С. А. Ложкин, Б. Р. Данилов

О ЗАДЕРЖКЕ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МОДЕЛИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЗАДЕРЖЕК ЭЛЕМЕНТОВ БАЗИСА ПО ВХОДАМ[1]

Введение

Рассматриваются формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ) над произвольным конечным полным базисом Б, Б $= \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_b\}$, где функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant b$, имеет k_i, $k_i \geqslant 1$, входов и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ) $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$, которая в случае $k_i \geqslant 2$ существенно зависит от всех своих булевых переменных (БП). При этом формулами считаются те одновыходные СФЭ, в которых выход любого ФЭ либо поступает на вход ровно одного (другого) ФЭ, либо является выходом схемы.

Модель задержки СФЭ над Б, которая рассматривается в данной работе, впервые введена в [1] и является обобщением модели задержки из работ [2–4]. Будем считать, что для каждого ФЭ $\mathcal{E}_i$ и каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, определена положительная *задержка* $T_{i,j}$ *ФЭ* $\mathcal{E}_i$ *по входу с номером* j. Схему ω назовем *цепью*, если она представляет собой последовательность ФЭ $\mathcal{E}_{i_1}, \ldots, \mathcal{E}_{i_v}$, соединенных между собой так, что выход предыдущего элемента последовательности поступает на один из входов последующего. При этом число v будем считать *глубиной* цепи ω и будем использовать для ее записи обозначение $D(\omega)$. *Инициальной цепью* назовем цепь ω, у которой выделен один из входов ее первого ФЭ, а ее *задержкой* $T(\omega)$ будем считать сумму задержек ФЭ цепи по соединяющим их входам и выделенному входу первого ФЭ. По аналогии с $T(\omega)$ определим величину $\widehat{T}(\omega)$, для которой в указанную сумму включены только задержки ФЭ с более чем одним входом и которая равна нулю в случае, когда цепь ω полностью составлена из одновходовых элементов. Подсхему СФЭ Σ, являющуюся инициальной цепью, выделенный вход которой — это вход Σ, и оканчивающуюся на одном из ее выходных ФЭ (то есть ФЭ, выход которых поступает на выход схемы), будем называть *главной цепью СФЭ* Σ.

Под *задержкой* $T(\Sigma)$ *СФЭ* Σ в рассматриваемой модели понимается величина, равная максимальной из задержек ее инициальных цепей. Величину $\widehat{T}(\Sigma)$ СФЭ Σ определим аналогично $T(\Sigma)$ на основе величин $\widehat{T}(\omega)$, где ω — инициальная цепь Σ. Под *глубиной* $D(\Sigma)$ (*сложностью* $L(\Sigma)$)

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 09-01-00817-а.

СФЭ Σ будем понимать максимальную из глубин ее цепей (соответственно количество ее ФЭ). Задержка $T_{\text{Б}}(f)$ ФАЛ f и ее глубина $D_{\text{Б}}(f)$, а также функция Шеннона $T_{\text{Б}}(n)$ для задержки ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ в классе СФЭ над Б определяются обычным образом.

В описанной модели поднятие ветвлений выходов ФЭ к входам схемы не изменяет ни ее задержки, ни глубины. Отсюда, аналогично [5], следует, что для каждой СФЭ найдется эквивалентная ей формула (система формул) в том же базисе, задержка которой совпадает с задержкой исходной СФЭ, и поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением формул в базисе Б.

Рассмотрим не пустое (в силу полноты Б) множество $\widehat{\text{Б}}$, состоящее из ФЭ базиса Б, имеющих не менее двух входов. Без ограничения общности предположим, что $\widehat{\text{Б}} = \{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_a\}$. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant a$, определим связанное с ним *характеристическое уравнение* относительно неизвестной величины κ

$$\kappa^{-T_{i,1}} + \cdots + \kappa^{-T_{i,k_i}} = 1. \tag{1}$$

Пусть κ_i, $\kappa_i > 1$, — единственный корень указанного характеристического уравнения, рассматриваемого на положительной полуоси. Для ФЭ $\mathcal{E}_i$ определим его *приведенную задержку* τ_i равенством[1] $\tau_i = 1/\log \kappa_i$. Определим *приведенную задержку* $\tau_{\text{Б}}$ *базиса* Б равенством $\tau_{\text{Б}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant a} \tau_i$ и, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\tau_1 = \tau_{\text{Б}}$ то есть, что приведенная задержка базиса Б достигается на ФЭ $\mathcal{E}_1$.

Будем говорить, что ФЭ $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant a$, — *ФЭ с равномерным распределением задержки по входам* или, иначе, *равномерный ФЭ*, если все задержки $\mathcal{E}_i$ по его входам совпадают между собой и равны некоторому действительному числу T_i. Из (1) следует, что при этом приведенная задержка ФЭ $\mathcal{E}_i$ записывается в виде $\tau_i = T_i/\log k_i$ и совпадает с его приведенной задержкой, введенной в [2,3]. Назовем базис Б, составленный только из равномерных ФЭ, *базисом с равномерным распределением задержки по входам* или, иначе, *равномерным базисом*. Очевидно, что в случае равномерного базиса Б модель задержки, рассматриваемая в данной работе, совпадает с моделью [3] и что при этом введенная нами приведенная задержка $\tau_{\text{Б}}$ базиса Б равна аналогичной величине из [3].

Из [2] следует, что для функции Шеннона $T_{\text{Б}}(n)$ в случае равномерного базиса Б справедливы соотношения:[2]

$$T_{\text{Б}}(n) = \tau_{\text{Б}} n \pm O(\log n),$$

и что для почти всех ФАЛ возможно построение схем асимптотически оп-

[1]Здесь и далее, когда основание логарифма не указано явно, предполагается логарифм по основанию два.

