

*М.Г. Лебедев, В.В. Ситник*

## **К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С БЕСКОНЕЧНЫМИ ГРАДИЕНТАМИ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>**

### **Введение**

Многие газодинамические течения сопровождаются появлением особенностей в поле течения. В случае сверхзвуковых течений эти особенности могут представлять собой разрывы в распределениях параметров газа и иметь значительную протяженность; к таким особенностям относятся ударные волны и поверхности контактного разрыва. В случае дозвуковых течений, описываемых эллиптическими уравнениями, возникающие особенности являются локальными и могут представлять собой разрывы производных в распределениях газодинамических параметров в отдельных точках. Такие разрывы могут возникать в точке торможения затупленного тела, имеющего бесконечную кривизну на оси симметрии (степенное тело, см. [1, 2]); в этом случае, однако, терпящая разрыв производная остается конечной. С бесконечными производными газодинамических параметров (скорости, давления) приходится иметь дело в задаче обтекания тел с изломом образующей контура в звуковой точке (см. ниже), а также в сходной по постановке задаче о соударении струи конечной ширины с достаточно протяженной преградой [3].

При численном решении подобных задач возникает ряд трудностей при использовании разностных методов решения. Действительно, любой разностный метод, основанный на замене производных, то есть отношений бесконечно малых дифференциалов, отношениями конечных разностей, предполагает известную гладкость искомого решения, которая как раз и нарушается в особых точках. Различные пути к устранению этого противоречия были намечены, например, в [1, 2].

Первый, теоретически наиболее обоснованный подход состоит в выделении существующей особенности в поле течения, построении в ее окрестности асимптотического решения и сращивания асимптотического и численного решений. Недостатком этого подхода может быть сложность и громоздкость алгоритма численного решения.

Второй подход заключается в использовании схем сквозного счета, когда окрестность особенности покрывается достаточно густой разност-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00116).

ной сеткой, после чего задача решается так же, как и при отсутствии особенностей в поле течения. Особенность при этом получается автоматически, в виде резкого изменения всех или некоторых параметров течения. Недостатком этого подхода является потребность в значительных вычислительных ресурсах.

Наконец, третий подход состоит в построении последовательности задач, не включающих никаких особенностей, но имеющих искомую задачу с особенностью своим пределом. Так, при решении задачи об обтекании тела с особенностью (например, изломом) контура всегда можно построить последовательность гладких контуров, которые в пределе дают заданный контур. Тогда решение задачи для одного из контуров, близких к предельному, но еще гладкому, принимается за решение исходной задачи.

В семидесятые годы прошлого века, когда были опубликованы работы [1, 2], ресурсы вычислительной техники не позволяли в полной мере реализовать второй подход (метод сквозного счета). Более того, некоторые очевидные неудачи в его применении (можно назвать, например, работу [4], где при решении задачи об обтекании контура с изломом в звуковой точке, были получены результаты, несовместимые с физическими представлениями о течении в точке излома) вызывали настороженность перед этим подходом. В то же время можно назвать большое число работ, в которых вполне достоверные результаты были получены с использованием третьего подхода (собственно, к ним относятся многие данные, полученные в цитированных работах [1, 2]).

За прошедшие десятилетия положение существенно изменилось. Многократно возросшие возможности вычислительной техники и новые методы программирования, связанные, в частности, с проведением параллельных вычислений на компьютерных комплексах, привели к тому, что именно метод сквозного счета стал наиболее действенным инструментом при решении подобных задач. Тем не менее, опасности, связанные с его применением, в частности, сложности с интерпретацией получаемых результатов, не исчезли вполне. Поэтому данный подход нуждается в периодическом тестировании на задачах различных классов, которое может заключаться в сопоставлении с решениями, которые можно считать достоверными, а также с экспериментальными данными. Например, сравнение результатов, полученных методами сквозного счета, с более точными решениями, полученными с выделением разрывов, проводилось в работе [5] для случая конических течений.

Авторы данной работы, приступая к численному моделированию проблем взаимодействия волновых фронтов с массивами растительности при помощи известного конечно-разностного метода С.К. Годунова [6], поставили целью провести предварительное тестирование указанного ме-

тогда на задаче сверхзвукового обтекания тел с плоской носовой частью. С этой целью полученные методом сквозного счета численные решения сравниваются с решениями, полученными с выделением особенности в угловой точке при помощи асимптотического решения [7], а также с экспериментальными данными. Заметим, что метод сквозного счета автоматически выстраивает все особенности в поле течения, включая не только особенность в угловой точке, но и поверхности сильного разрыва.

