на границе целевого множества. Разработаны процедуры аналитического и численного построения эволюции волновых фронтов на основе априорного (исходя из геометрии границы целевого множества) выделения множеств их негладкости. Существенным элементом в конструкциях является функция расстояния до множества. Изучены дифференциальные свойства этой функции, выявлены многообразия, на которых она теряет гладкость. Предложенные алгоритмы конструирования волновых фронтов представляют самостоятельный интерес, позволяя исследовать геометрию множеств, вычислять их меру невыпуклости. Полученные результаты оказываются полезными также при вычислении эйконала в геометрической оптике, при изучении решения волнового уравнения.

1. Введение

Пусть M – замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^2$, а $\mathbf{x}$ точка в $\mathbf{R}^2$ с координатами (x,y). Под проекцией $\pi_M(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$ на M понимаем ближайшую к $\mathbf{x}$ в евклидовой метрике точку из M.

Определение 1. Расстоянием от точки $\mathbf{x}$ до множества M назовем величину

$$\rho(\mathbf{x},M)=\inf_{A\in M}\|\mathbf{x}-A\|,$$

где $\|\mathbf{x}-A\|$ норма вектора $\mathbf{x}-A$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №05-01-00601, гранта поддержки ведущих научных школ №НШ-8512.2006.1 и регионального гранта РФФИ/ПСО №07-0196085

Для замкнутого множества M из определения проекции следует

$$\rho(\mathbf{x}, M) = \|\mathbf{x} - \pi_M(\mathbf{x})\|. \tag{1.1}$$

Если точка $\mathbf{x}$ не принадлежит замкнутому множеству M, то ее проекции лежат на его границе ∂M (см. [1]).

Определение 2. Биссектрисой $L(M)$ множества M называется множество всех точек из его дополнения до плоскости, которые имеют не менее двух проекций на множество M:

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus M : \exists A_1 = \pi_M(\mathbf{x}), \exists A_2 = \pi_M(\mathbf{x}), A_1 \neq A_2\}$$

Биссектриса является частным случаем множества симметрии [2]. Топологические особенности множеств симметрии исследованы в частности В.Д. Седых (см. [3]). Им изучались схожие многообразия, называемые “middle point set” и “medial axe”. Если M – выпуклое множество, то из теоремы Моцкина (см. [1]) следует $L(M) = \varnothing$. Если M – невыпуклое множество, его биссектриса позволяет оценивать меру невыпуклости M [4]. Во многих случаях задача нахождения функции расстояния от точки до множества M сводится к построению его биссектрисы $L(M)$ (см. [5]). В точках биссектрисы функция $\rho(\mathbf{x}, M)$ теряет гладкость, что соответствует изломам проходящих через них волновых фронтов [6].

В приводимых ниже конструкциях биссектриса множества и функция расстояния имеют ключевое значение.

2. Постановка задачи. Функция расстояния как минимаксное решение уравнения в частных производных первого порядка

Рассматривается задача Коши-Дирихле для уравнения типа Гамильтона-Якоби:

$$\min_{\nu:\|\nu\|\le 1}\left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 1 = 0, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.2}$$

Минимаксное решение [7] задачи (2.1)-(2.2) является функцией оптимального результата (см. [7], стр. 264) для задачи быстродействия

$$\dot{\mathbf{x}} = \nu,$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \le 1$, а целью является замкнутое множество $M \subset \mathbf{R}^2$, граница ∂M которого равна Γ. В теории дифференциальных игр [8–9] уравнение (2.1) называется уравнением Айзекса-Беллмана. Биссектриса целевого множества – это рассеивающая линия. Из каждой ее точки $B \in L(M)$ выходят две или более оптимальные траектории – отрезки $[B, \pi_M(B)]$ (см. [9], стр. 196). Нахождение биссектрисы $L(M)$ является необходимым элементом при построении решения задачи быстродействия для случая простой круговой динамики. При этом структура биссектрисы как объединения нуль- и одномерных многообразий определяется геометрией границы целевого множества. В настоящей работе в качестве целевого множества рассматривается замкнутое плоское множество, граница которого является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения.