[2]Равенство $h(n) = t(n) \pm O(g(n))$ означает, что $|h(n) - t(n)| = O(g(n))$, где $g(n) \geqslant 0$.

тимальных как по сложности, так и по задержке. В работе [3] для случая равномерного базиса установлены асимптотические оценки высокой степени точности функции Шеннона $T_{\text{Б}}(n)$, имеющие вид:

$$T_{\text{Б}}(n) = \tau_{\text{Б}}(n - \log\log n) \pm O(1),$$

которые, как оказалось [1], верны и для базисов с произвольным распределением задержки по входам. В работе [4] в случае равномерного базиса Б приведены оценки задержки стандартной мультиплексорной ФАЛ[1] μ_n порядка n, которые имеют вид:

$$T_{\text{Б}}(\mu_n) = \tau_{\text{Б}} n \pm O(1).$$

В данной работе указанные соотношения устанавливаются для базиса Б с произвольным распределением задержки по входам, и на их основе дается полное доказательство результатов [1], относящихся к описанной модели. Основными результатами настоящей работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для задержки ФАЛ μ_n в базисе* Б *с произвольным распределением задержки по входам справедливы соотношения:*

$$T_{\text{Б}}(\mu_n) = \tau_{\text{Б}} n \pm O(1),$$

причем формула, на которой достигается данная верхняя оценка, имеет линейную относительно числа своих БП сложность.

Теорема 2. *Для функции Шеннона $T_{\text{Б}}(n)$ в базисе* Б *с произвольным распределением задержки по входам выполняются соотношения:*

$$T_{\text{Б}}(n) = \tau_{\text{Б}}(n - \log\log n) \pm O(1).$$

Некоторые определения, обозначения и вспомогательные результаты[2]

Примем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем изложении. Пусть n натуральное число ($n = 1, 2, \ldots$). Обозначим множество всех двоичных наборов длины n через B^n, тогда в наших обозначениях $B^1 = B = \{0, 1\}$. Пусть базис Б_0 состоит из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$, $\mathcal{E}_{\vee}$, $\mathcal{E}_{\neg}$, которые реализуют ФАЛ $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1$ соответственно и задержка которых по каждому входу равна 1. Для сокращения записи функционала глубины ФАЛ f положим $D(f) = D_{\text{Б}_0}(f)$.

[1]Стандартная мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n имеет n «адресных» БП, 2^n «информационных» БП и совпадает с той своей информационной БП, номер которой в двоичной системе счисления задается набором значений ее адресных БП.

[2]Те понятия, которые в данной работе не определяются, могут быть найдены в [5].

Число, двоичной записью которого является набор α, $\alpha \in B^n$, будем записывать через $\nu(\alpha)$. С другой стороны, набор длины n, который является записью целого числа a, $0 \leqslant a \leqslant 2^n - 1$, в двоичной системе счисления, обзначим через $\nu_n^{-1}(a)$. Назовем *альтернированием* $\mathrm{alt}\,(\alpha)$ *булевого набора* α минимальное число отрезков постоянства, на которые он распадается, уменьшенное на единицу, а *альтернированием* $\mathrm{alt}\,(f)$ *ФАЛ* f — альтернирование набора, составленного из значений ФАЛ f, взятых на наборах значений ее аргументов, расположенных в порядке следования задаваемых ими с помощью ν-нумерации чисел.

Назовем ФАЛ h *ступенчатой*, если $\mathrm{alt}\,(h) \leqslant 1$, и заметим, что любая такая ФАЛ является либо монотонной, либо антимонотонной. Для каждого i, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$, назовем ФАЛ $h_i(x_1, \ldots, x_n)$ *i–ой монотонной ступенчатой ФАЛ порядка* n, если $h_i(\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $\nu(\alpha) < i$. При этом ФАЛ $\overline{h}_i$ будем считать *i-ой антимонотонной ступенчатой ФАЛ порядка* n.

Лемма 1. *Для всякого σ, $\sigma \in B$, и любых целых n, $n \geqslant 2$, и i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$, в классе формул над базисом* Б$_0$ *найдется формула $\mathcal{F}_{\sigma,i}^{(n)}$, реализующая i–ую ступенчатую ФАЛ*[1] *h_i^σ порядка n, для которой выполняются неравенства:*[2]

$$D(\mathcal{F}_{\sigma,i}^{(n)}) \leqslant 2\,\lceil \log n \rceil - \sigma, \qquad L(\mathcal{F}_{\sigma,i}^{(n)}) \leqslant n\,\lceil \log n \rceil + 2 - \sigma.$$

Доказательство. Построим формулы $\mathcal{F}_{\sigma,i}^{(n)}$, глубина которых удовлетворяет условию леммы, а сложность — более сильному условию:

$$L(\mathcal{F}_{i,\sigma}^{(n)}) \leqslant 2^{\lceil \log n \rceil - 1}\,\lceil \log n \rceil + 2 - \sigma.$$

Проведем построение указанных формул индукцией по k ($k = 1, 2, \ldots$) для всех n из диапазона $2 \leqslant n \leqslant 2^k$.

Базис индукции составляет случай, когда $k = 1$, в котором для единственно возможного $n = 2$ и каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, для реализации соответствующих ФАЛ h_i^σ, $\sigma \in B$, достаточно взять формулы $\mathcal{F}_{\sigma,i}^{(2)}$, задаваемые равенствами:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}_{1,1}^{(2)} = x_1 \vee x_2, & \mathcal{F}_{1,2}^{(2)} = x_1, & \mathcal{F}_{1,3}^{(2)} = x_1 x_2, \\ \mathcal{F}_{0,1}^{(2)} = \overline{x_1 \vee x_2}, & \mathcal{F}_{0,2}^{(2)} = \overline{x}_1, & \mathcal{F}_{0,3}^{(2)} = \overline{x_1 x_2}. \end{array}$$

Пусть для натурального k искомые формулы построены при всех n таких, что $2 \leqslant n \leqslant 2^k$. Для доказательства индуктивного перехода доста-

[1] Обозначение x^σ, $\sigma \in B$, понимается в следующем смысле: $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$.