## 1. Решение в окрестности угловой звуковой точки

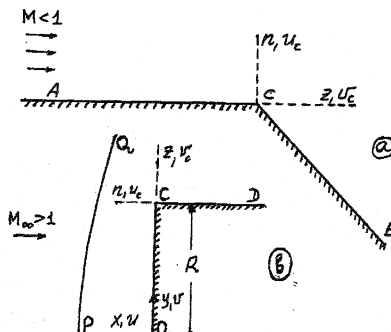


Рис. 1

Пусть дозвуковой равномерный поток газа течет вдоль плоской поверхности  $AB$ , имеющей излом в точке  $C$  (рис. 1а). Картина обтекания излома зависит от отношения давлений в бесконечно удаленных точках  $A$  и  $B$ : если  $p_B/p_A < \pi_*$ , где  $\pi_*$  — значение газодинамической функции давления при числе Маха, равном единице, то, согласно К. Гудерлею [7], в угловой точке осуществляется течение с переходом

через скорость звука, локально совпадающее с течением Прандтля-Майера, начинающимся с  $M = 1$ .

Асимптотическое решение, описывающее течение в окрестности точки  $C$ , было построено в работе [7] для случая, изображенного на рис. 1а. В более поздних работах [8, 9] были построены решения и высших порядков, учитывающие эффекты завихренности течения, его трехмерности, а также искривленности обтекаемой поверхности. Мы, однако, ограничимся рассмотрением решения первого порядка [7], имея в виду, что наша конечная цель состоит в его сопряжении с некоторым численным решением, так или иначе обладающим определенной погрешностью. При этом будем следовать изложению и обозначениям, введенным в [8].

Согласно [7, 8], решение для компонент скорости  $u_c, v_c$  в окрестности угловой точки  $C$  (рис. 1а) описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} u_c &= a_*[(3p-2)g - p\zeta g]n^{3p-3} \\ v_c &= a_*[1 + (\gamma+1)^{-1/3}fn^{2p-2}] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $z, n$  – локальная декартова система координат с началом в точке  $C$  (рис. 1а),  $\zeta$  – автомодельная переменная, определяемая соотношением

$$\zeta = (\gamma + 1)^{-1/3} z n^{-p}, \quad (1.2)$$

а функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f' = \frac{(3p-3)(3p-2)g - 5p(p-1)\zeta f}{f - p^2\zeta^2}, \quad g' = f. \quad (1.3)$$

В уравнениях (1.1) – (1.3) постоянная  $p$  имеет значение  $p = 5/4$ ; в (1.1)  $a_*$  – критическая скорость звука и  $\gamma$  – показатель адиабаты.

При  $\zeta < 0$ ,  $|\zeta| \gg 1$  решение системы (1.3) можно построить в виде ряда

$$g = (-\zeta)^{3-2/p} \sum_{i=0}^{\infty} A_i (-\zeta)^{-2i/p}, \quad f = g'. \quad (1.4)$$

В (1.4)  $A_0$  – произвольная постоянная, а все остальные  $A_i$  определяются через  $A_0$  при помощи конечных формул; так  $A_1 = p^{-3}(3p-2)^2(1-p)A_0$ . Выражения для остальных  $A_i$  можно найти в [8, (формулы (33))].

Случай  $\zeta = -\infty$ , очевидно, соответствует окрестности точки  $C$ , лежащей непосредственно на поверхности  $AC$ . Из (1.4) можно получить решение непосредственно для этой окрестности

$$\zeta = -\infty: \quad u_c = a_*(1 - 1.4A_0|z|^{0.4}), \quad v_c = 0. \quad (1.5)$$

Очевидно, что при приближении к угловой точке вдоль обтекаемой поверхности (по координате  $z$ ) скорость  $v_c$  имеет бесконечную производную по  $z$ . Аналогичная ситуация имеет место при приближении к точке  $C$  по нормали к поверхности (по координате  $n$ ).

Уравнения (1.1) – (1.4) определяют однопараметрическое семейство решений, описывающее течение в окрестности угловой точки  $C$ , обтекаемой дозвуковым потоком газа. В качестве такого параметра может быть выбрана константа  $A_0$  в (1.4). Тогда, задавшись  $A_0$ , а также некоторым значением  $\zeta_0 < 0$ ,  $|\zeta_0| \gg 1$ , можно по (1.4) определить начальные условия для системы (1.3) и далее численным интегрированием получить ее решение в области  $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_1$ , где  $\zeta_1$  – достаточно большое положитель-

ное число. В области  $\zeta > \zeta_1 \gg 1$  существует разложение вида, сходного с (1.4), описывающее течение вниз по потоку от угловой звуковой точки, которое, однако, здесь приводить не будем.

## 2. Численное решение задачи о сверхзвуковом обтекании тела с угловой точкой с использованием асимптотического решения

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком газа плоской пластины ( $j=0$ ) или кругового цилиндра, поставленного торцом к набегающему потоку ( $j=1$ ). Картина течения изображена на рис. 1б, где также представлены системы координат  $x, y$  и  $n, z$ ; здесь  $PQ$  – отошедшая ударная волна перед телом с уравнением  $x = \varepsilon(y)$ ; течение в ударном слое  $QPOC$  дозвуковое.