Наряду с задачей (2.1)–(2.2) рассмотрим задачу:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-1=0, \tag{2.3}$$

$$u\big|_{\Gamma}=0. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) в геометрической оптике [10] относят к уравнениям эйконала. Эйконал $u=u(x,y)$ – функция от двух переменных, линии уровня которой совпадают с волновыми фронтами. Модуль разности значений гладкого эйконала равен оптической длине луча, соединяющего две точки. Краевое условие (2.4) определено на кривой Γ – границе некоторой области $M\subset\mathbf{R}^2$. Здесь считаем, что источник волны равномерно распределен вдоль гладкой кривой Γ. Нетрудно видеть, что если существует классическое (дифференцируемое) решение $u=u(x,y)$ задачи (2.3)–(2.4), то функция противоположного знака формально также удовлетворяет условиям задачи (2.3)–(2.4).

Исходя из содержательных аспектов и постулатов геометрической оптики, Кружков С.Н. ввел [11] так называемое главное (фундаментальное) решение задачи (2.3)–(2.4), определяемое единственным образом. Фундаментальным решением задачи (2.3)–(2.4) является функция $u(\mathbf{x})=-\rho(\mathbf{x},M)$. Подробно взаимосвязь классических и обобщенных решений задач (2.1)–(2.2) и (2.3)–(2.4) изложена в монографии [7].

Теорема 1. Функция $u(\mathbf{x})=\rho(\mathbf{x},M)$ является минимаксным решением задачи (2.1)–(2.2) на открытом множестве $G=\mathbf{R}^2\setminus M$.

Доказательство. Перепишем систему (2.1)–(2.2) в виде

$$F\big(\mathbf{x},u(\mathbf{x}),Du(\mathbf{x})\big)=0, \tag{2.5}$$

$$u\big|_{\Gamma}=0. \tag{2.6}$$

В формуле (2.5) мы обозначили:

$Du(\mathbf{x})=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ – градиент функции $u(\mathbf{x})$,

$F\left(\mathbf{x},u(\mathbf{x}),Du(\mathbf{x})\right)=-\left\|Du(\mathbf{x})\right\|+1$ – левая часть уравнения (2.1).

Функция $u(\mathbf{x})=\rho\left(\mathbf{x},M\right)$ удовлетворяет краевому условию (2.6), так как для любой точки $\mathbf{x}\in\partial G=\partial M$ из определения проекции следует $\rho\left(\mathbf{x},M\right)=0$.

Функция расстояния до множества непрерывна и удовлетворят условию Липшица с константой $L=1$. Непрерывная функция $u(\mathbf{x})$, для которой выполняется условие (2.6), является минимаксным решением задачи (2.5)–(2.6), если она есть одновременно верхнее и нижнее решение данной задачи (см. [7]).

Функция $u(\mathbf{x})$ – нижнее решение задачи (2.5)–(2.6), если она удовлетворяет условию (L5) из монографии [7]:

$$F\left(\mathbf{x},u(\mathbf{x}),s\right)\le 0 \tag{2.7}$$

при всех $\mathbf{x}\in G$ и $s\in D^{-}u(\mathbf{x})$, где $D^{-}u(\mathbf{x})$ – субдифференциал функции $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$.

Функция $u(\mathbf{x})$ – верхнее решение задачи (2.5)–(2.6), если она удовлетворяет условию (U5) из монографии [7]:

$$F\left(\mathbf{x},u(\mathbf{x}),s\right)\ge 0 \tag{2.8}$$

при всех $\mathbf{x}\in G$ и $s\in D^{+}u(\mathbf{x})$, где $D^{+}u(\mathbf{x})$ – супердифференциал функции $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$.

В точках дифференцируемости функции $u(\mathbf{x})$ одновременное выполнение условий (2.7) и (2.8) означает выполнение равенства (2.5). Функция расстояния до множества, определенная по формуле (1.1), дифференцируема во всех точках $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2\setminus M$, имеющих ровно одну проекцию $\pi_M(\mathbf{x})$ на множество M (см. [12], стр. 243), ее градиент

$$Du(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{x}-\pi_M(\mathbf{x})}{u(\mathbf{x})}. \tag{2.9}$$

Из формулы (2.9) и определения проекций видно, что в точках дифференцируемости $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2\setminus\left\{M\cup L(M)\right\}$ для градиента выполняется равенство

$$\left\|Du(\mathbf{x})\right\|=1,$$

а значит и уравнение (2.5).

