В.С. Левченков, Л.Г. Левченкова

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И СУПЕРИГРЫ

Введение

Рассмотрим многократное разыгрывание одной и той же базисной игры (будем называть для краткости такие игры *суперииграми* [1]) двух лиц (S_1, S_2, B), где $B = (v_1(x,y), v_2(x,y))_{\substack{x \in S_1 \\ y \in S_2}}$ – платежная матрица игры, исходами которой являются пары (v_1, v_2) выигрышей, получаемых игроками в ситуациях $(x,y) \in S_1 \times S_2$. Количество повторений базисной игры, вообще говоря, не предполагается ограниченным некоторым фиксированным числом, хотя может быть и конечным. Содержательно такая ситуация означает, что один из игроков может на некотором этапе отказаться от участия в игре (тем самым и второй игрок автоматически прекращает игру). Формально для этого необходимо включить в множество стратегий игроков S_i $(i = 1,2)$ элемент e, соответствующий невозможности продолжения игры. В результате разыгрывания базисной игры возникают две бесконечные последовательности:

а) последовательность ситуаций игры ω (назовем ее *траекторией игры*)

$$\omega = (\omega_i)_{i=0}^{\infty}, \quad \forall i \ \omega_i = \left(s_i^{(1)}, s_i^{(2)}\right), \quad s_i^{(k)} \in S_k \ (k = 1,2).$$

Если игра заканчивается на k-том шаге, то это означает, что при $i \geq k \quad \omega_i = (e,e)$;

б) последовательность исходов игры u, соответствующих траектории ω

$$u = (u_i)_{i=0}^{\infty}, \quad \forall i \ u_i = (v_1(\omega_i), v_2(\omega_i)).$$

Для определенности положим $v_k(e,e) = 0$, $(k = 1,2)$.

Будем предполагать, что к моменту игры n каждый из игроков сохраняет информацию о реализации последовательностей ω и u длины n, т.е. знает наборы $\omega^n = [\omega_i]_{i=0}^{n-1} = [\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}]$ и $u^n = [u_i]_{i=0}^{n-1} = [u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}]$. Выбирая свой ход $s_n^{(k)}$ на $(n+1)$-ом шаге игрок k использует для оценки информацию о компонентах наборов

u^n и ω^n. Этот ход, вообще говоря, может быть недетерминированным и выбирается из некоторого множества $V_n \subset S_k$ на основе определяемого игроком вероятностного механизма. Таким образом, возникающая в результате игры траектория ω является реализацией некоторого вероятностного процесса и зависит от тех действий и принципов, которые влияют на выбор игрока. Формализуем их следующим образом. Будем считать, что каждому элементу из V_n приписана некоторая частота, величина которой зависит от ситуаций игры, реализованных на m $(m < n)$ предыдущих этапах игры (или, как мы будем говорить, на истории игры глубины m). Повторение игры позволяет реально осуществить такой неравновероятный выбор элементов из V_n, поскольку в ее ходе могут возникать одинаковые истории глубины m для различных моментов рассмотрения. Обозначим частоту выбора элемента $x \in S_k$ на шаге игры с историей $\varphi^m = [\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}]$ $(\forall i \quad \varphi_i \in S_1 \times S_2)$ через $\nu_k(x|\varphi^m)$. Числа ν_k будем считать рациональными, что в силу конечности множеств S_1 и S_2 позволяет представить их в виде

$$\nu_k(x|\varphi^m) = \frac{d_k(x|\varphi^m)}{M}, \qquad (1)$$

где d_k и M – целые числа, причем M можно считать фиксированным. Согласно интерпретации ν_k как частот выбора элементов из S_k, выполнено условие нормировки

$$\sum_{x \in S_k} \nu_k(x|\varphi^m) = 1. \qquad (2)$$

В результате выбора игроками стратегий $x \in S_1$, $y \in S_2$ история φ^m порождает на следующем шаге историю ψ^m вида

$$\psi^m = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, (x, y)] \equiv [\psi^{m-1}, (x, y)]. \qquad (3)$$

Компоненты ψ^{m-1} – конечной последовательности длины $(m-1)$ – связаны с φ^m соотношением $\psi_i = \varphi_{i+1}$ $(i = \overline{0, m-2})$. Неоднозначность в выборе ходов игроками порождает некоторую совокупность возможных бесконечных последовательностей $\Omega(\nu_1, \nu_2)$, которой и принадлежит рассматриваемая траектория ω.

