

*М.Г. Лебедев*

## ЛИНЕЙНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ДИСКРЕТНОГО ТОНА СВЕРХЗВУКОВЫМИ СТРУЯМИ\*

### 1. Введение

Проблема излучения звука дискретной частоты сверхзвуковыми струями остается одной из актуальных проблем аэроакустики [1]. Достаточно заметить, что уровень звукового давления, соответствующего дискретному тону, может превышать суммарный уровень широкополосного шума струи (что, кстати, и обусловило принятое в англоязычной литературе название данного явления словом *screech*, то есть оглушительный вопль).

Излучение дискретного тона звуковыми перерасширенными струями впервые наблюдалось А.Пауэллом еще в 1953 г. [2, 3]. Впоследствии было обнаружено, что данное явление имеет место и при истечении сверхзвуковых нерасчетных струй, как перерасширенных, так и недорасширенных [4]. За прошедшие полвека было выполнено немалое количество экспериментальных работ, посвященных данному вопросу. В них изучались условия, в которых имеет место дискретное акустическое излучение струй, и исследовалась зависимость характеристик излучения от основных газодинамических параметров струй. Весьма репрезентативный обзор исследований по данному вопросу содержится в работе [5]. Более подробную библиографию отечественных работ (правда, лишь до начала 90-х годов) можно найти в монографии [6] и обзоре [7].

В то же время построение полной и исчерпывающей теории данного явления отнюдь нельзя считать законченным. Не вызывает сомнения лишь общая, неоднократно подтвержденная в экспериментах, его схема, в которой струя, излучающая дискретный тон, представляется как автоколебательная система. Обратная связь в этой системе осуществляется внешними акустическими волнами, излучаемыми струей и, в свою очередь, воздействующими на струю. Детали же реализации данной схемы (механизмы переноса возмущений по струе, излучения волн во внешнее пространство и т.д.) могут существенно различаться в различных теориях. В частности, существенным элементом ряда теорий является локализация взаимодействия внешнего акустического поля и струи, а именно ограничение этого взаимодействия коротким участком границы струи вблизи кромки сопла ("корневым" участком). К таким теориям относятся полумпирическая модель самого А.Пауэлла [3], наиболее детально развитая

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-01-00113).

"теория слабейшего звена" [8], а также упрощенная теория, предложенная в [9].

На иных основах теория дискретного акустического излучения сверхзвуковых струй разрабатывалась в семидесятые годы Г.Ф.Телениным и автором [10 - 13]. В основе предложенной в этих работах модели лежала идея о синхронизации периодических возмущений в акустических волнах, распространяющихся по поверхности струи, с возмущениями, распространяющимися по сверхзвуковой струе, также имеющей периодическую ударно-волновую структуру. Сопоставление теоретических результатов, полученных на основе этой теории, с известными на то время экспериментальными данными, показало их удовлетворительное согласование.<sup>1</sup>

Окончательный ответ о механизме дискретного акустического излучения сверхзвуковых струй, как и ряда других родственных аэроакустических явлений (например, резонатора Гартмана-Шпренгера) будет, по-видимому, получен на путях прямого численного моделирования. Последнее десятилетие характеризуется развитием вычислительной аэроакустики как самостоятельной ветви вычислительной гидродинамики [15]. Первые результаты получены и в задаче о дискретном излучении струй [16]. Вместе с тем в [16] отмечаются большие вычислительные трудности при численном моделировании рассматриваемого явления, которые не позволили пока рассчитать геликоидальное (то есть трехмерное) дискретное акустическое излучение, которое имеет место почти во всем диапазоне изменения газодинамических параметров струй.

В этой связи представляется полезным еще раз проанализировать решения задач рассматриваемого класса, полученные в упрощенной (в частности, линейной, как в [10 - 13]) постановке, в том числе и для создания тестов для разрабатываемых численных методик. Помимо того, за время, прошедшее с публикации [10 - 13], было накоплено большое количество экспериментального материала, охватывающего широкий диапазон условий, в которых наблюдается данное явление, и отличающихся значительно большей систематичностью, чем довольно-таки разрозненные данные, публиковавшиеся в 50-70-е годы. Таким образом, появилась возможность систематического сопоставления экспериментальных и теоретических результатов по пульсациям сверхзвуковых струй, что и делается в пп. 2 и 3 настоящей работы. В п. 2 проводится сопоставление данных по частоте дискретного тона. Сравнения, проведенные в п. 3, касают-

---

<sup>1</sup> Отметим еще недавно опубликованную работу [14], отличающуюся принципиально иным подходом к проблеме. В этой работе элементы ударно-волновой структуры струи рассматриваются как объемы, обладающие собственными частотами, с которыми и связывается акустическое излучение струи.

ся особенностей распространения возмущений по струе, излучающей дискретный тон, и во внешнем акустическом поле. Наконец, в п. 4 дискутируется вопрос о роли "корневого" участка струи на формирование обратной связи через внешнее акустическое поле при излучении струями звука дискретной частоты.

## 2. О частоте дискретного тона

Выведенная в [11, 12] из условия синхронизации распространения возмущений в сверхзвуковой струе и во внешней акустической волне формула для частоты (числа Струхала) излучаемого осесимметричной струей дискретного тона (первой гармоники) имеет вид

$$\text{Sh}_a = \frac{f_a D_j}{c_a} = \frac{\rho_{11} / \pi}{\sqrt{\left(\frac{c_a}{c_j} + M_j\right)^2 - 1}} \quad (2.1)$$

Здесь  $M_j$ ,  $c_j$ ,  $D_j$  – число Маха, скорость звука и диаметр полностью расширенной струи,  $c_a$  – скорость звука во внешней среде,  $\rho_{11}$  – первый корень функции Бесселя первого рода первого порядка  $J_1$  (численное значение  $\rho_{11}/\pi \approx 1.22$ ). Число Маха  $M_j$  может быть определено по известным соотношениям для одномерного течения через число Маха на кромке сопла  $M_e$  и нерасчетность струи, то есть отношение давлений в выходном сечении и в окружающей среде:  $N = p_e/p_a$ . Через эти же величины могут быть выражены газодинамические параметры струи  $D_j$  и  $c_j$  (см. ниже).