В точке $\mathbf{x}_*$, имеющей более одной проекции $\pi_M(\mathbf{x}_*)$ на множество M, то есть когда $\mathbf{x}_*\in L(M)$, функция $u(\mathbf{x})$ не дифференцируема. Для ее производных по направлению $g\in\mathbf{R}^2$ выполняется равенство (см. [12], стр. 244):

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_*)}{\partial g}=\min_{h\in\Psi}\left\langle g,h\right\rangle, \tag{2.10}$$

где

$$\Psi = \mathrm{co}\left\{ \frac{\mathbf{x}_* - A}{u(\mathbf{x}_*)} : A = \pi_M(\mathbf{x}_*) \right\}.$$

Здесь и далее $\langle g,h \rangle$ – скалярное произведение векторов g и h, $\mathrm{co}\Omega$ – выпуклая оболочка множества Ω.

Равенство (2.10) и выпуклость множества Ψ означают, что функция $u(\mathbf{x})$ супердифференцируема в точке $\mathbf{x}_*$ и $D^+u(\mathbf{x}_*) = \Psi$. Субдифференциал $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_*$ – пустое множество и условие (U5) выполняется. Стало быть $u(\mathbf{x})$ – верхнее решение задачи (2.5)–(2.6).

Покажем, что выполняется условие (L5). Из формулы (2.10) следует, что супердифференциал $D^+u(\mathbf{x}_*)$ функции $u(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_*$ – это выпуклая оболочка Ψ множества, состоящего из точек, лежащих на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда для произвольного вектора $s \in D^+u(\mathbf{x}_*)$ выполняется оценка нормы:

$$\|s\| \le 1.$$

А отсюда получаем оценку для значений функции $F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), s)$ при любых $\mathbf{x}$, $s \in D^+u(\mathbf{x})$:

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), s) = 1 - \|s\| \ge 0,$$

что совпадает с неравенством (2.8).

Таким образом, мы показали, что функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ является минимаксным решением задачи (2.5)–(2.6), а значит и задачи (2.1)–(2.2). При этом на множестве $L(M)$ функция $u(\mathbf{x})$ является недифференцруемой.

3. Построение биссектрисы

Построение биссектрисы $L(M)$ требует нахождение проекций точек биссектрисы на множество M.

Определение 3. Несовпадающие точки A_1 и A_2 границы ∂M множества M, являющиеся проекциями точки B биссектрисы $L(M)$ на это множество, называются симметричными точками. При этом B называется точкой, порожденной парой (A_1, A_2).

Лемма 1. Если точки $A_1, A_2 \in \partial M$ являются симметричными и порождают точку $B \in L(M)$, то A_1 и A_2 принадлежат границе ∂D_* некоторой компоненты связности D_* дополнения $D = \mathrm{co}M \setminus M$ множества M до его выпуклой оболочки.

Доказательство. A_1 и A_2 не являются внутренними точками D. Точка B, как равноудаленная от A_1 и A_2, лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $[A_1, A_2]$. По условию A_1 и A_2 ближайшие к B точки во множестве M. Следовательно, точки отрезка $[A_1, A_2]$, кроме его концов, не принадлежат множеству M, так как они лежат ближе к B, чем A_1 и A_2. Но $[A_1, A_2] \subset \mathrm{co}M$, так как $A_1, A_2 \in M$. Значит, $[A_1, A_2] \setminus (\{A_1\} \cup \{A_2\}) \subset D_*$, где D_* компонента связности множества $D = \mathrm{co}M \setminus M$. Отсюда вытекает, что $A_1, A_2 \in \partial D_*$, что и требовалось доказать.