Метод численного решения задачи об обтекании тела с угловой точкой с использованием асимптотического решения, описанного в предыдущем параграфе, был в свое время описан одним из авторов настоящей статьи (МГЛ), но не опубликован. Приведем здесь его краткое описание.

Как принято при решении подобного рода задач, введем нормированную переменную  $\xi$  соотношением

$$\xi = x / \varepsilon(y) . \quad (2.1)$$

Тогда  $\xi = 0$  на лобовой поверхности тела и  $\xi = 1$  на ударной волне.

Запишем систему уравнений газовой динамики для двумерного невязкого стационарного течения в координатах  $x, \xi$  относительно функций  $U = u - u_c, V = v - v_c$ , где  $u, v$  – компоненты вектора скорости, а  $u_c, v_c$  определяются по (1.1). Эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{\varepsilon}{\Delta} \left\{ \left( B(a^2 - v^2) + 2uv \right) U' - (a^2 - v^2) V' - (uv + B(a^2 - v^2)) y' \omega - E \right\} \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} &= \left[ \varepsilon (U' - y' \omega) - B \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= a, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = y' \varepsilon \rho v \frac{d\vartheta}{d\psi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.2) штрихи означают дифференцирование по координате  $y$ ;  $\vartheta$  – энтропийная функция;  $\psi$  – функция тока. Давление  $p$ , плотность  $\rho$  и скорость звука  $a$  определяются через  $u, v$  и  $\vartheta$  по конечным формулам

$$a^2 = \frac{\gamma-1}{2} \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} a_*^2 - (u^2 + v^2) \right], \quad p = \left( \frac{a^2}{\gamma g} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho = \frac{\gamma p}{a^2}. \quad (2.3)$$

Величина  $\omega$  (завихренность) представляет собой производную

$$\omega = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{g} \frac{d g}{d \psi}. \quad (2.4)$$

Остальные обозначения имеют следующий вид:

$$B = \varepsilon' \xi, \quad \Delta = (a^2 - u^2) + 2Buv + B^2(a^2 - v^2) \\ E = (a^2 - u^2) \frac{\partial u_c}{\partial n} + (a^2 - v^2) \frac{\partial v_c}{\partial s} - uv \left[ \frac{\partial v_c}{\partial u} + \frac{\partial u_c}{\partial s} \right]. \quad (2.5)$$

Решение задачи об обтекании сверхзвуковым потоком газа лобовой поверхности тела  $OCD$ , имеющего излом образующей в звуковой точке  $C$ , описывается системой уравнений (2.2) с граничными условиями на ударной волне  $PQ$  (условия Рэнкина-Гюгонио), условиями непротекания  $u=0$  на поверхности тела  $OC$  и условиями  $U=V=0$  непосредственно в угловой точке  $C$ . Последние условия означают, что в указанной точке и ее окрестности решение  $u, v$  общей системы уравнений газовой динамики переходит в асимптотическое решение (1.1) – (1.4). Наряду с полями газодинамических функций, неизвестными в поставленной задаче являются положение и форма отошедшей ударной волны  $\varepsilon(y)$  (см. (2.1)), а также значение постоянной  $A_0$  в (1.4).

Важно отметить, что поставленная выше краевая задача для системы уравнений (2.2) не имеет особенностей в угловой точке (и вообще в поле течения). Действительно, в системе (2.2) особенность оказалась сосредоточена в слагаемом  $E$  в первом уравнении системы. В это слагаемое (см. формулу (2.5)) входят производные от величин  $u_c, v_c$ , неограниченно возрастающие при приближении к угловой точке. Однако, в силу постановки задачи (см. выше) в этой окрестности имеем  $u \rightarrow u_c, v \rightarrow v_c$ , так что выражение  $E$  представляет собой уравнение неразрывности, которому удовлетворяет асимптотическое решение  $u_c, v_c$  (1.1), в силу чего  $E \rightarrow 0$ . Вне окрестности угловой точки  $E \neq 0$ , но вне этой окрестности  $u_c, v_c$  являются вполне гладкими функциями, и никаких особенностей в системе (2.2) не возникает. Поэтому к численному решению поставленной краевой задачи для системы (2.2) могут быть применены методы, разработанные для численного определения гладких решений уравнений газовой динамики.

Перед тем как приступить к численному решению нашей системы, выполним еще одно преобразование с тем, чтобы иметь возможность воспользоваться симметрией задачи. Для этого вместо функций  $U = u - u_c, V = v - v_c$  введем новые функции  $U = u - u_c, V = v - v_c$ , где

$$\begin{aligned} u_c &= u, & 0 \leq y \leq Y; & & u_c &= u_c, & Y \leq y \leq 1 \\ (u')_{y=0} &= 0; & (u)_{y=Y} &= (u_c)_{y=Y}; & (u')_{y=Y} &= (u'_c)_{y=Y} \\ v_c &= v, & 0 \leq y \leq Y; & & v_c &= v_c, & Y \leq y \leq 1 \\ (v)_{y=0} &= 0; & (v)_{y=Y} &= (v_c)_{y=Y}, & (v')_{y=Y} &= (v'_c)_{y=Y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В качестве функций  $u, v$ , удовлетворяющих условиям симметрии при  $y=0$  и гладко сопрягающихся с  $u_c, v_c$  при  $y=Y, 0 < Y < 1$  (например,  $Y = 0.5$ ) могут быть выбраны полиномы соответствующего порядка.