При наличии во внешней среде дозвукового спутного потока с числом Маха  $M_a < 1$  формула (2.1) приобретает вид

$$\text{Sh}_a = \frac{\rho_{11} / \pi}{\sqrt{\left(\frac{c_a}{c_j} + \frac{M_j - 1}{1 - M_a}\right) \left(\frac{c_a}{c_j} + \frac{M_j + 1}{1 - M_a}\right)}} \quad (2.2)$$

Как отмечалось еще в [11, 12], а также в ряде других работ (например, в [6]), формула (2.1) дает верное качественное описание экспериментальных данных; в то же время количественные расхождения с экспериментом могут быть достаточно велики. Это демонстрирует рис. 1, на котором по формуле (2.1) построена зависимость  $\text{Sh}_a(M_j)$  для холодной струи (температура торможения  $T_0$  которой равна температуре окружающей среды  $T_a$ ). На той же фигуре построены границы разброса экспериментальных данных и осредненная кривая частоты дискретного тона,

взятые из работы [17]<sup>2</sup>. Сравнение кривых показывает, что теоретическая кривая (2.1) находится выше верхней границы разброса экспериментальных данных, а количественное расхождение с осредненной кривой меняется от 30 до 40% в зависимости от числа Маха струи  $M_j$ .

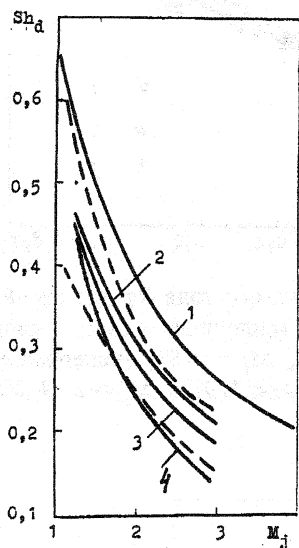


Рис. 1. Зависимость числа Струха-дискре́тного тона от числа Маха полностью расширенной осесимметричной струи. 1, формула (2.1), 2, формула (2.6), 3, осредненная экспериментальная кривая по [17], 4, теоретическая кривая [8]; пунктир — границы разброса экспериментальных данных по [17].

экспериментальных данных были отобраны данные, соответствующие числу Маха расширившейся струи  $M_j = 1.55$ , так как в этом случае данные имелись для всех четырех рассмотренных в [19] отношений температур  $T^\circ$ , и, помимо того, они отличались наименьшим разбросом.

В то же время детальный анализ теоретических и экспериментальных данных показывает, что указанное расхождение практически не зависит от других определяющих параметров задачи — отношения температур струи и внешней среды  $T_0/T_a$  и числа Маха спутного потока  $M_a$ . Так на рис. 2 проведено сравнение для величин отношения  $R_T = Sh_d(T^\circ)/Sh_d(1)$ , где  $T^\circ = T_0/T_a$ ; использованы экспериментальные результаты [18, 19] для горячих струй, вытекающих в атмосферу, ( $T^\circ > 1$ ) и результаты [20] для холодных струй, вытекающих в нагретое помещение ( $T^\circ < 1$ ). Заметим, что опыты [18, 20] были проведены со сверхзвуковыми перерасширенными струями ( $M_e > 1, N < 1$ ), а опыты [19] со звуковой недорасширенной струей ( $M_e = 1, N > 1$ ). В последнем случае из имеющегося множества экс-

<sup>2</sup>Хотя со времени публикации [17] прошел большой срок и появилось много новых экспериментальных работ, это не повлияло сколько-нибудь заметно ни на границы разброса времени экспериментальных данных, ни тем более на положение осредненной кривой.

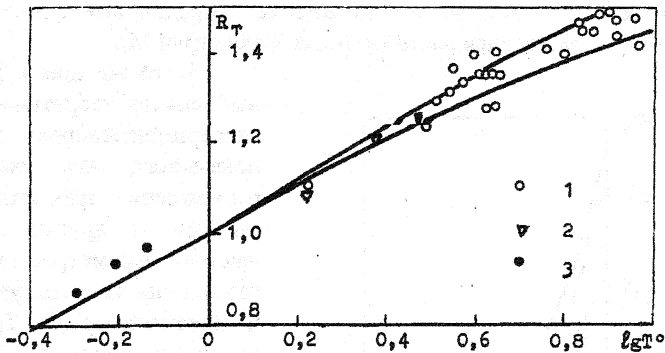


Рис. 2. Отношение частот дискретного тона  $R_T$  для струй с различными температурами торможения (сплошные линии - расчет по формуле (2.1)). 1,  $M_e = 2.4$ ,  $N = 0.5$ ,  $M_j = 1.95$ , эксперимент [18]; 2,  $M_e = 1$ ,  $N = 2.07$ ,  $M_j = 1.55$ , эксперимент [19]; 3,  $M_e = 2.19$ ,  $N = 0.85$ ,  $M_j = 2.09$ , эксперимент [20].

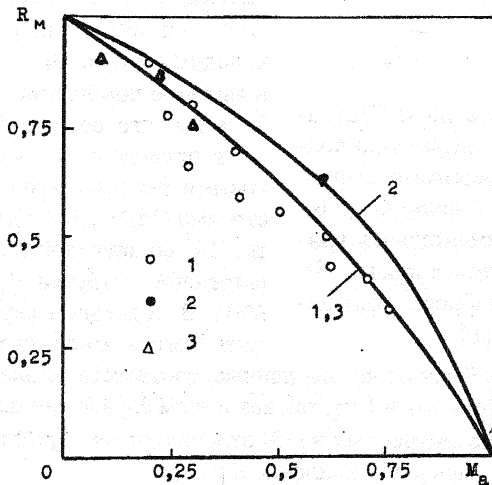


Рис. 3. Отношение частот дискретного тона для струй  $R_M$ , вытекающих в затопленное пространство и в спутный дозвуковой поток (сплошные линии - расчет по формуле (2.2)). 1,  $M_e = 3.2$ ,  $N = 0.3$ ,  $M_j = 4.4$ ,  $T_0/T_j = 1$ , эксперимент [18]; 2,  $M_e = 1$ ,  $N = 2.5$ ,  $M_j = 1.22$ ,  $T_0/T_j = 1$ , эксперимент [21]; 3,  $M_e = 1$ ,  $N = 3.4$ ,  $M_j = 1.46$ ,  $T_0/T_j = 3$ , эксперимент [22].