Выведем формулы для нахождения симметричных точек и точек биссектрисы. Ограничимся рассмотрением случая, когда кривая Γ, совпадающая с ∂M, непрерывно склеена из конечного числа графиков дважды дифференцируемых функций.

Пусть пара точек $(A_1, A_2) \subset \Gamma$ лежит на гладком участке кривой Γ и в окрестности каждой точки Γ представима в виде графика $\mathrm{gr}\, f(x)$ функции $f(x)$. Чтобы пара (A_1, A_2) порождала точку биссектрисы, необходимо, чтобы отрезки $[A_1, B]$ и $[A_2, B]$, где $B = B(x_*, y_*)$ – точка пересечения нормалей [13], построенных к Γ в точках $A_1 = A_1(x_1, y_1)$ и $A_2 = A_2(x_2, y_2)$, были равными по длине. $B = B(x_*, y_*)$ Тогда будет точкой биссектрисы. Связь между проекциями A_1 и A_2 точки биссектрисы выражается равенством (в выбранной системе координат):

$$\operatorname{arctg} y_1' + \operatorname{arctg} y_2' = 2 \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{3.1}$$

Здесь и далее обозначаем для значений функции и $f(x)$ ее производных: $y_i = f(x_i), y_i' = f'(x_i)$, $i = 1,2$. Условие (3.1) в общем случае не является достаточным, так как во множестве M могут быть точки, лежащие к B ближе, чем A_1 и A_2.

Если две точки $A_1 = A_1(x_1, y_1)$ и $A_2 = A_2(x_2, y_2)$, лежащие на гладких участках Γ, порождают точку биссектрисы $B = B(x_*, y_*)$, то ее координаты:

$$x_* = \frac{y_2'(x_1 + y'y_1) - y_1'(x_2 + y_2'y_2)}{y_2' - y_1'}, \tag{3.2}$$

$$y_* = \frac{x_2 + y_2'y_2 - x_1 - y'y_1}{y_2' - y_1'}. \tag{3.3}$$

В формулах (3.2)–(3.3) подразумевается, что нормали к Γ в точках A_1 и A_2 не параллельны друг другу, иначе их знаменатели будут равны нулю.

4. Асимптотика биссектрисы

Для одного класса невыпуклых множеств установлено наличие асимптот биссектрис и выписано уравнение асимптоты в явном виде.

Теорема 2. Пусть множество M – односвязное и невыпуклое, его дополнение $D = \mathrm{co}\, M \setminus M$ до выпуклой оболочки является ограниченным односвязным множеством. Тогда биссектриса $L(M)$ имеет асимптоту.

Доказательство. Поскольку множество M односвязное и невыпуклое, то часть Π границы ∂D множества D не входит в границу ∂M множества M. Π отделяет D от дополнения $\mathbf{R}^2 \setminus \mathrm{co}\, M$. Из односвязности множеств M и D и ограниченности множества D следует, что пересечение $\partial D \cap \partial(\mathrm{co}\, M)$ – это отрезок, причем его вершины A_1^* и A_2^* (см. рис. 1) принадлежат ∂M (см. [14]). Из леммы 1 следует, что проекции точек биссектрисы могут лежать только в ∂D.

Покажем, что при стремлении точки B биссектрисы в бесконечность одна из ее проекций приближается к точке A_1^*, а другая к точке A_2^*. Действительно, на отрезке $\left[A_1^*, A_2^*\right]$ нет других точек множества M, кроме его концов, а M замкнуто. Поэтому точки из ∂M находятся в малой окрестности $\left[A_1^*, A_2^*\right]$ только тогда, когда они находятся в малой окрестности одной из его вершин:

$$\forall A \in \partial M, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$$

$$\left(\left(\rho\left(A, \left[A_1^*, A_1^*\right]\right) \le \delta\right) \Rightarrow \left(\left\|A - A_1^*\right\| \le \varepsilon\right) \vee \left(\left\|A - A_2^*\right\| \le \varepsilon\right)\right)$$