[2] Через $\lfloor a \rfloor$ и $\lceil a \rceil$ мы обозначим ближайшее к a снизу и соответственно сверху целое число.

точно построить требуемые формулы для любого n заключенного в пределах $2^k+1 \leqslant n \leqslant 2^{k+1}$, то есть такого n, для которого

$$\lceil \log n \rceil = k+1. \qquad (2)$$

Заметим, что ФАЛ h_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n-1$, порядка n получается из ФАЛ $h_{i2^{2^{k+1}-n}}$ порядка 2^{k+1} удалением последних $(2^{k+1}-n)$ фиктивных БП. Построим для $n=2^{k+1}$ и i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{2^{k+1}}-1$, формулу $\mathcal{F}_{1,i}^{(n)}$, реализующую монотонную ступенчатую ФАЛ h_i порядка n. Рассмотрим ФАЛ h_i как ФАЛ от БП x, $x=(x',x'')$, где

$$x=(x_1,\ldots,x_{2^{k+1}}), \quad x'=(x_1,\ldots,x_{2^k}), \quad x''=(x_{2^k+1},\ldots,x_{2^{k+1}}).$$

В соответствии с заданным разбиением БП x на подгруппы x' и x'' представим i в виде:

$$i=2^{2^k}i'+i'',$$

где[1] $i',i'' \in [0,2^{2^k}-1]$, причем i' и i'' не равны нулю одновременно. Искомую формулу $\mathcal{F}_{1,i}^{(n)}$ построим на основе следующего разложения ФАЛ h_i:

$$h_i(x)=h_{i'+1}(x) \vee h_{i''}(x'')K_{i'}^{+}(x'),$$

где ФАЛ $K_{i'}^{+}(x')$ представляет собой конъюнкцию тех и только тех БП группы x', которые соответствуют единичным разрядам набора $\nu_{2^k}^{-1}(i')$. Пусть $i' \notin \{0,2^{2^k}-1\}$ и $i'' \neq 0$. По предположению индукции построим для N, $N=2^k$, и каждого j, $j \in \{i',i'+1,i''\}$, формулу $\mathcal{F}_{1,j}^{(N)}$, для которой справедливы неравенства:

$$D(\mathcal{F}_{1,j}^{(N)}) \leqslant 2\cdot k-1, \qquad L(\mathcal{F}_{1,j}^{(N)}) \leqslant 2^{k-1}k+1. \qquad (3)$$

Построим, далее, формулу $\mathcal{K}_{i'}^{+}$, реализующую ФАЛ $K_{i'}^{+}$ на основе квазиполного дерева из ФЭ $\mathcal{E}_{\&}$. Для формулы $\mathcal{K}_{i'}^{+}$ выполняются соотношения:

$$D(\mathcal{K}_{i'}^{+}) \leqslant k, \qquad L(\mathcal{K}_{i'}^{+}) \leqslant 2^k-1. \qquad (4)$$

Искомую формулу $\mathcal{F}_{1,i}^{(n)}$ определим равенством

$$\mathcal{F}_{1,i}^{(n)}(x)=\mathcal{F}_{1,i'+1}^{(N)}(x') \vee \mathcal{F}_{1,i''}^{(N)}(x'')\mathcal{K}_{i'}^{+}(x'),$$

которое в случаях, когда либо $i'=0$, либо $i''=0$, либо $i'=2^{2^k}-1$, а $i''\neq 0$, переходит в одно из равенств:

$$\mathcal{F}_{1,i}^{(n)}(x)=\mathcal{F}_{1,i'+1}^{(N)}(x') \vee \mathcal{F}_{1,i''}^{(N)}(x''), \qquad \mathcal{F}_{1,i}^{(n)}(x)=\mathcal{F}_{1,i'}^{(N)}(x'),$$
$$\mathcal{F}_{1,i}^{(n)}(x)=\mathcal{F}_{1,i''}^{(N)}(x'')\mathcal{K}_{i'}^{+}(x').$$

[1] Через $[a,b]$ обозначается множество целых чисел, заключенных между числами a и b включительно.

Для построенной формулы $\mathcal{F}^{(n)}_{1,i}$, используя (2)–(4), получим:

$$D(\mathcal{F}^{(n)}_{1,i}) \leqslant 2 \cdot k - 1 + 2 = 2 \cdot (k+1) - 1 = 2\lceil \log n \rceil - 1,$$
$$L(\mathcal{F}^{(n)}_{1,i}) \leqslant 2 \cdot (2^{k-1}k + 1) + 2^k - 1 = 2^k(k+1) + 1 \leqslant 2^{\lceil \log n \rceil - 1}\lceil \log n \rceil + 1.$$