На рис. 3 аналогичное сравнение проведено для отношения  $R_M = Sh_d(M_a)/Sh_d(0)$ , где  $M_a$  – число Маха дозвукового спутного потока. Используются экспериментальные данные [18, 21, 22]. Эксперимент [18] был проведен со сверхзвуковой перерасширенной струей, а [21, 22] со звуковыми недорасширенными струями; помимо того, эксперимент [22] был выполнен с нагретыми струями (заметим, что теоретические кривые, соответствующие условиям экспериментов [18] и [22] практически сливаются; поэтому на графике рис. 3 для этих условий построена одна кривая).

Данные рис. 2 и 3 указывают на хорошее согласование теоретических и экспериментальных значений "относительного" числа Струхалия, соответствующих самым разнообразным условиям по температуре струи и скорости спутного потока, а также режиму истечения из сопла. Отсюда можно сделать вывод, что точность формул (2.1) и (2.2) может быть повышена введением в нее поправочного множителя, зависящего только от  $M_j$ .

Для определения этого множителя напомним, что указанные формулы были получены в [11, 12] из условия синхронизации распространения возмущений в сверхзвуковой струе и во внешнем акустическом поле. Выполнение этого условия определяется, очевидно, характерным размером периодической структуры сверхзвуковой нерасчетной струи – длиной ее ячейки ("бочки")  $L$ , которая зависит от числа Маха струи  $M_j$  (или числа Маха на выходе из сопла  $M_e$ ), и нерасчетности струи  $N$ , но не зависит от температурного фактора:  $L = L(M_j, N)$ . В то же время все теоретические выкладки в [10 - 13] были проведены для "вырожденного" случая расчетной струи ( $N = 1, M_j = M_e$ ). Для такой струи характерная длина существующей как бы в зародыше периодической структуры равна  $L_{N=1} = D_j\beta = D_j(M_j^2 - 1)^{1/2}$ , где  $D_j$  – диаметр струи. Поэтому есть основания рассмотреть поправочный множитель для формул (2.1) и (2.2) в виде  $D_j\beta/L(M_j, N)$ .

Данные по характерному размеру периодической структуры сверхзвуковой нерасчетной струи приведены на рис. 4 (на примере случая  $M_e=1.5$ ). Здесь кривая 1 представляет эмпирическую зависимость длины первой "бочки" недорасширенной струи, полученную в работе [23] при обработке большого количества экспериментальных данных

$$\frac{L}{D_j} = \frac{D_e}{D_j} \left( 2 - 1.1 \frac{D_e}{D_j} \right) \sqrt{\frac{P_0}{P_a} - 1} \times A \quad (2.3)$$

$$A = \begin{cases} 0.1 + 0.6N, & N \leq 1.5 \\ 1, & N \geq 1.5 \end{cases}$$

Здесь  $D^*$  и  $D_e$  – диаметры критического и выходного сечений сопла; все отношения  $D^*/D_j$ ,  $D_e/D^*$  и  $p_0/p_a$  могут быть выражены через  $M_j$  и  $N$  (или  $M_e$  и  $N$ ) по формулам одномерной теории.

На той же фигуре в зависимости от нерасчетности  $N$  построена величина  $\beta = (M_j^2 - 1)^{1/2}$ ; очевидно, что при нерасчетностях порядка 1.5 - 2 расхождение между  $\beta$  и величиной  $L/D_j$ , посчитанной по (1.3), может быть значительным, достигая 15 - 20%.

Заметим, что в работе [24] была введена характерная длина  $\Lambda$  периодической структуры струи, которая описывается следующей эмпирической формулой

$$\frac{\Lambda}{D_e} = (1.05\sqrt{N} - 0.1)\sqrt{\gamma(M_e^2 - 1)} \quad (2.4)$$

В [24] отмечается, что при  $N \geq 1$  величина  $\Lambda$  практически совпадает с длиной первой ячейки струи  $L$ , тогда как при  $N < 1$  различие может быть существенным; так при  $N \sim 0.5$  отношение  $\Lambda/L \approx 2$ .

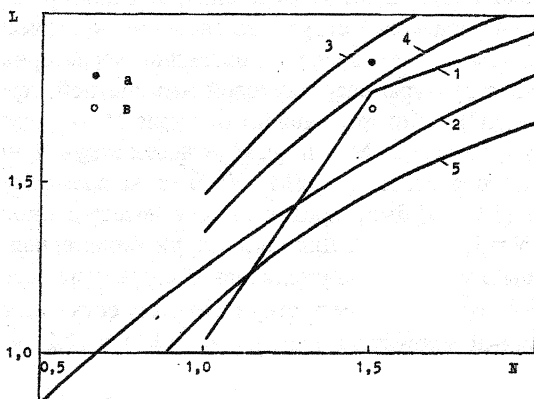


Рис. 4. Характерный размер периодической структуры сверхзвуковой струи с  $M_e = 1.5$ ,  $\gamma = 1.4$  в зависимости от ее нерасчетности. 1, 2 - эмпирические зависимости [23] и [24]; 3, 4 - теоретические зависимости [25] и [26]; 5 - величина  $\beta = (M_j^2 - 1)^{1/2}$ ; а, расчетное значение; б, экспериментальное значение [27].

Зависимость  $\Lambda(N)$  при  $M_e = 1.5$ ,  $\gamma = 1.4$  построена на рис. 4 в виде кривой 2; при  $N > 1.5$  различие между результатами (2.3) и (2.4) не более 5 - 10%.

Следует отметить, что, согласно [24], ни  $\Lambda$ , ни  $L$  практически не за-

всят от угла раскрытия сопла при его изменении в достаточно широких пределах (указанных в [24]).