Для решения поставленной задачи может быть применен метод прямых Г.Ф. Теленина [10, 11], который обеспечивает высокую точность расчета на гладких решениях. Для этого применим к функциям  $U, V, \varepsilon$  следующие полиномиальные аппроксимации:

$$U = \sum_{i=0}^4 U_i(\xi) y^{2i}, \quad V = \sum_{i=0}^4 V_i(\xi) y^{2i+1}, \quad \varepsilon = \sum_{i=0}^4 \varepsilon_i y^{2i}. \quad (2.7)$$

Тогда система (2.2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (по переменной  $\xi$ ) относительно полиномиальных коэффициентов  $U_i, V_i$  со свободными параметрами  $\varepsilon_i$  и  $A_0$ . Эта система может быть решена итерациями, суть которых заключается в том, чтобы подобрать такие  $\varepsilon_i$  и  $A_0$ , при которых удовлетворены граничные условия непротекания  $u=0$  на всей поверхности тела и дополнительное условие  $V=0$  непосредственно в угловой точке. На каждой итерации система обыкновенных дифференциальных уравнений решается в направлении от ударной волны к телу методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Описанный выше метод может, разумеется, быть применен к расчету обтекания тела любой формы с угловой точкой. В этом случае под  $x, y$  в (2.1), (2.2) следует понимать естественную систему координат, связанную с телом, а система уравнений (2.2) будет иметь несколько более сложный вид. Локальные координаты  $n, z$  сохраняют при этом свой смысл.

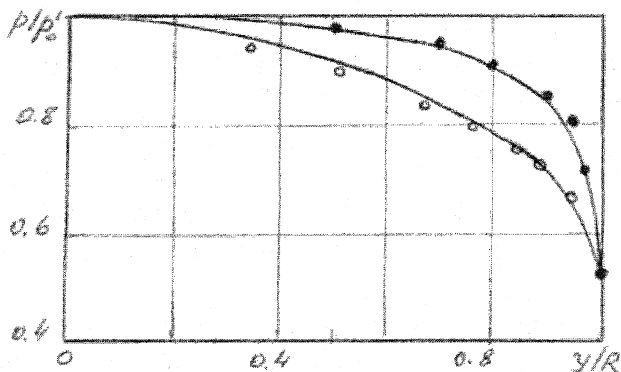


Рис. 2 . Распределения давления по поверхности тел

Результаты расчетов обтекания плоского торца и 60-градусного шарового сектора потоком газа с  $M = 3$  представлены на рис. 2 (приведены распределения давления по поверхности тел). Проверки точности численного решения по выполнению интеграла Бернулли, условия сохранения энтропии вдоль линии растекания, равенства расходов газа, вытекающего и вытекающего из расчетной области, показали, что указанные критерии удовлетворены с высокой точностью (значительно выше 1%). Это свидетельствует о хорошей точности предложенной методики расчета обтекания тел с угловой точкой, так что полученные при ее помощи результаты могут служить эталонами при сравнении с результатами, полученными при помощи иных методов.

На рис. 2 расчетные распределения давления по поверхности обтекаемых тел сравниваются с данными экспериментов Ю.Я. Карпейского; согласование расчетных и экспериментальных данных вполне удовлетворительное.

Приведем еще данные по полученной в расчетах величине постоянной  $A_0$  (1.4), (1.5), единственным образом определяющей асимптотическое решение (1.1). Для 60-градусного сектора при  $M=3$  имеем  $A_0 R^{0.4} = 0.685$ , для плоского торца кругового цилиндра  $A_0 R^{0.4} = 1.341 A_0 R^{0.4} = 1.341$ ; здесь  $R$  – половина диаметра миделевого сечения тела (рис. 1b).

Заметим, наконец, что время расчета по предложенной методике на современном персональном компьютере является исчезающе малой величиной.



### 3. Численное решение задачи о сверхзвуковом обтекании тела с угловой точкой потоком невязкого газа методами сквозного счета

Численное решение задачи о сверхзвуковом обтекании тела с угловой точкой было также получено при помощи метода С.К. Годунова [7, 12]. Расчеты проводились в прямоугольной области  $\Omega = \{(x, y) | x \in [-2, 3], y \in [0, 5]\}$  (рис. 3). За характерный размер выбирался радиус (для плоского случая — половина толщины) тела. Показатель адиабаты для газа был принят за  $\gamma = 1.4$ . При расчетах давление, плотность и проекции скорости были отнесены соответственно к удвоенному скоростному напору  $\rho_\infty u_\infty^2$ , плотности  $\rho_\infty$  и скорости  $u_\infty$  набегающего невозмущенного потока. Для вычислений использовалась равномерная сетка размерами  $500 \times 500$  ячеек; при этом на единицу длины (радиус тела) приходилось 100 расчетных ячеек.