Инвертируя с помощью ФЭ $\mathcal{E}_\neg$ формулу $\mathcal{F}^{(n)}_{1,i}$, получим формулу $\mathcal{F}^{(n)}_{0,i}$, реализующую антимонотонную ступенчатую ФАЛ $\overline{h}_i$ такую, что

$$D(\mathcal{F}^{(n)}_{0,i}) \leqslant 2\lceil \log n \rceil, \qquad L(\mathcal{F}^{(n)}_{0,i}) \leqslant 2^{\lceil \log n \rceil - 1}\lceil \log n \rceil + 2.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для целого n, $n \geqslant 2$, и любой ФАЛ $g(x_1, \ldots, x_n)$, отличной от константы, в классе формул над базисом* Б$_0$ *найдется формула $\mathcal{F}_g$, реализующая функцию g, для которой справедливы неравенства:*

$$D(\mathcal{F}_g) \leqslant 2\lceil \log n \rceil + \big\lfloor \log\big(\mathrm{alt}\,(g)\big)\big\rfloor + 1, \tag{5}$$
$$L(\mathcal{F}_g) \leqslant \frac{3}{2} \cdot n\lceil \log n \rceil\,\mathrm{alt}\,(g). \tag{6}$$

Доказательство. В случае $n = 2$ в справедливости данной леммы нетрудно убедиться непосредственным перебором. Пусть $n \geqslant 3$ и q — это число отрезков постоянства ФАЛ g из условия леммы. Для ступенчатых ФАЛ, отличных от констант, неравенства (5) и (6) вытекают из леммы 1. Для всех остальных ФАЛ g из условия леммы следует, что $q \geqslant 3$.

Найдем такое σ, $\sigma \in B$, что число тех отрезков постоянства ФАЛ g, на которых она принимает значение σ, не превосходит $\lfloor q/2 \rfloor$. Для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant \lfloor q/2 \rfloor$, сопоставим k-ому по счету отрезку σ-постоянства I_k, $I_k = [a_k, b_k]$, ФАЛ g формулу $\mathcal{G}_{\sigma,k}$ вида:

$$\mathcal{G}_{\sigma,k} = \begin{cases} \mathcal{F}^{(n)}_{\overline{\sigma},b_k+1}, & \text{если } k = 1,\ a_k = 0; \\ \mathcal{F}^{(n)}_{\sigma,a_k}, & \text{если } k = \lfloor q/2 \rfloor,\ b_k = 2^n - 1; \\ \mathcal{F}^{(n)}_{1,a_k} \vee \mathcal{F}_{0,b_k+1}, & \text{если } \sigma = 0,\ a_k \neq 0,\ b_k \neq 2^n - 1; \\ \mathcal{F}^{(n)}_{0,a_k} \,\&\, \mathcal{F}_{1,b_k+1}, & \text{если } \sigma = 1,\ a_k \neq 0,\ b_k \neq 2^n - 1; \end{cases}$$

где $\mathcal{F}^{(n)}_{\rho,j}$ ($\rho \in B$, $j \in \{a_k, b_k + 1\}$) — формула из леммы 1, для которой справедливы неравенства:

$$D(\mathcal{F}^{(n)}_{\rho,j}) \leqslant 2\lceil \log n \rceil - \rho, \qquad L(\mathcal{F}^{(n)}_{\rho,j}) \leqslant n\lceil \log n \rceil + 2 - \rho. \tag{7}$$

Формула $\mathcal{G}_{\sigma,k}$ реализует характеристическую ФАЛ отрезка I_k, если $\sigma = 1$, и реализует ее отрицание, если $\sigma = 0$. Для $\mathcal{G}_{\sigma,k}$ выполняются соотношения:

$$D(\mathcal{G}_{\sigma,k}) \leqslant 2\lceil \log n \rceil + 1, \qquad L(\mathcal{G}_{\sigma,k}) \leqslant 2n\lceil \log n \rceil + 4. \tag{8}$$

Кроме того, в случае четного q верно одно из двух неравенств:

$$L(\mathcal{G}_{\sigma,1}) \leqslant (n\lceil\log n\rceil + 2) \quad \text{или} \quad L(\mathcal{G}_{\sigma,\lfloor q/2\rfloor}) \leqslant (n\lceil\log n\rceil + 2), \tag{9}$$

а в случае нечетного q величина $\mathrm{alt}\,(g)$ совпадает с величиной $2\cdot\lfloor q/2\rfloor$. Формулу $\mathcal{F}_g$, реализующую ФАЛ g, определим равенством:

$$\mathcal{F}_g = \begin{cases} \bigwedge_{i=1}^{k} \mathcal{G}_{0,i}, & \text{если } \sigma = 0; \\ \bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{G}_{1,i}, & \text{если } \sigma = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Для формулы $\mathcal{F}_g$, имея в виду соотношение $q \geqslant 3$ и соображения относительно четности q, в силу (7)–(10) и вспомогательных соотношений:

$$\log\lfloor q/2\rfloor \leqslant \log q - 1, \qquad \lceil\log q\rceil - 1 = \lfloor\log(q-1)\rfloor,$$

вытекают неравенства, которые завершают доказательство леммы:
1. Для глубины $\mathcal{F}_g$

$$D(\mathcal{F}_g) \leqslant 2\lceil\log n\rceil + 1 + \lceil\log\lfloor q/2\rfloor\rceil \leqslant 2\lceil\log n\rceil + \big\lfloor\log\big(\mathrm{alt}\,(g)\big)\big\rfloor + 1.$$

2. Для сложности $\mathcal{F}_g$ в случае четного q

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}_g) &\leqslant (2n\lceil\log n\rceil + 4)\cdot(\lfloor q/2\rfloor - 1) + (n\lceil\log n\rceil + 2) + 2^{\lceil\log\lfloor q/2\rfloor\rceil} - 1 \leqslant \\ &\leqslant (n\lceil\log n\rceil + 2)((q-1) - 1) + (n\lceil\log n\rceil + 2) + (q-1) \leqslant \\ &\leqslant (n\lceil\log n\rceil + 3)\cdot\mathrm{alt}\,(g) \leqslant (3/2)\cdot n\lceil\log n\rceil\,\mathrm{alt}\,(g). \end{aligned}$$