Теоретическое решение в виде ряда, описывающее течение в сверхзвуковой недорасширенной струе, было выведено в свое время методом малого параметра в работах Л.Прандтля [25] и Д.Пака [26]. Из этого решения вытекает следующая зависимость для длины первой ячейки струи

$$\frac{L}{D_j} = k\beta \quad (2.5)$$

где  $k = 1.306$  согласно Прандтлю [25], ограничившемуся первым членом разложения, и  $k = 1.22$  по Паку [26], рассмотревшему около 40 членов ряда.

Зависимости Прандтля и Пака также построены на рис. 4 в виде кривых 3 и 4. Сопоставляя эти кривые с эмпирической зависимостью (2.3), а также имея в виду тот факт, что  $L/D_j \rightarrow \beta$  при  $N \rightarrow 1$ , можно сделать вывод, что формула (2.5) адекватно описывает течение в недорасширенной струе лишь при нерасчетностях  $N \geq 1.5$ . Заметим, что при  $M_a = 2$  эмпирическая кривая, построенная по формуле (2.3), лежит при  $N \geq 1.5$  как раз посередине между кривыми Прандтля и Пака.

Для сравнения на рис. 4 приведены данные по длине первой ячейки струи при  $M_e = 1.5$ ,  $N = 1.5$ , полученные в расчете<sup>3</sup> и в эксперименте [27].

Приведенные на рис. 4 данные дают достаточно полное представление о поведении характерного размера периодической структуры сверхзвуковой струи. Совершая указанную выше перенормировку, то есть используя в (2.1) характерный размер нерасчетной струи  $L$  вместо характерного размера расчетной струи  $\beta D_e$ , можно надеяться на лучшее согласование экспериментальных и расчетных результатов по частоте дискретного тона. Особенно простой вид формула (2.1) приобретает, если вычислять характерный размер струи по формуле Пака, то есть по (2.5) с  $k = 1.22$ . Это обусловлено тем обстоятельством, что по (2.5) характерный размер струи пропорционален величине  $\beta$  и, во-вторых, тем, что в формулы (2.1) и (2.5) входят одинаковые коэффициенты 1.22, которые сокращаются при перенормировке. Выражая еще отношение скоростей звука  $c_a/c_j$  в (2.1) через отношение  $T^\circ$  температур торможения струи  $T_0$  и окружающей среды  $T_a$ , окончательно получим

---

<sup>3</sup>Расчет был выполнен по просьбе автора Ю.Н.Садковым с использованием разностной схемы третьего порядка.



$$\text{Sh}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{T^0 \tau(M_j)}} + M_j\right)^2 - 1}}, \quad (2.6)$$

где газодинамическая функция  $\tau(M)$  определяется следующим образом

$$\tau(M) = \frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}. \quad (2.7)$$

Зависимость  $\text{Sh}_d(M_j)$  по формуле (2.6) при  $T^0=1$  построена на рис. 1 в виде кривой 2. Можно отметить удовлетворительное согласование теоретических и экспериментальных данных во всем диапазоне  $1.2 \leq M_j \leq 3$ , для которого имеются достоверные экспериментальные данные.

Привлекательность формулы (2.6) состоит в том, что она включает лишь определяющие газодинамические параметры течения в струе и не требует каких-либо дополнительных предположений о характере течения в струе и распространении по ней возмущений, как это делается в ряде других теорий.

При  $N < 1.5$ , когда формула Прандтля-Пака (2.5) становится неприемлемой, перенормировку формулы (2.1) следует проводить, используя соотношения (2.3) или (2.4) для характерного размера периодической структуры струи.

На рис. 1 построена также теоретическая зависимость частоты дискретного тона для холодной струи согласно теории слабейшего звена [8] (кривая 4). Как видно, эта кривая также находится в пределах разброса экспериментальных данных и близка к теоретической кривой 2 настоящей работы.

Интересно заметить, что, несмотря на близость окончательных результатов, формула работы [8] выведена из совершенно иных предпосылок. Следует, однако, иметь в виду, что линейная теория в принципе не может дать полное описание автоколебательного процесса (это в равной мере относится и к данной теории, и к теории [8]). Поэтому, чтобы построить модель автоколебательного явления в рамках линейного подхода, приходится размыкать петлю обратной связи, изымать какой-либо из ее элементов и вводить на его место иной элемент с заданными свойствами. Адекватность результирующей модели зависит от того, насколько успешно проведена такая процедура.

В данной работе таким привнесенным элементом был генератор внешнего акустического поля, не зависимый от струи. В [8] эту роль выполняла заданная волна неустойчивости, распространяющаяся по струе.

Таким образом, размыкание обратной связи в двух данных работах проводилось в разных местах, и подвергались замене разные ее элементы. При этом, очевидно, приближенная модель процесса в обоих случаях была выстроена достаточно корректно, что и обусловило близость полученных результатов как между собой, так и с экспериментальными данными.

Вместе с тем излагаемая в данной работе модель представляется нам предпочтительной, так как она основана на более ясных физических представлениях – частота (2.1) (или (2.6)) есть та, при которой в струе развиваются максимальные возмущения, или когда сверхзвуковая струя в наиболее полной мере проявляет резонаторные свойства [10 – 12].

В заключение остановимся на вопросе о частоте дискретного тона для плоских струй. Согласно [10, 12], для таких струй числитель в формуле (2.1) следует заменить на единицу, а величина  $D_j$  в этом случае представляет собой ширину струи. Таким образом, при прочих равных условиях частота дискретного тона цилиндрической струи всегда превышает соответствующую частоту для плоского случая. Этот факт вполне подтверждается экспериментальными данными (см., например, работу [28], где приведены систематические данные для прямоугольных струй с различными отношениями сторон).