Для описания совокупности $\Omega(\nu_1, \nu_2)$ заметим, что множество историй глубины m и соотношения (1), (3) можно изобразить в виде мультиграфа, вершины которого взаимно-однозначно связаны с элементами из пространства $(S_1 \times S_2)^m$. Из вершины φ^m (для удобства будем использовать для обозначения вершин графа отвечающие им истории) в вершину ψ^m, связанную с φ^m соотношением (3), проведем

$$t(\varphi^m, \psi^m) \equiv d((x,y)|\varphi^m) = d_1(x|\varphi^m)d_2(y|\varphi^m) \tag{4}$$

дуг, показывающих (после деления на M^2) частоту $\nu_1(x|\varphi^m)\nu_2(y|\varphi^m)$ появления ситуации (x,y) на шаге игры с историей φ^m. Если вершины графа не связаны соотношением (3), то дуги между такими вершинами не проводятся. Занумеруем дуги графа, соединяющие вершины φ^m и ψ^m числами от 1 до $t(\varphi^m, \psi^m)$.

Введем теперь в рассмотрение пространство

$$L = \left\{ \{l^{(k)}_{\varphi^m \psi^m}\}_{k=1}^{t(\varphi^m,\psi^m)} \right\}_{\varphi^m,\psi^m \in (S_1\times S_2)^m} \tag{5}$$

всех дуг графа и построим матрицу связей

$$\Pi = (\pi_{ll'})_{l,l' \in L},$$

имеющую вид

$$\pi_{l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m} l^{(s)}_{\gamma^m\delta^m}} = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi^m = \gamma^m \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Заметим, во избежание недоразумений, что в формуле (6) истории ψ^m и φ^m (а также δ^m и γ^m) связаны друг с другом соотношением вида (3), поскольку только в этом случае $t(\varphi^m, \psi^m) \neq 0$.

Пусть теперь φ^m, ψ^m, δ^m и γ^m таковы, что соответствующий им матричный элемент (6) равен 1. Тогда при $\psi^m = [\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, (x,y)]$ найдется такая ситуация $(x', y') \in S_1 \times S_2$, что $\delta^m = [\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{m-1}, (x,y), (x',y')]$. В результате истории φ^m, ψ^m и δ^m оказываются последовательными кусками длины m истории φ^{m+2} длины $(m+2)$

$$\varphi^{m+2} = [\varphi^m, (x,y), (x',y')]. \tag{7}$$

Обобщая (7), рассмотрим совокупность Π_L^+ (бесконечных последовательностей дуг из L), устроенную следующим образом

$$\Pi_L^+ = \{\theta = (l_k)_{k=0}^{\infty} : \quad \forall k \ \ \pi_{l_k l_{k+1}} = 1\}. \tag{8}$$

Две дуги в любой последовательности $\theta \in \Pi_L^+$ могут стоять рядом только если отвечающие им истории формируют историю длины $(m+2)$, имеющую вид (7). Тем самым последовательности $\theta = (l^{(s_k)}_{\varphi^m_k \psi^m_k})_{k=0}^{\infty}$ однозначно сопоставляется траектория игры $\omega = ((x_k, y_k))_{k=0}^{\infty}$, такая что каждый ее элемент (x_k, y_k) является последним элементом истории ψ_k^m, сопоставляемой дуге $l_k \equiv l^{(s_k)}_{\varphi_k^m \psi_k^m}$. При этом совокупность $\{\varphi_k^m\}_{k=0}^{\infty}$ историй игры, указывающих начальные вершины дуг из θ, порождается всеми последовательными фрагментами (длины m) в траектории

$$\omega' = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{m-1}, (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots) \equiv [\varphi_0^m, \omega], \quad (9)$$

получающейся надращиванием последовательности ω с помощью истории $\varphi_0^m = [\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{m-1}]$. Совокупность историй $\{\psi_k^m\}_{k=0}^{\infty}$ строится подобным же образом из последовательности

$$\begin{aligned} \omega'' = (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots, \tilde{\varphi}_{m-1}, (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots) \equiv \\ \equiv [\varphi_0^{m-1}, \omega], \end{aligned} \quad (10)$$

отличающейся от ω' сдвигом на одну компоненту влево: $\forall i\ \omega''_i = \omega'_{i+1}$.

Таким образом, совокупность $\Omega(\nu_1, \nu_2)$ получается из Π_L^+ согласно (9) или (10).