3. Для сложности $\mathcal{F}_g$ в случае нечетного q

$$\begin{aligned} L(\mathcal{F}_g) &\leqslant (2n\lceil\log n\rceil + 4)\lfloor q/2\rfloor + 2^{\lceil\log\lfloor q/2\rfloor\rceil} - 1 \leqslant \\ &\leqslant (n\lceil\log n\rceil + 2)\cdot(2\lfloor q/2\rfloor) + (q-1) \leqslant (n\lceil\log n\rceil + 3)\cdot\mathrm{alt}\,(g) \leqslant \\ &\leqslant (3/2)\cdot n\lceil\log n\rceil\,\mathrm{alt}\,(g). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Мультиплексорные ФАЛ. Нижние оценки задержки стандартной мультиплексорной ФАЛ и функции Шеннона для задержки

Пусть Δ, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, — разбиение куба B^n от БП x, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, на попарно непересекающиеся непустые подмножества (компоненты разбиения Δ) $\delta_1, \ldots, \delta_p$, объединение которых равно B^n. Определим *мультиплексорную ФАЛ μ_Δ, соответствующую разбиению Δ,* равенством

$$\mu_\Delta(x,\, u_1, \ldots, u_p) = \bigvee_{i=1}^{p} \chi_{\delta_i}(x) u_i,$$

где χ_{δ_i} — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i, при этом стандартную мультиплексорную ФАЛ μ_n порядка n,

$$\mu_n(x,\ u_0,\ldots,u_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in B^n} x_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot u_{\nu(\sigma)},$$

можно рассматривать как мультиплексорную ФАЛ μ_Δ, связанную с тривиальным разбиением Δ таким, что $\delta_{\nu(\sigma)} = \{\sigma\}$ для каждого σ, $\sigma \in B^n$.

Для формулы $\mathcal{F}$ определим ее *ранг* $R(\mathcal{F})$ как число дуг, исходящих из входов $\mathcal{F}$, или, иначе, как число вхождений БП в запись $\mathcal{F}$. Очевидно, что формула $\mathcal{F}$, состоящая только из ФЭ $\mathcal{E}_i$, $1 \leqslant i \leqslant a$, удовлетворяет соотношению:

$$R(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F})(k_i - 1) + 1. \tag{11}$$

Переменная x считается *существенной* переменной формулы $\mathcal{F}$, если она является существенной БП реализуемой ею ФАЛ. Формула $\mathcal{F}$ называется *абсолютной* (*бесповторной*), если каждая ее БП (соответственно каждая ее существенная БП) входит в $\mathcal{F}$ ровно 1 раз.

Лемма 3. *Для любой формулы $\mathcal{F}$ над базисом* Б *верно неравенство:*

$$R(\mathcal{F}) \leqslant 2^{\widehat{T}(\mathcal{F})/\tau_{\text{Б}}}, \tag{12}$$

при этом для любого действительного T, $T > 0$, в классе формул над базисом Б *найдется такая абсолютная формула $\widetilde{\mathcal{F}}$, которая состоит из ФЭ $\mathcal{E}_1$ и для которой выполняются неравенства:*

$$T(\widetilde{\mathcal{F}}) \leqslant T + T_1, \qquad R(\widetilde{\mathcal{F}}) \geqslant \kappa_1^T, \qquad \text{где } T_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant k_1} T_{1,j}. \tag{13}$$

Доказательство. Доказательство (12) проведем индукцией по глубине $D(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$. При $D(\mathcal{F}) = 0$ утверждение леммы, очевидно, выполняется. Пусть (12) верно для любой формулы глубины меньше чем d, и пусть для некоторого s, $1 \leqslant s \leqslant b$, формула $\mathcal{F}$ глубины d имеет вид:

$$\mathcal{F} = \varphi_s(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_{k_s}),$$

где глубина главных подформул $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_{k_s}$ формулы $\mathcal{F}$ меньше, чем d. Для j, $1 \leqslant j \leqslant k_s$, положим $t_j = \widehat{T}(\mathcal{F}_j)$. Исходя из индуктивного предположения и указанного выше вида формулы $\mathcal{F}$, получим:

$$R(\mathcal{F}) = \sum_{j=1}^{k_s} R(\mathcal{F}_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k_s} 2^{\frac{t_j}{\tau_{\text{Б}}}}. \tag{14}$$

При $k_s = 1$ соотношение (12) удовлетворяется в силу очевидного неравенства $t_1 \leqslant \widehat{T}(\mathcal{F})$. В случае $k_s > 1$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant a$, рассмотрим соответствующий корень $\varkappa_i$ характеристического уравнения (1) и положим $\varkappa_{\text{Б}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant a} \varkappa_i$. Из выбора $\varkappa_{\text{Б}}$ и того, что для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k_s$, выполняется соотношение

$$\widehat{T}(\mathcal{F}) - t_j \geqslant T_{s,j},$$

следует цепочка неравенств

$$\sum_{j=1}^{k_s} \varkappa_{\text{Б}}^{t_j - \widehat{T}(\mathcal{F})} \leqslant \sum_{j=1}^{k_s} \varkappa_{\text{Б}}^{-T_{s,j}} \leqslant 1,$$

из которой вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{k_s} \varkappa_{\text{Б}}^{t_j} \leqslant \varkappa_{\text{Б}}^{\widehat{T}(\mathcal{F})}. \tag{15}$$

Неравенства (14) и (15) с учетом соотношения $\varkappa_{\text{Б}} = 2^{1/\tau_{\text{Б}}}$ завершают доказательство (12).