Что касается количественных данных, то из теории [10-12] следует, что отношение частот дискретного тона цилиндрической и плоской струй при одинаковых условиях должно быть  $S = (Sh_d)_{cl} / (Sh_d)_{sl} = \rho_{cl} / \rho_{sl} = 1.22$  (здесь и далее индексы "cl" и "sl" относятся к цилиндрической и плоской струе). Если же принять во внимание сказанное выше о перенормировке формулы (2.1) по характерному размеру периодической структуры струи, то придем к следующему результату:  $S = 1.22 L_{sl} / L_{cl}$ . Экспериментальной проверке этого соотношения препятствует отсутствие систематических данных по величине  $L_{sl}$ , подобных тем, какие существуют для осесимметричных струй (рис. 4). Поэтому ограничимся лишь одним примером. Если принять теоретические результаты [26], то получим  $L_{sl} / L_{cl} = 2 / 1.22$ , и тогда  $S = 2$ . В работе [29] приводятся результаты эксперимента, выполненного со струей, вытекающей из прямоугольного сопла с отношением сторон 5:1 при числе Маха  $M_j = 1.45$ ; согласно этим результатам, частота дискретного тона равна  $Sh_d \approx 0.155$ . Сравнивая это значение с соответствующим значением для осесимметричной струи, взятым с осредненной кривой 3 на рис. 1, получим  $S \approx 2.5$ , что в какой-то мере подтверждает теоретический результат.

### 3. Сопоставление с экспериментальными данными по течению в возмущенной струе и по внешнему акустическому полю

Подробное экспериментальное исследование особенностей распространения возмущений по струе, излучающей дискретный тон, и во внешнем акустическом поле было выполнено в ИТПМ СО РАН в работах [27, 30, 31]. Эксперименты были проведены со струей воздуха, вытекающей из конического сопла с углом  $8^\circ$  при числе Маха на кромке сопла  $M_e = 1.5$  и при нерасчетности  $N = 1.5$ ; при этом число Маха полностью расширившейся струи составляет  $M_j \approx 1.8$ .

На рис. 5 - 8 проводится сопоставление теоретических [11, 12] амплитудных и фазовых характеристик возмущений давления и скорости внутри струи и в ближнем поле с экспериментальными данными. Следует иметь в виду, что сравнение амплитудных характеристик может иметь лишь качественный характер, поскольку линейное решение [11, 12] дает возможность определить лишь относительную величину возмущения (инкремент), но не определяет масштаба возмущения.

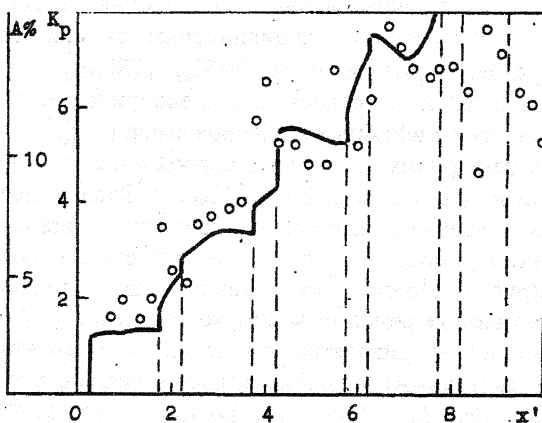


Рис. 5. Распределение амплитуды возмущений давления по длине струи на расстоянии  $Y = 0.35D_e$  от оси струи в расчете по линейной теории [11, 12] и в эксперименте [27] ( $M_j = 1.8$ ); сплошные линии - расчет, точки - эксперимент.

На рис. 5 построены распределения амплитуд возмущений давления  $p$  по длине струи на расстоянии от оси  $Y = 0.35D_e$ ; в соответствии со

сказанным в п. 2, координата  $x$  нормирована по характерному размеру периодической структуры струи:  $x' = x/L$ . Пунктиром обозначены пересечения поверхностей разрыва в струе с прямой  $Y = 0.35D_e$ .

Величина  $A$  на рис. 5 представляет собой отношение замеренной амплитуды пульсаций давления к местному среднему значению статического давления в рассматриваемой точке (в процентах); величина  $K_p$  представляет собой коэффициент усиления возмущений давления в линейной теории [10-12]. Можно отметить качественное совпадения экспериментальных и расчетных зависимостей для амплитуд давления: те и другие характеризуются нарастанием возмущением с удалением от среза сопла и их резким изменением при прохождении поверхностей разрыва. Темп нарастания возмущений давления в расчете и эксперименте в общем одинаков. Существенные различия наблюдаются, однако, за четвертой ячейкой струи: здесь линейное решение начинает особенно резко расти, а в эксперименте этому соответствует начало распада струи и разрушения ее периодической структуры.

Качественное совпадение имеет место также для поперечных распределений амплитуд возмущений давления (не приведены на графиках). Максимальные возмущения давления достигаются примерно между осью и границей струи, а вне струи происходит резкое уменьшение величины пульсаций давления.

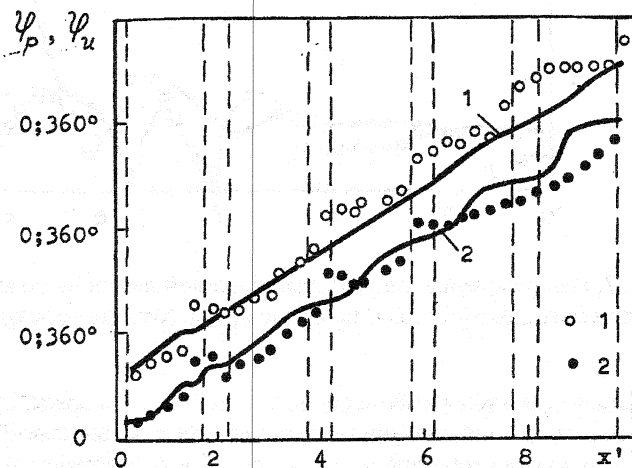


Рис. 6. Распределение фаз пульсаций давления  $\psi_p$  и продольной компоненты скорости  $\psi_u$  (остальное, как на Рис. 5).

На рис. 6 проведено сравнение фазовых характеристик возмущений давления и продольной составляющей скорости вдоль той же прямой  $Y = 0.35D_e$ ; фазовые углы  $\varphi_p$  и  $\varphi_u$  представляют собой разности фаз между пульсациями давления и скорости в текущей точке и пульсациями скорости вблизи среза сопла. Совпадение между расчетом и экспериментом здесь весьма неплохое. Величины фазовых углов растут по длине струе в среднем линейно; смещение по фазе пульсаций давления и скорости составляет  $180^\circ$  как в теории, так и в эксперименте. Скорость распространения возмущений по струе, вычисленная по наклону фазовой кривой (прямой), приблизительно равна скорости звука в окружающей среде ( $\sim 350$  м/с).