В дальнейшем нас будет интересовать ряд статистических свойств траекторий, входящих в $\Omega(\nu_1, \nu_2)$, в частности, частоты, с которыми встречаются в $\omega \in \Omega(\nu_1, \nu_2)$ те или иные ситуации $s \in S_1 \times S_2$ и возникающие при этом значения средних выигрышей игроков, а также зависимости этих и других величин от выбора последовательности $\omega \in \Omega(\nu_1, \nu_2)$. Особенно важное значение для описания суперигр имеют стационарные (т.е. не зависящие от момента игры) свойства. Как мы покажем далее, такие свойства характеризуют поведение игроков, выбирающих свои стратегии с учетом истории игры с фиксированной глубиной. Оказывается, что статистические свойства последовательностей $\theta \in \Pi_L^+$ и $\omega \in \Omega(\nu_1, \nu_2)$ связаны друг с другом и могут быть получены на основе изучения свойств элементов из Π_L^+. Для этого мы вводим в пространстве Π_L^+ топологию, в которой открытыми являются цилиндрические множества (эту топологию можно задать некоторой метрикой, см. [2] или [3]) и рассматриваем в Π_L^+ непрерывное отображение σ – сдвиг последовательности влево

$$\sigma :\ \Pi_L^+ \to \Pi_L^+, \quad \sigma\theta = \theta',$$

при этом если $\theta = (\theta_i)_{i=0}^{\infty}$, $\theta' = (\theta'_i)_{i=0}^{\infty}$, то $\forall i\ \ \theta'_i = \theta_{i+1}$. В результате на Π_L^+ возникает символическая динамическая система (Π_L^+, σ), называемая топологической марковской цепью – ТМЦ [2]. Мы будем называть ее также ТМЦ, отвечающей суперигре (S_1, S_2, B). Установлению связи между этой динамической системой и суперигрой посвящена настоящая работа.

1. Статистическое описание неразложимых суперигр

Пусть ТМЦ, отвечающая суперигре, неразложима (такие суперигры будем называть неразложимыми). Известно, что статистические свойства неразложимых ТМЦ можно описать (см. [2] или [3]), введя специальную меру μ на Π_L^+ (меру максимальной энтропии), которая инвариантна относительно σ, положительна на открытых множествах из Π_L^+ и эргодична. Как показал Перри [4], для неразложимой ТМЦ эта мера может быть найдена как инвариантная мера $\mu(p, P)$ для вероятностной марковской цепи со стохастической матрицей $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{|L|}$ ($|L|$ – число элементов множества L). Матричные элементы p_{ij} связаны с элементами матрицы переходов ТМЦ, $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j=1}^{|L|}$, (для удобства записи мы перенумеровали элементы множества дуг L последовательно от 1 до $|L|$ и соответствующим образом переобозначили элементы (6) матрицы Π) следующим образом

$$p_{ij} = \frac{\pi_{ij}\alpha_j}{\lambda_0\alpha_i},$$

где $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{|L|}$ – правый собственный вектор неразложимой матрицы Π

$$\Pi\alpha = \lambda_0\alpha,$$

отвечающий максимальному собственному значению λ_0 этой матрицы.

Необходимый для вычисления значений меры $\mu(p, P)$ нормированный собственный вектор p матрицы P

$$p = pP$$

определяется по $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{|L|}$ из следующих соотношений

$$p = (p_i)_{i=1}^{|L|}; \quad \forall i \;\; p_i = \alpha_i\beta_i, \quad \sum_{i=1}^{|L|}\alpha_i\beta_i = 1, \tag{11}$$

где $\beta = (\beta_i)_{i=1}^{|L|}$ является левым собственным вектором матрицы Π

$$\beta\Pi = \lambda_0\beta.$$

В силу того, что матрица Π имеет весьма специальный вид (6), вектора α и β обладают структурными особенностями, позволяющими упростить определяющие их уравнения. Для выявления этих особенностей вернемся к обозначению строк и столбцов матрицы П с помощью дуг $l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m}$, а компоненты векторов α и β обозначим как $\alpha(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m})$ и $\beta(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m})$. Тогда, например, система уравнений для α переписывается в виде:

$$\sum_{\gamma^m,\delta^m,k} \pi_{l^{(s)}_{\varphi^m\psi^m} l^{(k)}_{\gamma^m\delta^m}} \alpha(l^{(k)}_{\gamma^m\delta^m}) = \lambda_0\alpha(l^{(s)}_{\varphi^m\psi^m}). \tag{12}$$

Суммирование по k производится от 1 до $t(\gamma^m,\delta^m)$, а γ^m и δ^m пробегают все множество $(S_1 \times S_2)^m$.