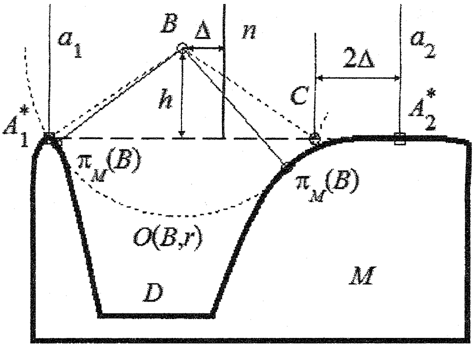


Рис. 1

Рассмотрим поведение точки B биссектрисы $L(M)$, когда расстояние от нее до множества M стремится к бесконечности. При этом стремится к бесконечности и расстояние $h=\rho\left(B,\left[A_1^*,A_2^*\right]\right)$ от точки B до отрезка $\left[A_1^*,A_2^*\right]$.

Точка B биссектрисы $L(M)$, лежащая вне $\operatorname{co} M$, может находиться только в полосе между перпендикуляром a_1, построенным к отрезку $\left[A_1^*,A_2^*\right]$ в точке A_1^*, и перпендикуляром a_2, построенным к нему в точке A_2^*. Это следует из того, что если точка B находится вне пределов этой полосы и не лежит при этом в D, то все отрезки $[A,B]$, соединяющие B с точками из $A\in(\partial D\cap\partial M)$, будут либо длиннее, чем отрезок, соединяющий B с ближайшей из точек $\left\{A_1^*,A_2^*\right\}$, либо пересекать множество M хотя бы в одной точке границы ∂M, не входящей в ∂D (см. рис. 1). Следовательно, двух различных проекций на множество M точка B в этом случае иметь не может.

Покажем, что расстояние $\rho\left(\pi_M(B),\left[A_1^*,A_2^*\right]\right)$ от проекций точки биссектрисы B до отрезка $\left[A_1^*,A_2^*\right]$ стремится к нулю при стремлении h к бесконечности. Из неравенства треугольника

$$\left\|B-\pi_M(B)\right\|\le\rho\left(B,\left[A_1^*,A_2^*\right]\right)+h,$$

отсюда получаем:

$$\rho\left(B,\left[A_1^*,A_2^*\right]\right)\le\left\|B-\pi_M(B)\right\|-h.$$

Для точек $B \in L(M) \setminus \operatorname{co} M$, так как они находится в полосе между a_1 и a_2, справедливо:

$$\left\|B - A_1^*\right\| \le \sqrt{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2 + h^2}, \ \left\|B - \pi_M(B)\right\| \le \left\|B - A_1^*\right\|,$$

$$\rho\left(\pi_M(B), \left[A_1^*, A_2^*\right]\right) \le \sqrt{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2 + h^2} - h.$$

Тогда

$$\lim_{h\to\infty} \rho\left(\pi_M(B), \left[A_1^*, A_2^*\right]\right) \le \lim_{h\to\infty}\left(\sqrt{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2 + h^2} - h\right) =$$

$$= \lim_{h\to\infty} \frac{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2 + h^2 - h^2}{\sqrt{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2 + h^2} + h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2}{\sqrt{\left\|A_1^* - A_2^*\right\|^2 + h^2} + h} = 0.$$

Таким образом, для проекций $\pi_M(B)$ точек биссектрисы выполняется соотношение

$$\lim_{h\to\infty} \rho\left(\pi_M(B), \left[A_1^*, A_2^*\right]\right) = 0. \qquad (4.1)$$

Предел (4.1) означает, что при $h \to \infty$ проекции точек биссектрисы приближаются либо к A_1^*, либо A_2^*. Поскольку у точек биссектрисы по определению не менее двух проекций, то одна из проекций стремится к точке A_1^*, а другая к A_2^*.