Фазы возмущений давления по сечению струи примерно постоянны. Этот факт, в сочетании с результатами измерений скорости распространения возмущений по струе, подтверждает сделанный в [12] вывод о том, что внутри струи, излучающей дискретный тон, формируется плоская акустическая волна со скоростью, равной скорости звука в окружающей среде.

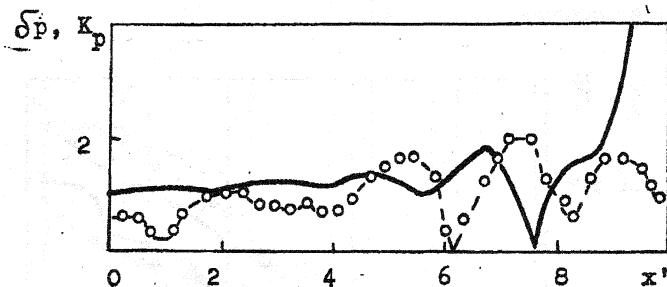


Рис. 7. Распределение амплитуд возмущений давления во внешнем акустическом поле ( $Y = 2D_e$ ) по длине струи (остальное, как на Рис. 5).

Сопоставление экспериментальных и расчетных распределений амплитуд и фаз возмущений давления по координате  $x'$  во внешнем поле ( $Y = 2D_e$ ) пульсирующей струи проведено на рис. 7 и 8. Экспериментальная величина  $\delta p$  в этом случае представляет собой отношение амплитуд пульсаций давления в текущей и некоторой опорной точках. Качественный характер экспериментальных и расчетных кривых одинаков: на протяжении первых четырех-пяти ячеек струи амплитуда пульсаций давления ос-

циллирует по длине струи, подходя однажды даже к нулевому значению. Положения экстремумов, впрочем, несколько смещены друг относительно друга (с уменьшением  $Y$  их совпадение становится лучше [31]). За четвертой ячейкой струи амплитуда пульсаций струи в линейном решении резко растет.

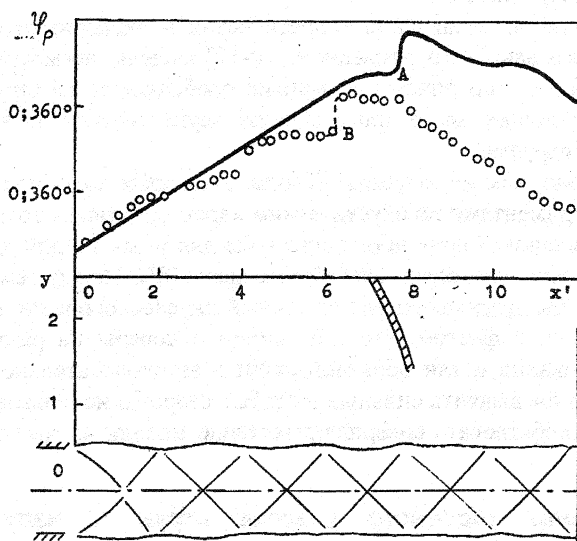


Рис. 8. Распределение фаз пульсаций давления во внешнем акустическом поле ( $Y = 2D_0$ ) по длине струи (остальное, как на Рис. 5) (а). Картина струи по результатам расчета и эксперимента [27] и положение линии молчания во внешнем акустическом поле по данным линейного расчета (b).

Сравнение фазовых характеристик (рис. 8) также показывает одинаковый характер внешнего поля струи в расчете и эксперименте. Интересной его особенностью является наличие точек, где амплитуда пульсаций обращается в нуль, а фаза скачком меняется на  $180^\circ$  (хотя положения этих точек в теории (A) и эксперименте (B) смещены друг относительно друга). Геометрическое место таких точек образует "зону молчания", которая по результатам расчетов построена в нижней части рис. 8 (картина

струи построена здесь по данным упомянутого выше численного расчета, а также эксперимента [27]).

Заметим, что качественно сходная картина внешнего акустического поля (с наличием зон "провала" амплитуд пульсаций давления, сопровождаемого скачкообразным изменением фазы) была зафиксирована и в экспериментах со струями, вытекающими из прямоугольных сопел [28]. Наличие подобных зон во внешнем акустическом поле немаловажно учитывать при постановке экспериментальных исследований для правильной интерпретации результатов.

Проведенные сопоставления теоретических и экспериментальных результатов показывают, что развитая в [10-12] модель, несмотря на ее упрощенность, адекватно описывает многие особенности аэроакустических явлений, имеющих место при излучении звука дискретной частоты сверхзвуковыми струями.

К сожалению, нам не известны работы, в которых подобное сопоставление с экспериментами по акустическим характеристикам возмущенной струи и ее внешнего поля проводилось бы для иных теорий данного явления (в том числе для теории слабейшего звена [8]). Между тем, такое сравнение могло бы представить значительный интерес, особенно в связи с отмеченным в п. 2 фактом, что эти теории основаны на различных принципах разрывания петли обратной связи в автоколебательном процессе. Оно могло бы выявить сильные и слабые стороны использованных концепций и способствовать совершенствованию модели изучаемого явления.

#### 4. О роли корневого участка струи в излучении дискретного тона

Существенную роль в модели [10-12] играет взаимодействие струи с внешним акустическим полем на достаточно протяженном участке ее поверхности. Это находится в противоречии с распространенным взглядом о преимущественной роли "корневого" участка струи на возникновение пульсаций с дискретной частотой, который лег в основу ряда теорий рассматриваемого явления [3, 8, 9]. В связи с этим рассмотрим на простой модели, как реагирует сверхзвуковая струя на облучение ее акустическими возмущениями различных типов.

Уравнение, описывающее возмущения в сверхзвуковой струе в линейной постановке, имеет вид

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2M_j}{c_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha \partial t} + \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

Здесь  $\varphi$  – потенциал возмущений скорости ( $\mathbf{V}' = \text{grad } \varphi$ ),  $c_j$  и  $M_j$  –

скорость звука и число Маха в струе,  $\beta = (M_j^2 - 1)^{1/2}$ .