Суммирование по γ^m в силу (6) сводится к замене γ^m (и части компонент δ^m) на ψ^m, что приводит к системе уравнений

$$\sum_{\delta^m}\sum_{k} \alpha(l^{(k)}_{\psi^m\delta^m}) = \lambda_0\alpha(l^{(s)}_{\varphi^m\psi^m}). \tag{13}$$

Заметим теперь, что левая часть этой системы не зависит от переменных φ^m и k. Значит, можно считать, что

$$\alpha(l^{(s)}_{\varphi^m\psi^m}) = \lambda_0^{-\frac{1}{2}}\alpha(\psi^m), \tag{14}$$

где $\alpha(\psi^m)$ – компонента нового вектора, зависящего только от переменных ψ^m. Подставляя (14) в (13) и замечая, что $\delta^m = [\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{m-1},(x,y)]$, где (x,y) – некоторый произвольный элемент из $S_1 \times S_2$, приходим к системе уравнений относительно компонент вектора α

$$\sum_{x,y} d((x,y)|\psi^m)\alpha(\delta^m) = \lambda_0\alpha(\psi^m).$$

Значения функции $d((x,y)|\psi^m)$ задаются соотношением (4). Подставляя в полученную систему выражение, описывающее δ^m через ψ^m и (x,y), получим следующую систему уравнений для нахождения компонент α

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x\in S_1\\ y\in S_2}} d((x,y)|\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{m-1})\alpha(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{m-1},(x,y)) =\\ = \lambda_0\alpha(\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}).\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично, для левого собственного вектора β матрицы П, вводя новый вектор с компонентами

$$\beta(\gamma^m) = \lambda_0^{\frac{1}{2}}\beta(l^{(k)}_{\gamma^m\delta^m}), \tag{16}$$

приходим к системе уравнений

$$\sum_{\substack{x\in S_1\\ y\in S_2}} d(\gamma_{m-1}|[(x,y),\gamma_0,\dots,\gamma_{m-2}])\beta((x,y),\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{m-2}) = \\ = \lambda_0\beta(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}). \tag{17}$$

Условие нормировки (см. (11)) выглядит для переменных $\alpha(\varphi^m)$, $\beta(\psi^m)$ следующим образом:

$$1 = \sum_{\varphi^m,\psi^m,k} \alpha(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m})\beta(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m}) = \lambda_0^{-1} \sum_{\varphi^m,\psi^m,k} \alpha(\psi^m)\beta(\varphi^m) =$$

$$= \lambda_0^{-1}\sum_{\psi^m}\sum_{\varphi^m} t(\varphi^m,\psi^m)\alpha(\psi^m)\beta(\varphi^m) = \sum_{\varphi^m}\alpha(\varphi^m)\beta(\varphi^m).$$

Пусть теперь задана некоторая последовательность $\theta \in L$, $\theta = (l^{(s_k)}_{\varphi^m_k\psi^m_k})^\infty_{k=0}$, для которой ψ^m_k имеет вид $\psi^m_k = [\psi^{m-1}_k,(x_k,y_k)]$. Сопоставим θ последовательность $\omega = ((x_k,y_k))^\infty_{k=0}$, состоящую из последних элементов историй ψ^m_k. Предположим, что частоты $\nu_k(x|\varphi^m)$ вида (1) фиксированы. Что можно сказать о частоте появления различных ситуаций $(x,y) \in S_1\times S_2$ в последовательности ω? Для ответа на этот вопрос вычислим частоту $f^\omega_n(x,y)$, с которой фиксированная ситуация (x,y) появляется в куске последовательности ω длины n, т.е. в $\omega^n = [\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n-1}]$. Имеем

$$f^\omega_n(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\chi_{(x,y)}(\omega_i), \tag{18}$$

здесь

$$\chi_{(x,y)}(\omega_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_i = (x,y) \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

При стремлении n к бесконечности все большее число элементов последовательности ω будет вовлекаться в процесс определения величины $f^\omega_n(x,y)$. Важно знать, сходится ли $f^\omega_n(x,y)$ к какому-то пределу, а если сходится, то как предельное выражение зависит от вида последовательности ω.

Оказывается, что если использовать при оценке сходимости специальную меру на Π^+_L (так называемую *меру максимальной энтропии* [2]), то f^ω_n будет сходиться почти всюду на Π^+_L и что самое замечательное, соответствующий предел не будет зависеть от выбора θ. Поскольку мера максимальной энтропии отлична от нуля на цилиндрических множествах из Π_L^+, то сходимость может отсутствовать только для отдельных (нетипичных) последовательностей θ.

Будем считать теперь, что Π_L^+ – пространство с мерой, в качестве которой выбрана мера максимальной энтропии $\mu(p, P)$.

Лемма 1. Если матрица Π (6) неразложима, то почти для всякой $\theta \in \Pi_L^+$ последовательность $f_n^\omega(x, y)$ сходится к пределу $f^\omega(x, y)$, равному

$$f^\omega(x, y) = \sum_{\varphi^{m-1}} \alpha(\varphi^{m-1}, (x, y))\beta(\varphi^{m-1}, (x, y)) \tag{19}$$

и не зависящему от выбора θ.