Рассмотрим теперь расстояние от точки B до срединного перпендикуляра n к отрезку $\left[A_1^*, A_2^*\right]$. Без ограничения общности предположим, что находится от n с той же стороны, что и точка A_1^*. Оценим расстояние $\Delta = \rho(B, n)$ от точки биссектрисы B до прямой n. Построим окружность $O(B, r)$ с центром в точке B и радиусом $r = \left\|B - A_1^*\right\|$ (см. рис. 1). Поскольку $\left\|B - A_1^*\right\| \ge \rho(B, M)$, то все проекции точки B на множество M лежат либо на окружности $O(B, r)$, либо внутри ограниченного ею круга. Данная окружность пересекает отрезок $\left[A_1^*, A_2^*\right]$ в точке A_1^* и в точке C, которая находится от точки A_2^* на расстоянии 2Δ. Поэтому одна из проекций $\pi_M(B)$ находится от точки A_2^* на расстоянии тоже не меньшем, чем 2Δ. Но мы уже показали, что для одной из проекций точки B при $h \to \infty$ расстояние до точки A_2^* стремится к нулю. Получаем:

$$0 \le 2\Delta \le \left\|\pi_M(B) - A_2^*\right\|, \ \lim_{h\to\infty} \left\|\pi_M(B) - A_2^*\right\| = 0,$$

а отсюда

$$\lim_{h\to\infty} \rho(B,n) = 0. \qquad (4.2)$$

Выражение (4.2) означает, что при стремлении точки $B \in L(M)$ в бесконечность расстояние между ней и срединным перпендикуляром n к отрезку $\left[A_1^*, A_2^*\right]$ стремится к нулю. Стало быть, прямая n есть асимптота биссектрисы $L(M)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 позволяет находить уравнение асимптоты l к биссектрисе $L(M)$ для множества M, отвечающего условиям данной теоремы. Это прямая, являющая срединным перпендикуляром к отрезку

$$\left[A_1^*, A_2^*\right] = \partial(\mathrm{co}\, M) \cup \partial(\mathrm{co}\, M \setminus M),$$

то есть

$$\left\langle \mathbf{x} - \left(A_1^* + A_2^*\right)/2, A_1^* - A_2^* \right\rangle = 0, \qquad (4.3)$$

где $\mathbf{x} \in l$.

5. Примеры аналитического и численного построения решения

Приведем результаты моделирования функции оптимального результата для задачи быстродействия с круговой индикатрисой скоростей и ее множеств Лебега. Основным элементом при конструировании является биссектриса целевого множества, которая вычисляется с помощью формул (3.1)–(3.3).

Пример 1. В качестве цели M примем подграфик функции $y = x^2$. Здесь кривая Γ в задаче (2.1)–(2.2) – парабола $\Gamma = \left\{(x,y): y = x^2\right\}$, а область определения минимаксного решения $u(x,y)$ – $G = \left\{(x,y): y > x^2\right\}$.

Биссектриса $L(M)$ в данном примере – это луч на оси ординат:

$$L(M) = \{(x,y): x = 0, y > 0.5\}.$$

Знание биссектрисы позволяет сформировать функцию $u(x,y)$ суть расстояние от точки (x,y) множества G до параболы Γ:

$$u(x,y) = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - x_p^2)^2},$$

где x_p – ордината проекции $\left(x_p, x_p^2\right)$ точки (x,y) на множество M, вычисляемая по формуле:

$$
x_p = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x}{4} + \sqrt{\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(2y-1)^3}{216}}} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{4} - \sqrt{\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(2y-1)^3}{216}}}, \; y > x^2, \, y \le E(x); \\ -\dfrac{2y-1}{3} \cos \dfrac{1}{3} \left(\arccos \dfrac{-3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}} \right), x \le 0, y > x^2, \, y > E(x); \\ \dfrac{2y-1}{3} \cos \dfrac{1}{3} \left(\arccos \dfrac{-3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}} \right), x > 0, \, y > x^2, y > E(x); \end{cases}
$$

где $E(x) = 0.5 + 0{,}5\sqrt[3]{13.5x^2}$, кривая $\Xi = \{(x,y) : y(x) = E(x)\}$ является эволютой [13] параболы.

Биссектриса $L(M)$ и линии уровня Φ функции $u(x,y)$ (волновые фронты) с шагом $h_\rho = 0.25$ представлены на рис. 2.