На верхней и правой границах области ставились мягкие граничные условия ( $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ , где  $f$  одна из величин  $p, \rho, u, v$ ), на нижней границе — условия симметрии, на поверхности тела — условия непротекания ( $u_n = 0$ ). На левой границе задавались условия набегающего потока с заданным числом Маха ( $M$ ). За значения скорости, плотности и давления в набегающем потоке и во всей области в начальный момент времени были выбраны соответственно  $u_\infty = 1, \rho_\infty = 1, p_\infty = \frac{1}{\gamma M^2}$ .

Текущая реализация метода написана на языке C++. Использование технологий OpenMP и MPI сделало возможным использование многопроцессорных вычислительных систем, в общем случае, гибридных — кластеров, состоящих из SMP<sup>2</sup> машин. Текущие расчеты проводились на 16-ти процессорной SMP системе «Regatta» — IBM eServer p690, имеющейся в распоряжении факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. Распараллеливание метода позволило сократить время счета, требуемое для получения установившегося течения на больших (порядка  $500 \times 500$  ячеек и более) сетках, на порядок по сравнению с однопроцессорной реализацией (с 5 часов до 20 минут для сетки  $500 \times 500$ ).

<sup>2</sup> SMP — симметричные мультипроцессорные системы (Symmetric Multi Processors) с разделяемой памятью; более подробно о типах архитектур можно узнать в [13] или по адресу <http://www.parallel.ru/computers/classes.html>

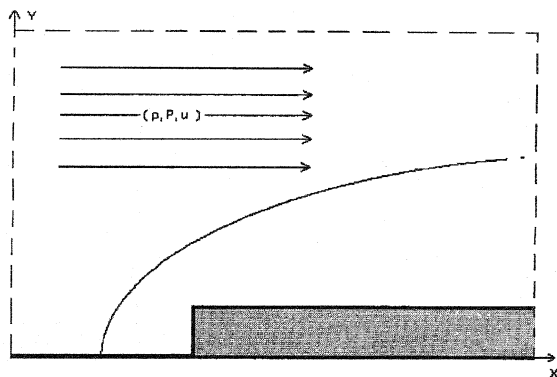


Рис. 3. Расчетная область

Ниже представлены результаты расчетов методом Годунова обтекания цилиндра с плоским торцом при числе Маха в набегающем потоке, равном 3.

На рис. 4 представлено распределение давления вдоль линии растекания (оси симметрии и поверхности тела). Сплошная кривая соответствует результатам, полученным при помощи метода прямых, пунктирная — результатам, полученным методом Годунова. Отрезок  $[-1.5; 0]$  оси  $X$  соответствует отрезку линии симметрии перед телом,  $[0; 1]$  — торцу тела,  $[1; 2]$  — боковой поверхности. Как видно из графика, метод сквозного счета не сильно уступает в точности методу прямых. В свою очередь метод прямых дает результат, хорошо совпадающий с экспериментальными данными (см. п. 2). Интересно отметить особенно хорошее совпадение результатов для двух методов на торце тела (отрезок  $[0; 1]$ ). Фронт ударной волны размазан несильно, примерно на пять расчетных ячеек; на графике он кажется практически вертикальным.

Полученные расчетные данные сравнивались также с результатами лабораторных экспериментов [14]. На рис. 5 представлены результаты сравнения для давления вдоль боковой поверхности цилиндра, отнесенного к давлению в точке торможения модели ( $P/P_{0*}$ ). Сплошной линией представлены результаты эксперимента, пунктирной — результаты расчета; за начало отсчета выбрана угловая точка. На рисунках 6 – 8 представлены результаты сравнения для полных давлений, отнесенных к давлению в форкамере ( $P^i/P_0$ ), на различном расстоянии от боковой поверхности цилиндра.

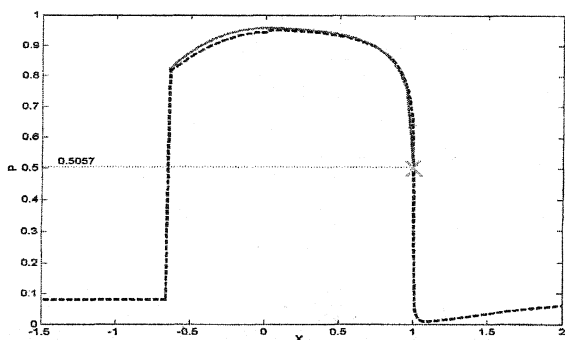


Рис. 4. Давление на линии растекания. Сплошная кривая получена методом прямых, пунктирная — методом Годунова

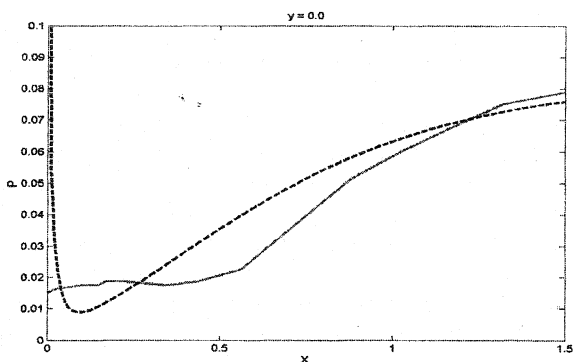


Рис. 5. Распределение давления вдоль боковой поверхности тела ( $y = 0$ ). Сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная — расчета.