Доказательство. Проведем вычисление $f^\omega(x, y)$, используя меру максимальной энтропии на Π_L^+, которая существует и единственна в силу теоремы Перри [4]. Именно,

$$\lim_{n\to\infty} f_n^\omega(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_{(x,y)}(\omega_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\chi}_{(x,y)}((\sigma^i\theta)_0). \tag{20}$$

Функция

$$\tilde{\chi}_{(x,y)}(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi^m = [\varphi^{m-1}, (x, y)] \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

заменяет функцию $\chi_{(x,y)}(\omega_i)$, поскольку при вычислении предела мы перешли от последовательности ω к порождающей ее последовательности θ. Во избежание недоразумений заметим, что $(\sigma^i\theta)_0 = l^{(s_i)}_{\varphi_i^m\psi_i^m}$, т.к. $(\sigma^i\theta)_0$ – первая компонента i-кратного сдвига влево последовательности θ.

Предел в последнем выражении из (20) можно вычислить, используя эргодическую теорему Биркгофа-Хинчина [5], поскольку в силу эргодичности σ почти для всех $\theta \in \Pi_L^+$ будет выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\chi}_{(x,y)}((\sigma^i\theta)_0) = \int\limits_{\Pi_L^+} \tilde{\chi}_{(x,y)}(\theta_0)\, d\mu(\theta) = \sum_{\varphi^m, k} p(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m}),$$

где в последнем выражении $\psi^m = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}, (x, y)]$.

Согласно (11), (14) и (16),

$$p(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m}) = \alpha(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m})\beta(l^{(k)}_{\varphi^m\psi^m}) = \lambda_0^{-1}\alpha(\psi^m)\beta(\varphi^m),$$

т.е. искомый предел равен

$$\lambda_0^{-1} \sum_{\varphi^m} \sum_{k=1}^{t(\varphi^m,\psi^m)} \alpha(\psi^m)\beta(\varphi^m) = \lambda_0^{-1} \sum_{\varphi^m} t(\varphi^m,\psi^m)\beta(\varphi^m)\alpha(\psi^m) =$$

$$= \lambda_0^{-1} \sum_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}} \sum_{\varphi_0} d((x,y)|[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}])\cdot$$
$$\cdot\beta(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})\alpha(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1},(x,y)) =$$

$$= \sum_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}} \alpha(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1},(x,y))\beta(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1},(x,y)),$$

как это следует из системы уравнений (17).

Таким образом, почти для всех $\theta \in \Pi_L^+$ величина $f^\omega(x,y)$ существует и выражается формулой (19). *Q.E.D.*

Лемма 1 показывает, что если игроки фиксируют частоты выбора своих стратегий (причем матрица переходов Π для соответствующей ТМЦ окажется неразложимой), то почти для каждой траектории игры возникает стационарное распределение вероятностей на $S_1 \times S_2$, равное $f^\omega(x,y)$. Чтобы подчеркнуть независимость этого распределения от ω, обозначим его через $\rho(x,y)$.

Согласно лемме 1 и системам уравнений (15) и (17), будет справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если матрица переходов ТМЦ, отвечающей суперигре, неразложима, то на множестве $S_1 \times S_2$ возникает стационарное распределение вероятностей $\rho(x,y)$, характеризующее асимптотическую частоту совместного выбора игроками ситуаций почти во всякой траектории игры. Это распределение находится из уравнений:

$$\rho(x,y) = \sum_{\varphi^{m-1}} \alpha(\varphi^{m-1},(x,y))\beta(\varphi^{m-1},(x,y)), \qquad (21)$$

$$\lambda_0\alpha(\varphi^m) = \sum_{(x,y)} d((x,y)|\varphi^m)\alpha(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},(x,y)),$$

$$\lambda_0\beta(\varphi^m) = \sum_{(x,y)} d(\varphi_{m-1}|[(x,y),\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-2}])\beta((x,y),\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-2}).$$

Величины $d((x,y)|\varphi^m) = d_1(x|\varphi^m)d_2(y|\varphi^m)$ находятся согласно (1).

Замечание. Поскольку задание частот (1) приводит к стационарному совместному распределению, будем называть эти частоты *стационарными стратегиями игроков.*

Системы уравнений для $\alpha(\varphi^m)$ и $\beta(\varphi^m)$ можно записать более компактно, если использовать матрицу $\tilde{T} = (\tilde{t}(\varphi^m, \psi^m))_{\varphi^m, \psi^m \in (S_1 \times S_2)^m}$, элементы которой $\tilde{t}(\varphi^m, \psi^m)$ вычисляются следующим образом

$$\tilde{t}(\varphi^m, \psi^m) = d(\psi_{m-1}|\varphi^m)\delta_{\varphi_1\psi_0} \ldots \delta_{\varphi_{m-1}\psi_{m-2}}, \tag{22}$$

здесь $\delta_{ss'}$ – символ Кронекера.