Пусть течение в струе подвергается периодическому геликоидальному возмущению с частотой  $\omega$ . Рассмотрим возмущение в виде акустической волны, бегущей по границе струи в направлении к срезу сопла

$$p' = P p_a \exp(-i\omega t - i\omega x / c_a) \cos\theta \quad (4.2)$$

а также возмущение, локализованное в окрестности выходного сечения струи ( $x = 0$ ), используя для этой цели  $\delta$ -функцию Дирака

$$p' = P p_a \exp(-i\omega t) \delta(x) \cos\theta \quad (4.3)$$

В формулах (4.2), (4.3)  $c_a$  и  $p_a$  – скорость звука и давление во внешней среде,  $P$  – безразмерная амплитуда возмущений.

Решения задач (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3) в плоскости переменного Лапласа  $p$  имеют, соответственно, вид (за подробностями вывода отсылаем к [10-12])

$$G(p, y) = -\frac{P c_j^2}{\gamma} \frac{1}{p c_j M_j + i\omega / \beta^2} \frac{1}{p + i(\sigma + \omega / c_a)} \frac{I_1(\mu y)}{I_1(\mu R)} \quad (4.4)$$

$$G(p, y) = -\frac{P c_j^2}{\gamma} \frac{0.5}{p c_j M_j + i\omega / \beta^2} \frac{I_1(\mu y)}{I_1(\mu R)} \quad (4.5)$$

Здесь  $R$  – радиус струи,  $\sigma = M_j \omega / c_j \beta^2$ ,  $\mu = p^2 \beta^2 + \omega^2 / c_j^2 \beta^2$ ,  $I_1$  – функция Бесселя второго рода первого порядка.

Решение задачи в физической плоскости можно получить, применяя к (4.4) и (4.5) обратное преобразование Лапласа. В этом, однако, нет необходимости для определения критических частот, при которых в струе под воздействием внешнего облучения развиваются максимальные возмущения. В случае (4.4) эти частоты определяются из условия совпадения полюсов двух последних множителей решения (4.4), то есть из равенства  $I_1(\mu R) = p + i(\sigma + \omega / c_a)$  (второй множитель в (4.4) не имеет общих полюсов с остальными множителями). В этом случае функция (4.4) обладает полюсом второго порядка. Именно таким формально-математическим путем и выведена формула (2.1). Однако физический смысл этого вывода состоит в том, что наличие второго из указанных полюсов обусловлено именно граничными условиями, поставленными на границе струи, и совпадение его с одним из полюсов, обусловленных свойствами волнового уравнения, как раз и выражает математически условие синхронизации периодической структуры струи и периодического



возмущения, действующего на ее поверхности. В случае, когда возмущение на поверхности струи локализовано (пример с дельта-функцией), такая синхронизация не может иметь места, полюс второго порядка в решении (4.5) не возникает, а соответствующее решение в физической плоскости не обладает критическими частотами.

Заметим, что аналогичный вывод был сделан и в работах [32, 33], в которых исследовалось поведение сверхзвуковой струи под воздействием акустических возмущений, заданных в ее начальном сечении. И в этом случае никакие преимущественные частоты возбуждающего воздействия не имеют места.

Таким образом, при локализованном возбуждении сверхзвуковой струи как извне, так и изнутри не существует критических частот, при которых развивающиеся в струе возмущения заметно превосходили бы возмущения в той же струе на всех остальных частотах. Это обстоятельство говорит не в пользу теорий, в которых частота дискретного тона определяется взаимодействием струи и внешнего акустического поля на ограниченном (корневом) участке струи.

Заметим, что экспериментальные результаты, полученные рядом авторов со щитками, установленными во внешнем поле струи и в особенности в плоскости среза сопла, указывают на заметную зависимость уровня дискретного тона от величины возмущений давления, действующих на струю вблизи ее выходного сечения. С другой стороны, ряд экспериментов (например, [34]) свидетельствуют, что воздействием на корневую часть можно лишь усилить либо ослабить уровень пульсаций, но не добиться их возникновения или исчезновения. Из сказанного следует, что механизм возникновения пульсаций сверхзвуковых струй не связан с уровнем возмущений на ее корневом участке, хотя последний может оказать значительное влияние на величину развивающихся в струе возмущений и на уровень излученного звука. Также и в [30] экспериментально показано, что струя, излучающая дискретный тон, при замене одного щитка другим (то есть при разных уровнях воздействия на корневую часть) "ведет себя таким образом, что отношение амплитуд и разность фаз дискретного тона в двух произвольных точках струи и ее акустического поля остаются постоянными", то есть уровень воздействия на корневую часть струи не влияет на ее частотную характеристику.

## 5. Заключение

Критический анализ линейных решений задачи об излучении сверхзвуковой струей дискретного тона и сопоставление этих решений с экспериментальными данными, особенно полученными в последнее вре-

мя, показал, что несмотря на свою упрощенность, линейная теория [9 - 13] позволяет правильно описать многие качественные особенности течения в возмущенной струе и ее внешнего акустического поля. К таким особенностям относятся, в частности, формирование внутри струи единой, почти плоской акустической волны, распространяющейся со скоростью, равной скорости звука в окружающей среде, а также наличие зон молчания во внешнем акустическом поле. Дана модификация теоретической формулы для частоты дискретного тона, благодаря чему указанная формула дает весьма удовлетворительное согласование с данными измерений и при этом не содержит никаких "подгоночных" параметров (в нее входят лишь число Маха струи и отношение температур струи и внешней среды).