Обращает на себя внимание более гладкий характер решения, полученного расчетами, по сравнению с результатами экспериментов при  $y = 0, 0.006$  и  $0.106$  (рис. 5 – 7). Присутствие плато давления и скачка за ним на графиках для экспериментальных данных авторы [14] объясняют существенным влиянием вязкости на характер течения вблизи торца тела — образованием срывной зоны. Однако при удалении от боковой поверхности цилиндра, при выходе за пределы срывной зоны (случай  $y = 0.206$  и  $0.406$  на рис. 8), экспериментальные распределения давления практически совпадают с расчетными.

Аналогично, на рис. 9 приведены значения плотности, отнесенной к значению плотности в невозмущенном потоке ( $\rho/\rho_\infty$ ) на разном удалении от боковой поверхности тела ( $y=0$  и  $0.344$ ). Ситуация аналогична случаю давления: наблюдается хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных.

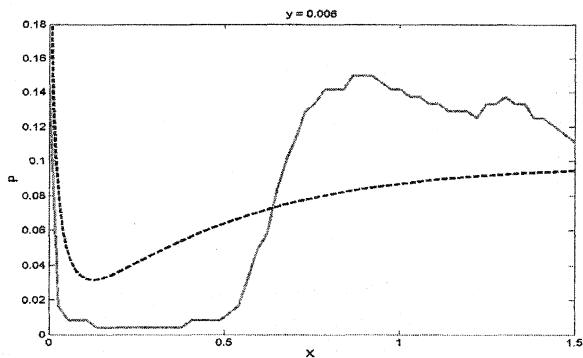


Рис. 6. Распределение давления над боковой поверхностью тела (расстояние от тела  $y = 0.006$ ). Сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная — расчета

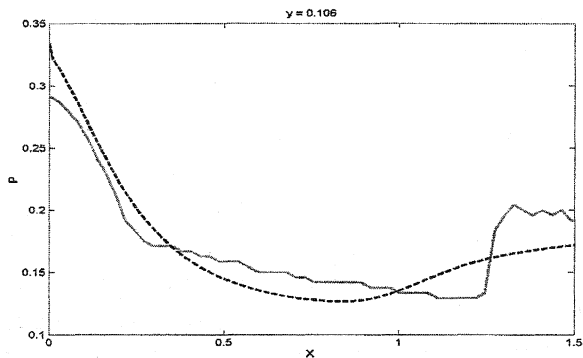


Рис. 7. Распределение давления над боковой поверхностью тела (расстояние от тела  $y = 0.106$ ) Сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная — расчета.

На рис. 10 представлены линии уровня для числа Маха вблизи торца цилиндра; здесь штриховые линии соответствуют расчету, выполненному методом прямых. Отметим, что характер сопряжения линий уровня с границей цилиндра, согласуется с теорией, рассмотренной выше.

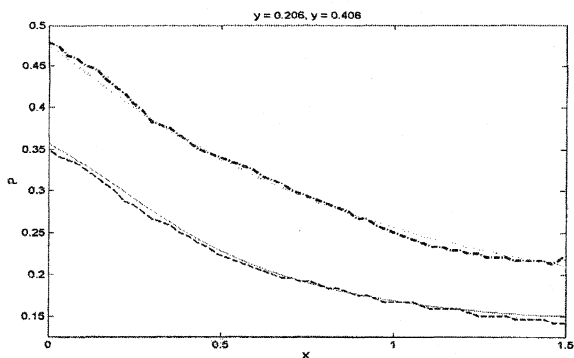


Рис. 8. Распределение давления над боковой поверхностью тела. Нижняя пара (расстояние от тела  $y=0.206$ ): сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная – расчета; верхняя пара (расстояние от тела  $y=0.406$ ): штрихпунктирная кривая соответствует результатам эксперимента, кривая из точек – расчета

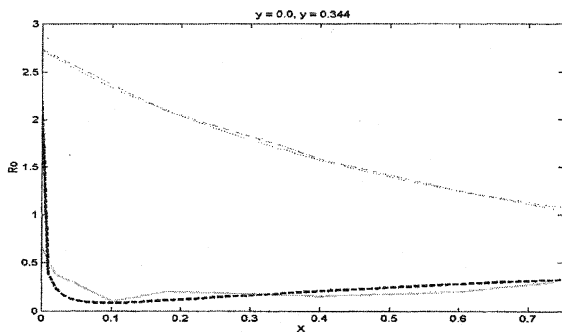


Рис. 9. Распределение плотности над боковой поверхностью тела. Нижняя пара (расстояние от тела  $y=0$ ): сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная — расчета; верхняя пара (расстояние от тела  $y=0.344$ ): штрихпунктирная кривая соответствует результатам эксперимента, кривая из точек — расчета

На рис. 10 представлены линии уровня для числа Маха вблизи торца цилиндра; здесь штриховые линии соответствуют расчету, выполненному методом прямых. Отметим, что характер сопряжения линий уровня с границей цилиндра, согласуется с теорией, рассмотренной выше.