Будем называть $\tilde{T}$ *матрицей интенсивностей переходов* игры.

С использованием $\tilde{T}$ системы уравнений для $\alpha = \{\alpha(\varphi^m)\}_{\varphi^m \in (S_1 \times S_2)^m}$, $\beta = \{\beta(\varphi^m)\}_{\varphi^m \in (S_1 \times S_2)^m}$ примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}\alpha &= \lambda_0\alpha, \\ \beta\tilde{T} &= \lambda_0\beta. \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, α и β – правый и левый собственный вектор матрицы $\tilde{T}$, а λ_0 – ее максимальное собственное значение.

Нетрудно показать, что матрица Π неразложима тогда и только тогда, когда неразложима матрица $\tilde{T}$.

2. Суперигры с неразложимой матрицей связей

Соотношения (21) получены с использованием общего вида (6) матрицы Π и предположении о ее неразложимости, а значит, и неразложимости $\tilde{T}$. Однако, элементы матрицы $\tilde{T}$ в силу связи (1), (4) должны выбираться так, чтобы были выполнены условия (2).

Покажем, что матрица $\tilde{T}$ обладает постоянной строчной суммой.

Лемма 2. Для любого $\varphi^m \in (S_1 \times S_2)^m$ справедливо

$$\sum_{\psi^m} \tilde{t}(\varphi^m, \psi^m) = \lambda_0. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $\psi_{m-1} = (x, y)$, тогда согласно (22) и (2),

$$\sum_{\psi^m} \tilde{t}(\varphi^m, \psi^m) = \sum_{(x,y)} d_1(x|\varphi^m) d_2(y|\varphi^m) = M^2.$$

Поскольку строчная сумма матрицы постоянна, то согласно теореме Фробениуса-Перрона, максимальное собственное значение этой матрицы совпадает с величиной этой суммы, т.е. $\lambda_0 = M^2$. *Q.E.D.*

Лемма 3. Правый собственный вектор неразложимой матрицы $\tilde{T}$, отвечающий максимальному собственному значению λ_0, пропорционален единичному вектору.

Доказательство. Согласно лемме 2, вектор $\alpha^0 = (\alpha^0(\varphi^m))_{\varphi^m \in (S_1 \times S_2)^m}$ с $\alpha^0(\varphi^m) = 1$ удовлетворяет системе уравнений $\tilde{T}\alpha^0 = \lambda_0 \alpha^0$. Из теоремы Фробениуса-Перрона следует, что собственное подпространство, отвечающее λ_0, одномерно. Значит, $\alpha = k\alpha^0$, где $k \in R^1$. *Q.E.D.*

Леммы 2 и 3 позволяют упростить утверждения теоремы 1; получающиеся при этом результаты суммируются ниже в следующих утверждениях.

Следствие 1. Пусть заданы стационарные стратегии игроков (1), а матрица интенсивностей переходов игры неразложима. Тогда стационарное распределение вероятностей (21) может быть найдено из следующих соотношений

$$\rho(x, y) = \sum_{\varphi^{m-1}} \beta(\varphi^{m-1}, (x, y)), \tag{25}$$

$$\lambda_0 \beta(\varphi^m) = \sum_{(x,y)} (d(\varphi_{m-1} | [(x, y), \varphi_0, \ldots, \varphi_{m-2}]) \cdot \\ \cdot \beta((x, y), \varphi_0, \ldots, \varphi_{m-2})),$$

$$\sum_{\varphi^m} \beta(\varphi^m) = 1.$$

Следствие 2. Пусть стационарные стратегии игроков не зависят от истории игры, т.е. $\nu_i(x|\varphi^m) \equiv \nu_i(x)$, $(i = 1, 2)$, а $d((x, y)|\varphi^m) = d(x, y) = M^2 \nu_1(x) \nu_2(y)$. Тогда стационарное распределение принимает вид

$$\rho(x, y) = \nu_1(x) \nu_2(y). \tag{26}$$

Любопытно, что в этом случае стационарное поведение игроков описывается смешанным расширением базисной игры.

Доказательство. Согласно (25), $\beta(\varphi^m)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\lambda_0 \beta(\varphi^m) = \sum_{(x,y)} d(\varphi_{m-1}) \beta((x, y), \varphi_0, \ldots, \varphi_{m-2}).$$

Из этой системы видно, что $\beta(\varphi^m) = c \prod_{i=0}^{m-1} d(\varphi_i)$, где c – нормировочная константа. Она находится из условия $1 = \sum_{\varphi^m} \beta(\varphi^m)$

и равна $c = M^{-2m}$. Таким образом, согласно (25),

$$\rho(x,y) = M^{-2m} \sum_{\varphi^{m-1}} \prod_{i=0}^{m-2} d(\varphi_i) d(x,y) = M^{-2} d(x,y) = \nu_1(x)\nu_2(y).$$

Q.E.D.