## Литература

1. Власов В.Е., Гиневский А.С., Ефимцев Б.М., Кузнецов В.М., Мунин А.Г., Самохин В.Ф., Смольянов А.В., Соболев А.Ф. Основные проблемы аэроакустики // Труды ЦАГИ. 1996. Вып. 2614. 55 с.
2. Powell A. On the noise emanating from a two-dimensional jet above the critical pressure. // *Aeronautical Quarterly*. 1953. V. 4. Pt. 2. P. 103 - 122.
3. Powell A. On the mechanism of choked jet noise // *Proceedings of Physical Society*. 1953. V. B66. P. 1039 - 1056.
4. Merle M. Emissions acoustiques associees aux jets d'air supersoniques // *Journal de Mecanique*. 1965. V. 4. No. 3. P. 305 - 317.
5. Raman G. Supersonic jet screech: half-century from Powell to the present // *Journal of Sound and Vibration*. 1999. V. 225. N. 3.
6. Антонов А.Н., Купцов В.М., Комаров В.В. Пульсации давления при струйных и отрывных течениях. М.: Машиностроение. 1990. 272 с.
7. Powell A. Soviet aeroacoustics - a short review // *Journal of Acoustical Society of America*. 1992. V. 92. N 1. P. 41-56.
8. Tam C.K.W., Seiner J.M., Yu J.C. Proposed relationship between broadband shock-associated noise and screech tones // *Journal of Sound and Vibration*. 1986. V. 110. N 2. P. 309-321.
9. Brocher E., Makhsud A. A new look at the screech tone mechanism of underexpanded jets // *European Journal of Mechanics. Ser. B*. 1997. V. 16. N 6. P. 877-891.
10. Лебедев М.Г., Теленин Г.Ф. Исследование взаимодействия

сверхзвуковой струи с акустическим полем // Известия АН СССР. МЖГ. 1970. N 4. С. 82-94.

11. Лебедев М.Г., Теленин Г.Ф. Сверхзвуковая струя во внешнем акустическом поле // Известия АН СССР. МЖГ. 1974. N 2. С. 105 - 113.

12. Лебедев М.Г., Теленин Г.Ф. Частотные характеристики сверхзвуковых струй. М.: Изд-во МГУ. 1978. 126 с.

13. Швец А.И., Теленин Г.Ф., Римский-Корсаков А.В., Купцов В.М., Лебедев М.Г. Исследование колебаний давления и дискретной составляющей в спектре шума сверхзвуковых струй. Ин-т механики МГУ. Отчет N 2661. 1982. 181 с.

14. Генкин П.Г., Ерофеев В.К., Шалимов В.П. Результаты исследований механизмов генерации дискретных тонов в сверхзвуковых струях // Течения газа и плазмы в соплах, струях и следах. XVIII Международный семинар, СПб, Россия, 21-21 июня 2000 г. СПб: БГТУ, 2000. С. 111.

15. Tam C.K.W. Computational aeroacoustics: Issues and methods // AIAA Journal. 1995. V. 33. N 10. P. 1788-1796.

16. Shen H., Tam C.K.W. Numerical simulation of the generation of axisymmetric mode jet screech tones // AIAA Journal. 1998. V. 36. N. 10. P. 1801-1807.

17. Ануфриев В.М., Комаров В.В., Купцов В.М., Мельников Д.А., Сергиенко А.А. Дискретная составляющая в спектре шума сверхзвуковых струй // Известия АН СССР. МЖГ. 1969. N 5. С. 162 - 165.

18. Антонов А.Н., Сладкевич М.С. Экспериментальное исследование шума высокотемпературных струй // Известия АН СССР. МЖГ. 1978. N 5. С. 155-158.

19. Massey K.C., Ahuja K.K., Jones III R.R., Tam C.K.W. Screech tones of supersonic heated jet // AIAA Paper. 1994. N 0141. 23 p.

20. Шлик О.Э., Рябухин А.В., Лухтура Ф.И. Об оценке частоты дискретного акустического излучения сверхзвуковой струи, истекающей в высокотемпературное пространство // Газодинамика и акустика струйных течений. Новосибирск, 1987. С. 96-100.

21. Sarohia V. Some flight simulation experiments on jet noise from supersonic underexpanded flows // AIAA Journal. 1978. V. 16. N 7. P. 710-716.

22. Krothapali A., Soderman P.T., Allen C.S., Hayes J.A., Jaeger S.M. Flight effects on the far-field noise of a heated supersonic jet // AIAA Journal. 1997. V. 35. N 6. P. 952-957.

23. Mamin V., Pykhov L., Rimski-Korsakov A. Discrete tone radiation arising from a supersonic jet flowing into an unlimited medium and into a cylindrical ejector // Rep. 7th Intern. Congress on Acoustics, Budapest, 1971, vol. 4, p. 469-472.

24. Анцупов А.В., Пимштейн В.Г. Об излучении дискретного тона

сверхзвуковых струй, истекающих из конического сопла // Известия АН СССР. МЖГ. 1975. N 1. С. 153-156.

25. Prandtl L. Uber die Stationaren Wellen in einem Gasstrahl // Physikalische Zeitschrift. 1901. Bd. 5. S. 599-601.

26. Pack D.C. A note on Prandtl's formula for the wavelength of a supersonic gas jet // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1950. V. 2. Pt. 2. P. 173-181.

27. Сулейманов Ш. Структура возмущений на частоте дискретного тона в сверхзвуковой струе, истекающей в затопленное пространство // Научные основы турбулентных явлений. М.: Наука, 1992. С. 266-269.

28. Raman G. Cessation of screech in underexpanded jets // Journal of Fluid Mechanics. 1997. V. 336. P. 69 - 90.

29. Norum A. Supersonic rectangular jet impingement noise experiments // AIAA Journal. 1991. V. 29. N. 7. P. 1051-1057.

30. Сулейманов Ш. Пространственно-временная структура пульсаций на частоте дискретного тона и газодинамические параметры свободных слабонедорасширенных струй. Автореферат диссертации канд. физ.-мат. наук. ИТПМ. Новосибирск. 1987.

31. Глазнев В.Н. Автоколебания при истечении сверхзвуковых нерасчетных струй // Моделирование в механике. Т. 1(18). № 6. ВЦ и ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск. 1987. С. 29 - 43.

32. Лебедев М.Г. Распространение акустических возмущений по сверхзвуковой струе, вытекающей в атмосферу // Известия АН СССР. МЖГ. 1977. N 2. С. 92 - 99.

33. Лебедев М.Г. К расчету акустического излучения сверхзвуковой струи // Библиотека программ по аэрогидродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 59 -70.

34. Carlomagno G.M., Ianniello C., Vigo P. Wplyw zewnetrznego ukszaltowania dyszy na emitowany halas oraz na rozpad strumienia naddzwiekowego // Archiwum Akustyki. 1981. V. 16. N 2. P. 157 - 169.