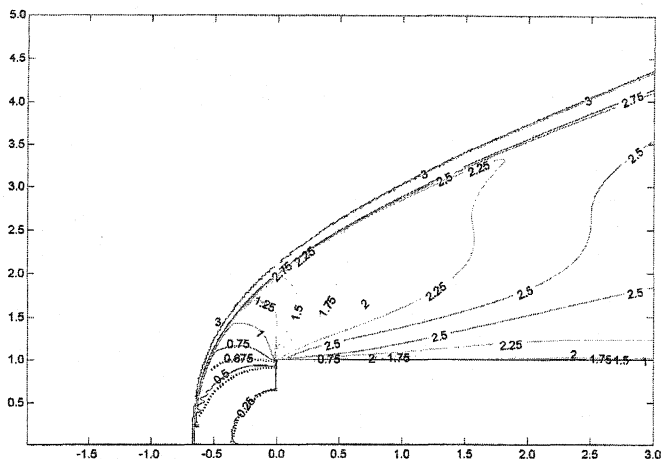


Рис. 10. Изолинии чисел Маха. Пунктиром выделены изолинии, полученные методом прямых

Также было рассчитано обтекание торца потоком с числом Маха, равном 2. На рис. 11 представлены результаты сравнения для полных давлений, отнесенных к давлению в форкамере ( $P'_0/P_0$ ), на различных расстояниях от боковой поверхности цилиндра. Обращает на себя внимание большее, чем в случае  $M=3$  расхождение результатов расчетов и эксперимента. Это может быть объяснено увеличением вертикальных размеров срывной зоны при уменьшении числа Маха набегающего потока. Однако уже на некотором удалении от тела ( $y=0.109$ ), за пределами влияния срывной зоны, наблюдается хорошее соответствие расчетного и экспериментального распределений.

Кроме того были проведены расчеты для случая взаимодействия потока с плоской пластиной. За характерный размер была принята половина толщины пластины. Размеры области выбирались так, чтобы головная ударная волна не соприкасалась с левой границей расчетной области (рис. 12). Число ячеек сетки было увеличено до  $1500 \times 1000$ . На половину толщины пластины, по-прежнему, приходилось 100 расчетных ячеек.

Ниже представлены результаты расчетов для числа Маха в набегающем потоке, равном 1.60. В отличие от осесимметричного случая, установление течения происходило гораздо медленнее. Потребовалось около 50 тысяч шагов по времени, чтобы получить картину установившегося течения. На 16-процессорном комплексе расчеты производились примерно за 6 часов.

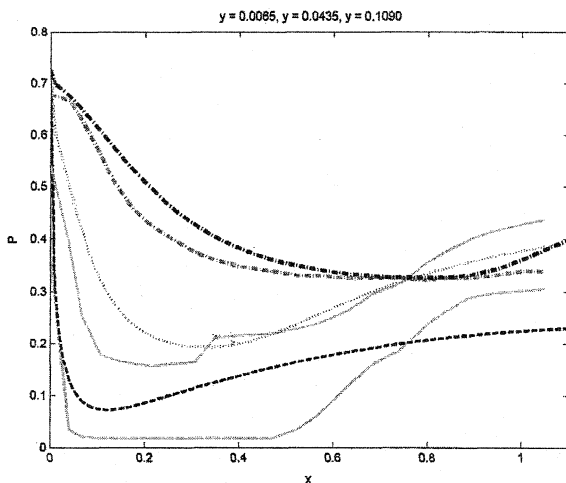


Рис. 11 Распределение давления над боковой поверхностью тела Нижняя пара (расстояние от тела  $y = 0.0065$ ): сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная — расчета; средняя пара (расстояние от тела  $y = 0.0435$ ): сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, кривая из точек — расчета, верхняя пара (расстояние от тела  $y = 0.1090$ ): светлая штрих-пунктирная кривая соответствует результатам эксперимента, темная — расчета

На рис. 12 приведена картина линий уровня для чисел Маха. Здесь же для сравнения толстой пунктирной кривой отмечено положение головной ударной волны, полученное в эксперименте [15].

Совпадение положений ударных волн вполне хорошее; оно сопоставимо с точностью снятия координат с графика из статьи [15]. Стоит отметить, что здесь, в силу дозвукового характера течения в большей части расчетной области, некоторые неточности в расчеты привносятся граничными условиями. В случае же осесимметричных течений, с большими

числами Маха в набегающем потоке, возмущения, вносимые граничными условиями, "смываются" и практически не влияют на результаты расчетов.