Искомая формула $\widetilde{\mathcal{F}}$, удовлетворяющая (13), строится индукцией по числу i ($i = 1, 2, \dots$), для которого

$$(i-1)T_1' \leqslant T \leqslant iT_1', \qquad \text{где } T_1' = \min_{1 \leqslant j \leqslant k_1} T_{1,j}. \tag{16}$$

Базис этой индукции составляет очевидный случай $i = 1$, когда в качестве искомой формулы логично взять формулу $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \varphi_1(x_1, \dots, x_{k_1})$.

Пусть, далее, (13) доказано для любой задержки, не превосходящей $(i-1)T_1'$, и пусть задержка T удовлетворяет (16), где $i \geqslant 2$. По индуктивному предположению построим для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k_1$, формулу $\widetilde{\mathcal{F}}_j$, которая состоит из ФЭ $\mathcal{E}_1$ и для которой

$$T\big(\widetilde{\mathcal{F}}_j\big) \leqslant \big(T - T_{1,j}\big) + T_1, \qquad R\big(\widetilde{\mathcal{F}}_j\big) \geqslant \varkappa_1^{T - T_{1,j}}. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться в том, что формула

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \varphi_1\big(\widetilde{\mathcal{F}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{F}}_{k_1}\big)$$

является искомой. Действительно, в силу (17) для нее выполняются соотношения:

$$T\big(\widetilde{\mathcal{F}}\big) = \max_{1 \leqslant j \leqslant k_1} \big\{T\big(\widetilde{\mathcal{F}}_j\big) + T_{1,j}\big\} \leqslant T + T_1, \tag{18}$$

$$R\big(\widetilde{\mathcal{F}}\big) = \sum_{j=1}^{k_1} R\big(\widetilde{\mathcal{F}}_j\big) \geqslant \varkappa_1^T \sum_{j=1}^{k_1} \varkappa_1^{-T_{1,j}} = \varkappa_1^T. \tag{19}$$

Лемма доказана. $\square$

Замечание. *В случае* $T = \tau_{Б} \log \tilde{r}$ *для построенной формулы* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *из* (11)–(13) *следуют соотношения:*

$$\tilde{r} \leqslant R\big(\widetilde{\mathcal{F}}\big) \leqslant K_1 \tilde{r}, \quad T\big(\widetilde{\mathcal{F}}\big) \leqslant \tau_{Б} \log \tilde{r} + T_1, \quad L\big(\widetilde{\mathcal{F}}\big) \leqslant \frac{R(\widetilde{\mathcal{F}}) - 1}{k_1 - 1},$$

где K_1*,* $K_1 = \kappa_1^{T_1}$*, — константа, зависящая только от базиса* Б.

Следствие.

$$T_{Б}(\mu_n) \geqslant \tau_{Б} \log(n + 2^n).$$

Лемма 4. *Для любого действительного* T*,* $T \geqslant 0$*, и любого натурального* n *число попарно не эквивалентных формул над базисом* Б*, которые зависят от БП* $x_1, \ldots, x_n$ *и задержка которых не больше* T*, не превосходит*[1] $(c_1 n)^{2^{T/\tau_{Б}}}$.

Доказательство. Формулу $\mathcal{F}$, удовлетворяющую условию леммы, можно получить, выбрав сначала ее каркас $\mathcal{F}'$, то есть абсолютную формулу ранга $R(\mathcal{F})$, которая получается из $\mathcal{F}$ заменой i-го вхождения, $1 \leqslant i \leqslant R(\mathcal{F})$, БП в $\mathcal{F}$ на БП x_i, и приписав каждому входу каркаса $\mathcal{F}'$ одну из БП $x_1, \ldots, x_n$. Выбор каркаса $\mathcal{F}'$ можно осуществить не более, чем $c_1^{R(\mathcal{F})}$ способами, а приписать его входам переменные — не более, чем $n^{R(\mathcal{F})}$ способами. Имея в виду (12), получаем требуемую оценку. Лемма доказана. □

Нижняя оценка функции Шеннона получается на основе леммы 4 из обычных мощностных соображений подобно тому, как это делается, например, в [5].

Теорема 3. *Для всех натуральных* n *выполняется неравенство*

$$T_{Б}(n) \geqslant \tau_{Б}(n - \log \log n) - c_2.$$

Обобщенное разложение мультиплексорных функций

Доказываемые в данном разделе леммы 5 и 6 позволяют представить мультиплексорную ФАЛ общего вида в виде суперпозиции «внешней» ФАЛ, которая является произвольной наперед заданной ФАЛ от соответствующего числа БП, и «внутренних» ФАЛ, каждая из которых зависит не более, чем от одной информационной БП.

Дадим еще несколько необходимых определений. Максимальную из задержек (глубин) главных цепей, начинающихся на помеченных символами группы БП x входах формулы $\mathcal{F}$, будем называть *задержкой* (*соответственно глубиной*) *формулы* $\mathcal{F}$ *по переменным* x и обозначать $T_x(\mathcal{F})$ (соответственно $D_x(\mathcal{F})$). Обозначим величину равную задержке (глубине) формулы $\mathcal{F}$ по ее существенным БП через $T_{сущ.}(\mathcal{F})$ (соответственно $D_{сущ.}(\mathcal{F})$).

[1]Буквой c с индексами обозначаются различные константы, зависящие от базиса Б.