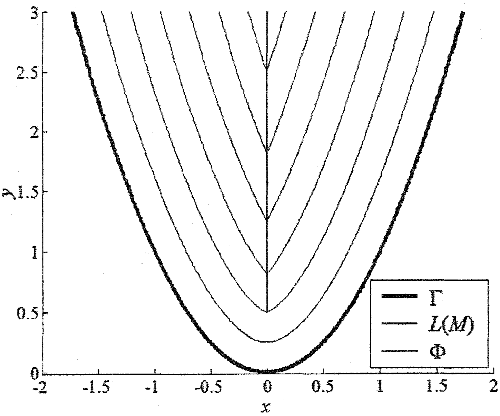


Рис. 2

В точках биссектрисы волновые фронты Φ имеют изломы, а в остальных точках множества G они гладкие.

Минимаксное решение $u(x,y)$ задачи (2.1)–(2.2) представлено на рис. 3. Его непрерывное продолжение на множество M принимается тождественно равным нулю.

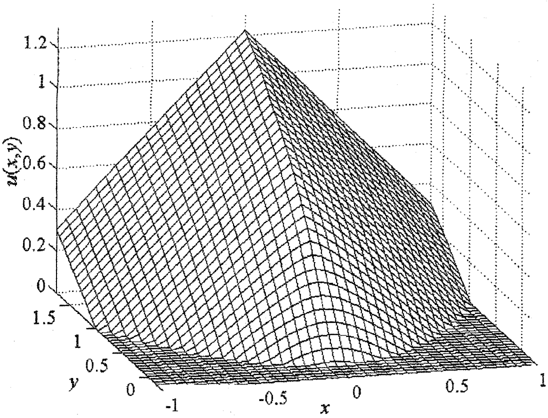


Рис. 3

Пример 2. В качестве множества M выбрано множество – $M=\left\{(x,y): y^2 \le x^3+4x+4\right\}$. Кривая Γ в задаче (2.1)–(2.1) – $\Gamma=\left\{(x,y): y^2 = x^3+4x+4\right\}$, а область определения минимаксного решения $u(x,y)$ – $G=\left\{(x,y): y^2 > x^3+4x+4\right\}$.

Отыскание биссектриса и построение функции $\rho\big((x,y),M\big)$ в аналитическом виде не представляется возможным. С помощью формул (3.1)–(3.3) найдено численное решение. Биссектриса $L(M)$ и линии уровня Φ функции $u(x,y)$ с шагом $h_\rho = 0.6$ представлены на рис. 4.

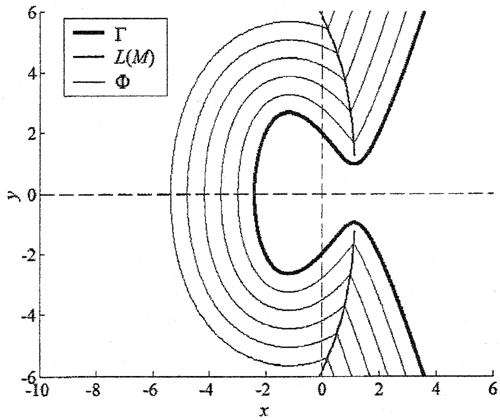


Рис. 4

Функция $u(x,y)$ представлена на рис. 5.

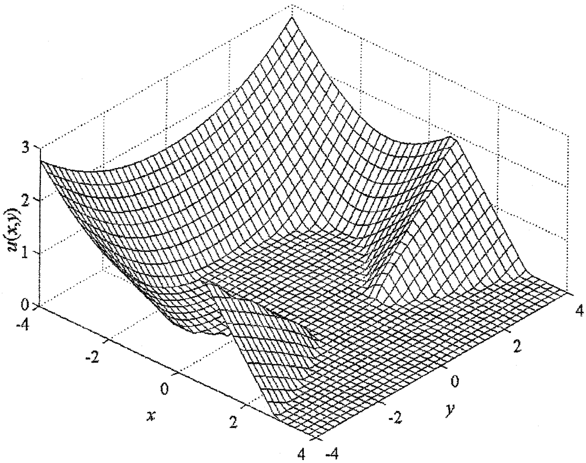


Рис. 5

Пример 3. В качестве множества M, удовлетворяющего условиям теоремы 2, возьмем подграфик функции

$$f(x)=\begin{cases}-7.5x^4-13x^3-4.5x^2, x\le 0,\\ -6x^4+10x^3-3x^2, x>0.\end{cases}$$