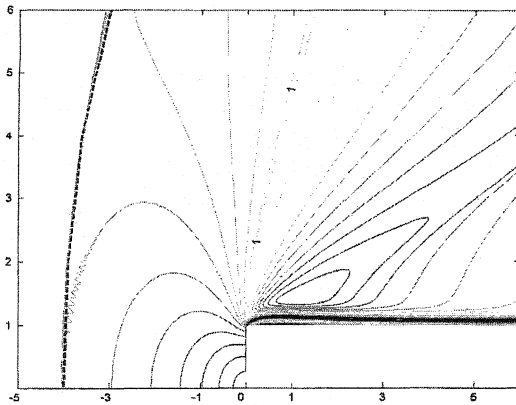


Рис. 12 Изолинии чисел Маха для случая плоской пластины (число Маха в набегающем потоке 1.60). Толстым пунктиром выделено положение головной ударной волны, полученное в результате эксперимента; "1" отмечена звуковая линия

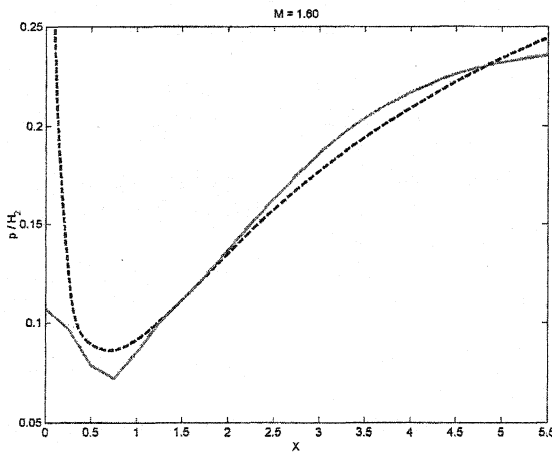


Рис. 13 Распределение давления над боковой поверхностью цилиндра (число Маха в набегающем потоке 1.60). Сплошная кривая соответствует результатам эксперимента, пунктирная — расчета



На рис. 13 представлены распределения давления  $p$ , отнесенного к полному давлению за прямым скачком  $H_2$ , на боковой поверхности цилиндра. Пунктирной линией изображены результаты расчетов, сплошной — распределение, полученное в ходе экспериментальных исследований [15]. Снова можно отметить неплохое соответствие результатов расчетов результатам эксперимента.

Проведенное выше исследование показало, что метод сквозного счета [6] обеспечивает высокую точность решения газодинамических задач, связанных с взаимодействием потоков газа с препятствиями, а использование современных технологий параллельного программирования позволяет увеличить скорость работы метода.

## Литература

1. Лебедев М.Г., Пчелкина Л.В., Савинов К.Г. Решение задач газовой динамики методом установления // Научные труды Ин-та механики МГУ. 1972. № 19. С. 7 – 34.
2. Благосклонов В.И., Васильченко В.И., Григорян С.С., Гроздовский Г.Л. и др. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы. М.: Машиностроение, 1975. 184 с.
3. Шифрин Э.Г. К задаче обтекания поперечного клина сверхзвуковым потоком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1962. № 2. С. 103 – 106.
4. Bohachevsky I.O., Mates R.E. A direct method for calculation of the flow about an axisymmetric blunt body at angle of attack // AIAA J. 1966. V. 4. No. 5. P. 776 – 782.
5. Макаров В.Е. К выделению поверхностей разрывов при численном расчете сверхзвуковых конических течений // Ж. выч. мат. мат. физ. 1982. Т. 22. № 5. С. 1218 – 1226.
6. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
7. Guderley K.G. Singularities at the sonic velocity // Wright-Patterson Air Force Base Rep/ F-TR-1171-ND/ 1948.
8. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. Pt. 1. P. 81 – 103.
9. Фалькович С.В., Чернов И.А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // Прикл. мат. мех. 1964. Т. 28. № 2. С. 280 – 284.

10. Гишинский С.М., Теленин Г.Ф., Тиняков Г.П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 9 – 28.
11. Гишинский С.М., Теленин Г.Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 5. С. 148 – 156.
12. Андрианов А.Н., Базаров С.Б., Ефимкин К.Н. Решение двумерных задач газовой динамики методом Годунова на параллельных ЭВМ с помощью языка НОРМА // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 1997, №9.
13. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
14. Рябинков Г.М., Рябинков А.Г. Экспериментальное исследование обтекания цилиндра с плоским торцом // Сб. «Проблемы прикладной математики и механики». М.: Наука, 1971, с. 269-277.
15. Holder D.W., Chinneck A. The flow past elliptic-nosed cylinders and bodies of revolution in supersonic air stream. // The Aeronautical Quart. 1954. V. 4. Pt. 4. P. 317 – 340.