По аналогии с введенными выше величинами T_1 и T_1' (см. лемму 3) для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant a$, обозначим через T_i (T_i') максимальную (соответственно минимальную) из задержек входов ФЭ $\mathcal{E}_i$, через $T_{\text{Б}}$ — максимальную из задержек входов всех ФЭ базиса Б, через $k_{\text{Б}}$ — максимальное число входов у элементов базиса Б, через K_i — величину $\kappa_i^{T_i}$, а через $K_{\text{Б}}$ — величину $\kappa_1^{T_{\text{Б}}}$. Заметим, что из (1) вытекают неравенства: $K_i \geqslant k_i$ и $K_{\text{Б}} \geqslant k_{\text{Б}}$. Из полноты базиса Б следует (см., например, [6]), что существуют формулы над Б, реализующие константы с глубиной не более 3, поэтому для любой формулы $\mathcal{F}$ над Б найдется эквивалентная ей формула $\mathcal{F}'$ в базисе Б такая, что

$$D(\mathcal{F}') \leqslant D_{\text{сущ.}}(\mathcal{F}) + 3 \qquad \text{и} \qquad T(\mathcal{F}') \leqslant T_{\text{сущ.}}(\mathcal{F}) + 3T_{\text{Б}}. \tag{20}$$

Из полноты Б также вытекает, что для некоторых булевых констант σ_1, σ_2 и операции $\circ$, $\circ \in \{\&, \vee\}$, в классе формул над Б найдутся бесповторные формулы $\mathcal{F}_\circ^{\sigma_1,\sigma_2}$ и $\mathcal{F}_\neg$, реализующие соответственно ФАЛ $x_1^{\sigma_1} \circ x_2^{\sigma_2}$ и $\overline{x}_1$, причем глубина и сложность этих формул удовлетворяют соотношениям:

$$D_{\text{сущ.}}(\mathcal{F}_\neg) \leqslant 1, \qquad D_{\text{сущ.}}(\mathcal{F}_\circ^{\sigma_1,\sigma_2}) \leqslant 1, \tag{21}$$

$$L(\mathcal{F}_\neg) \leqslant k_{\text{Б}}^3, \qquad L(\mathcal{F}_\circ^{\sigma_1,\sigma_2}) \leqslant k_{\text{Б}}^3. \tag{22}$$

Лемма 5. *Для любой существенной ФАЛ $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ и любого разбиения Δ, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_d)$, $d \leqslant p$, куба B^n от БП x, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, существуют ФАЛ $g_i(x, u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$, которые монотонно или антимонотонно зависят от БП $u_1, \ldots, u_d$, а также ФАЛ $g_s(x)$, $d+1 \leqslant s \leqslant p$, если $d < p$, такие что $\varphi(g_1, \ldots, g_p) = \mu_\Delta(x,\, u_1, \ldots, u_d)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $d = p$. Существенность ФАЛ φ означает, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, найдутся булевские константы $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такие, что

$$\varphi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\, y_i,\, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}.$$

Значит, определив для каждого указанного i ФАЛ g_i так, что

$$g_i(\beta, u_i) = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{если } \beta \in \delta_j \text{ при некотором } j \neq i; \\ u_i \oplus \alpha_{i,i}, & \text{если } \beta \in \delta_i; \end{cases} \tag{23}$$

для любого β, $\beta \in \delta_i$, имеем:

$$\begin{aligned} &\varphi\big(g_1(\beta, u_1), \ldots, g_{i-1}(\beta, u_{i-1}),\, g_i(\beta, u_i),\, g_{i+1}(\beta, u_{i+1}), \ldots, g_p(\beta, u_p)\big) = \\ &= \varphi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\, u_i \oplus \alpha_{i,i},\, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = (u_i \oplus \alpha_{i,i}) \oplus \alpha_{i,i} = u_i = \\ &= \mu_\Delta(\beta,\, u_1, \ldots, u_p). \end{aligned} \tag{24}$$

Из (23) следует, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, ФАЛ g_i зависит от БП u_i только на компоненте δ_i, на которой $g_i = u_i \oplus \alpha_{i,i}$. Следовательно, ФАЛ g_i либо монотонна, либо антимонотонна по БП u_i.

Случай, когда $d < p$, сводится к уже рассмотреному, если формально считать недостающие компоненты Δ пустыми $\delta_{d+1} = \dots = \delta_p = \varnothing$. Соответствующие пустым компонентам БП $u_{d+1}, \dots, u_p$ в силу (23) оказываются фиктивными БП ФАЛ $g_{d+1}, \dots, g_p$ и, следовательно, ФАЛ μ_Δ. Лемма доказана. □

Следствие. *Если в условиях леммы 5 ФАЛ φ реализуется абсолютной формулой Φ над базисом $\widehat{\text{Б}}$, то найдется бесповторная формула $\Psi(u, w)$ над Б, $u = (u_1, \dots, u_d)$ и $w = (w_1, \dots, w_{p+d})$, такая, что для некоторых ФАЛ $\hat{g}_j(x)$, $x = (x_1 \dots x_d)$, $1 \leqslant j \leqslant p + d$, выполняются соотношения:*

$$\Psi\big(u,\ \hat{g}_1(x), \dots, \hat{g}_{p+d}(x)\big) = \mu_\Delta(x, u), \tag{25}$$

$$T_u(\Psi) \leqslant T(\Phi) + 5T_{\text{Б}}, \qquad T_w(\Psi) \leqslant T(\Phi) + 4T_{\text{Б}}, \tag{26}$$

$$L(\Psi) \leqslant L(\Phi) + 6k_{\text{Б}}^3 \cdot d. \tag{27}$$

Доказательство. Рассмотрим разложение ФАЛ $g_i(x, u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant d$, из условия леммы 5 по БП u_i, которое в силу специфики ее зависимости от u_i записывается в виде:

$$g_i(x, u_i) = g_i(x, \sigma_i) u_i^{\sigma_i} \vee g_i(x, \overline{\sigma}_i),$$

где $\sigma_i \in B$. Тогда формулу Ψ достаточно определить равенством

$$\Psi = \Phi(w_1 u_1^{\sigma_1} \vee w_2,\ \dots,\ w_{2d-1} u_d^{\sigma_d} \vee w_{2d},\ w_{2d+1},\ \dots,\ w_p)$$