Следствие 3. Если стационарные стратегии зависят от истории игры глубины 1, т.е.

$$\nu_i(x|\varphi^m) = \nu_i(x|\varphi_0), \quad (i = 1,2),$$

$$d((x,y)|\varphi^m) = d((x,y)|\varphi_0) = M^2 \nu_1(x|\varphi_0)\nu_2(y|\varphi_0),$$

то стационарное распределение $\rho(s)$, $s = (x,y)$, может быть найдено из системы уравнений

$$\sum_{s' \in S_1 \times S_2} \rho(s')\nu(s',s) = \rho(s), \tag{27}$$

где $\nu(s',s) = \frac{d(s|s')}{M^2} = \nu_1(x|s')\nu_2(y|s')$.

Доказательство. Согласно следствию 1,

$$\lambda_0 \beta(\varphi^m) = \sum_{(x,y)} d(\varphi_{m-1}|(x,y))\beta((x,y),\varphi_0,\ldots,\varphi_{m-2}).$$

Положим

$$\beta(\varphi^m) = c \prod_{i=0}^{m-1} \gamma(\varphi_i).$$

Тогда $\gamma(s)$ при $s \in S_1 \times S_2$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda_0 \gamma(s) = \sum_{s' \in S_1 \times S_2} d(s|s')\gamma(s').$$

Для $\rho(s)$ имеем

$$\rho(s) = c \sum_{\varphi^{m-1}} \prod_{i=0}^{m-2} \gamma(\varphi_i)\gamma(s) = c'\gamma(s),$$

где c' – некоторая новая постоянная.

Таким образом, $\rho(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda_0 \rho(s) = \sum_{s'} d(s|s')\rho(s'),$$

которое после деления на $\lambda_0 = M^2$ совпадает с (27). *Q.E.D.*

Следствие 4. Стационарное распределение $\rho(x,y)$ допускает несколько представлений. Именно,

$$\forall i \ \ (0 \le i \le m-1)$$

$$\rho(x,y) = \sum_{\substack{\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1}\\ \varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{m-1}}} \alpha(\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1},(x,y),\varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{m-1})\times \tag{28}$$

$$\times\beta(\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1},(x,y),\varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{m-1}).$$

Доказательство. Используем индукцию по i, учитывая, что при $i = m-1$ соотношение (28) совпадает с выражением $\rho(x,y)$ из (21).

Пусть формула (28) справедлива для некоторого $1 \le k \le m-1$, покажем, что она верна и для $k-1$. Для доказательства умножим уравнение

$$\sum_s d(s|\varphi^m)\alpha(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},s) = \lambda_0\alpha(\varphi^m)$$

на $\beta(\varphi^m)$ и просуммируем обе части по $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1},\varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{m-1}$. Имеем

$$\rho(\varphi_k) = \lambda_0 \sum_{\substack{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}\\ \varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{m-1},\, s}} d(s|\varphi^m)\beta(\varphi^m)\alpha(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},s) =$$

$$= \sum_{\substack{\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}\\ \varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{m-1},\, s}} (\sum_{\varphi_0} d(s|\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})\times$$

$$\times\beta(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}))\alpha(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},s) =$$

$$= \lambda_0 \sum_{\substack{\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1}\\ \varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{m-1},\, s}} \beta(\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1},s)\alpha(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{m-1},s).$$

Q.E.D.

Используя (28), соотношение (25) можно переписать в виде

$$\forall i \ \ (0 \le i \le m-1)$$

$$\rho(x,y) = \sum_{\substack{\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1}\\ \varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{m-1}}} \beta(\varphi_0,\ldots,\varphi_{i-1},(x,y),\varphi_{i+1},\ldots,\varphi_{m-1}). \tag{29}$$

Отметим, что опираясь на (29), систему уравнений (27) можно вывести из (25), проводя непосредственное суммирование по $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-2}$.

Следствие 5. Пусть один из игроков (например, первый) при выборе хода не учитывает историю игры, а второй – использует историю глубины m. Тогда стационарное распределение $\rho(s)$, $s \in S_1 \times S_2$, $s = (s_1, s_2)$, имеет вид

$$\rho(s) = \nu_1(s_1)\rho_2(s_2), \tag{30}$$

где $\rho_2(s_2) = \sum_{\varphi^{m-1}} \gamma(\varphi^{m-1}, s_2)$, а функция γ удовлетворяет системе уравнений

$$\lambda_0\gamma(\varphi^{m-2}, s, y) = \sum_{s' \in S_1 \times S_2} d_2(y|[s', \varphi^{m-2}, s])d_1(s_1)\gamma(s', \varphi^{m-2}, s_2).$$

Как легко проверить, эти соотношения непосредственно вытекают из (25).