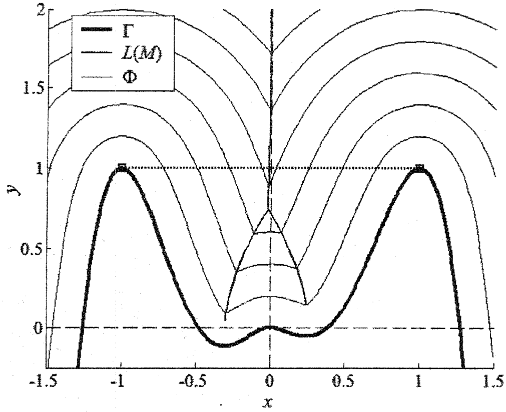
Здесь $\Gamma=\{(x,y): y=f(x)\}$, а область определения минимаксного решения $u(x,y)$ – $G=\{(x,y): y^2>f(x)\}$.

Дополнение $D=\operatorname{co}M\setminus M$ – ограниченное множество, а у отрезка $\left[A_1^*,A_2^*\right]=\partial(\operatorname{co}M)\cup\partial D$ координаты вершин: $A_1^*=(-1,1)$, $A_2^*=(1,1)$. Из (4.3) следует, что прямая $x=0$ является асимптотой биссектрисы $L(M)$.

Биссектриса $L(M)$ и линии уровня Φ функции $u(x,y)$ с шагом $h_\rho=0.2$ представлены на рис. 6. Точки A_1^* и A_2^* на рис. 6 выделены маркерами, отрезок $\left[A_1^*,A_2^*\right]$ – линией из точек, асимптота l биссектрисы $L(M)$ совпадают с осью ординат.

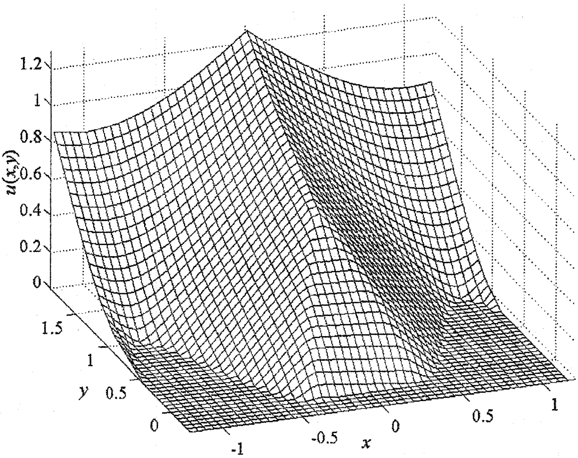
График функции $u(x,y)$ представлена на рис. 7.

Заметим, что на рисунках 3, 5 и 7 в точках биссектрисы $L(M)$ четко просматривается излом функции $u(x,y)$.



Γ
L(M)
Φ
2
1.5
1
0.5
0
y
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x

Рис. 6



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
u(x,y)
1.5
1
y
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1
x

Рис. 7.

Литература

1. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. – 335 с.
2. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. – 262 с.
3. *Sedykh V.D.* On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in $\mathbf{R}^k$. Advanced Studies in Pure Mathematics 43, 2006. Singularity Theory and Its Applications, pp. 401-419.
4. *Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.* α-множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 2004. – 62 с.: 38 ил. – Библиогр.: 7 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004
5. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Труды 9-ой Международной Четаевской конференции, 2007, Т. 5, С. 224-236
6. *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов // М.: «Фазис», 1996. – 334 с.
7. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. – 336 с.
8. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. – 456 с.
9. *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. – 479 с.
10. *Слюсарев Г.Г.* Геометрическая оптика. Издательство Академии наук СССР, 1946. – 332 с.
11. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала, I. Матем. сборник, Т. 98, Вып. 3, С. 450-493
12. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация – М.: Наука, 1981. – 384 с.
13. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал, УРСС, 2003. – 432 с.
14. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. – 238 с.