Из (30) ясно, что когда один из игроков не учитывает историю, то второму игроку также нет смысла ее учитывать, поскольку распределение $\rho_2(s_2)$ он может реализовать, выбрав его в качестве своей стационарной стратегии, не зависящей от истории.

3. Стационарное распределение для разложимой матрицы связей

Рассмотрим теперь ситуацию, когда матрица связей игры Π (а значит, и $\tilde{T}$) разложима. В этом случае мера максимальной энтропии может быть неединственной, и находится следующим образом [2, 3].

Преобразуем матрицу Π к каноническому виду, в котором матрица Π имеет блочно-треугольный вид (см. рис. 1).

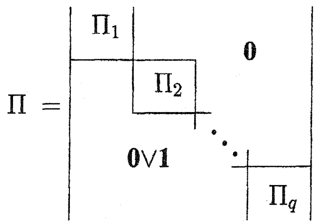

Рис. 1. Каноническая структура матрицы связей

На "диагонали" матрицы Π стоят квадратные матрицы Π_i $(i = \overline{1, q})$, каждая из которых либо неразложима, либо имеет размерность 1 и содержит единственный матричный элемент, равный нулю. Все матричные элементы матрицы Π, стоящие выше блочной диагонали, равны нулю, а матричные элементы ниже диагонали равны либо нулю, либо единице. Обозначим через L_i множество тех элементов из L, которые нумеруют строки матрицы Π_i; тогда выполнено

$$L = \bigcup_{i=1}^{q} L_i.$$

Будем говорить, что множество L_i доминирует множество L_j (обозначение $L_i > L_j$), если

1) $i \neq j$;

2) $\exists l \in L_i,\ \exists l' \in L_j \qquad \pi_{l'l} = 1.$

Из канонической структуры матрицы Π следует, что если для некоторых i, j выполнено $L_i > L_j$, то $i < j$.

Пусть $\{L_i\}_{i=1}^{r}$ – максимальные элементы по отношению доминирования (очевидно, можно считать, что эти максимальные элементы расположены в верхних строках матрицы Π, в противном случае достаточно перенумеровать элементы множества L.

Пусть μ_i – мера максимальной энтропии, отвечающая неразложимой ТМЦ $(\Pi^{+}_{L_i}, \sigma)$ $(i = \overline{1,r})$. Тогда мерой максимальной энтропии μ для исходной ТМЦ будет любая линейная комбинация мер μ_i:

$$\mu = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mu_i \quad \sum \gamma_i = 1; \quad \gamma_i \geq 0. \tag{31}$$

Однако, учитывая то обстоятельство, что разыгрывание приводит к определенной траектории игры, статистические свойства ее элементов будут описываться только одной из мер μ_i $(i = 1, 2)$, выбор которой будет зависеть от асимптотического поведения этой траектории.

Важный частный случай, когда матрица Π обязательно разложима, связан с возможностью игроков прервать игру, применив стратегию e. В этом случае существует такая история φ^m, что для игрока j

$$\nu_j(e|\varphi^m) \neq 0. \tag{32}$$

Поскольку мы предполагаем, что после прерывания игра не возобновляется, то из ситуации (e, e) возможен переход только в ситуацию (e, e). Тем самым в множестве всех дуг L выделяется подмножество L_1, содержащее единственную дугу $l_{\varphi^m \varphi^m}$ $(\varphi^m = [e, \dots, e])$, которое является максимальным элементом в совокупности $\{L_i\}_{i=1}^{q}$, т.е. матрица

П разложима. Для игр с возможностью окончания представляет интерес рассмотрение траекторий игры, которые ни разу не попадают в ситуацию прерывания (e, e). Эти траектории образуют некоторое подмножество множества Π_L^+. Статистические свойства таких траекторий можно изучить тем же способом, что и поведение элементов из Π_L^+. Однако, соотношение (2) для стационарных стратегий игроков уже не будет выполнено в силу условия (32). Поэтому стационарное распределение для них нужно вычислять на основе уравнений (21), а не (25).

Литература

1. Левченков В.С. Стационарные стратегии в супериграх. ДАН, 2004, т. 397, N 2, стр. 181-185.
2. Алексеев В.М. Символическая динамика. 11-ая математическая школа, Киев, Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1976.
3. Левченков В.С. Элементы эргодической теории с приложениями к проблемам выбора, части I, II. Изд-во ВМиК МГУ, 1997.
4. Parry, W. Intrinsic Markov Chains. Trans. Amer. Math. Soc. V. 112, N1, 55-66, 1964.
5. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1963.