и положить для j, $1 \leqslant j \leqslant p + d$,

$$\hat{g}_j(x) = \begin{cases} g_i(x, \sigma_i), & \text{если } j = 2i - 1 \text{ и } 1 \leqslant i \leqslant d; \\ g_i(x, \overline{\sigma}_i), & \text{если } j = 2i \text{ и } 1 \leqslant i \leqslant d; \\ g_i(x), & \text{если } j = d + i \text{ и } d + 1 \leqslant i \leqslant p. \end{cases}$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что, как вытекает из (21) и (22), для любого σ, $\sigma \in B$, в классе формул над Б всегда найдется формула $\mathcal{G}$, реализующая ФАЛ $y_1 y_2^{\sigma} \vee y_3$ и такая, что

$$D_{y_1, y_3}(\mathcal{G}) \leqslant 4, \qquad D_{y_2}(\mathcal{G}) \leqslant 5, \qquad L(\mathcal{G}) \leqslant 6k_{\text{Б}}^3.$$

Следствие доказано. □

Лемма 6. *Пусть в условиях леммы 5 функция φ реализуется абсолютной формулой $\Phi(y_1, \dots y_p)$ над $\widehat{\text{Б}}$, в записи которой БП y_i появляется левее БП y_j тогда и только тогда, когда $i < j$, а Δ — разбиение куба B^n на последовательные отрезки. Тогда компоненты построенных в лемме 5 ФАЛ $g_j(x, u_j)$, то есть ФАЛ вида $g_j(x, \sigma) = g_{j,\sigma}(x)$, где $1 \leqslant j \leqslant d$ и $\sigma \in B$, а также ФАЛ $g_s(x)$, где $d + 1 \leqslant s \leqslant p$, изменяют свои значения только на границах отрезков Δ и делают это не более, чем $k_{\text{Б}} \cdot D(\Phi)$ раз.*

Доказательство. Из определения (23) ФАЛ $g_i(x, u_i)$ и вида разбиения Δ вытекает, что столбцы значений $\tilde{g}_{i,\sigma}$ ФАЛ $g_{i,\sigma}(x)$, имеют вид

$$\tilde{g}_{i,\sigma} = (\tilde{\alpha}_{i,1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{i,i-1},\ \tilde{\sigma} \oplus \tilde{\alpha}_{i,i},\ \tilde{\alpha}_{i,i+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{i,p}), \tag{28}$$

где $\tilde{\alpha}_{i,j} = (\alpha_{i,j}, \ldots, \alpha_{i,j})$, $|\tilde{\alpha}_{i,j}| = |\delta_j|$, $1 \leqslant j \leqslant p$, а $\tilde{\sigma}$ — набор длины $|\delta_i|$ и вида $\tilde{\sigma} = (\sigma, \ldots, \sigma)$.

Проведем доказательство индукцией по глубине формулы Φ. Пусть $D(\Phi) = 1$, то есть Φ состоит из единственного ФЭ $\mathcal{E}_r$, $1 \leqslant r \leqslant a$, а p — суть число его входов k_r. В этом случае все требуемые свойства непосредственно вытекают из (28) и определения альтернирования ФАЛ. Пусть теперь $D(\Phi) = S + 1$. Представим Φ в виде

$$\Phi(y_1, \ldots, y_p) = \Phi'\big(\Phi''_1(y_1, \ldots, y_{t_1}), \ldots, \Phi''_q(y_{t_{q-1}+1}, \ldots, y_{t_q})\big), \tag{29}$$

где Φ' — формула глубины S и ранга q, $D(\Phi''_r) \leqslant 1$ для любого r, $1 \leqslant r \leqslant q$, (если $D(\Phi''_r) = 0$, то Φ''_r — тривиальная формула-переменная y_{t_r}) и $1 \leqslant t_1 < \cdots < t_q = p$. Обозначим через I_r, $1 \leqslant r \leqslant q$, множество (отрезок) индексов БП, входящих в подформулу Φ''_r, то есть $I_r = [t_{r-1} + 1, t_r]$.

Пусть формула Φ' реализует ФАЛ $\varphi'(y'_1, \ldots, y'_q)$, а формула Φ''_r, $1 \leqslant r \leqslant q$, реализует ФАЛ $\varphi''_r(y_{t_{r-1}+1}, \ldots, y_{t_r})$. По предположению индукции применим утверждение леммы к ФАЛ $\varphi'(y'_1, \ldots, y'_q)$ и надразбиению Δ', $\Delta' = \{\delta'_1, \ldots, \delta'_q\}$, разбиения Δ, определяемому равенствами $\delta'_r = \bigcup_{l=t_{r-1}+1}^{t_r} \delta_l$, в результате чего получим ФАЛ $g'_r(x, u'_r)$, для которых выполняются соотношения:

$$\operatorname{alt}(g'_{r,\sigma}) \leqslant k_{\text{Б}} \cdot S, \tag{30}$$

$$\tilde{g}'_{r,\sigma} = (\tilde{\alpha}'_{r,1}, \ldots, \tilde{\alpha}'_{r,r-1},\ \tilde{\sigma}' \oplus \tilde{\alpha}'_{r,r},\ \tilde{\alpha}'_{r,r+1}, \ldots, \tilde{\alpha}'_{r,q}), \tag{31}$$

$$\varphi'(\alpha'_{r,1}, \ldots, \alpha'_{r,r-1},\ y'_r,\ \alpha'_{r,r+1}, \ldots, \alpha'_{r,q}) = y'_r \oplus \alpha'_{r,r}, \tag{32}$$

где $\tilde{\alpha}'_{r,s} = (\alpha'_{r,s}, \ldots, \alpha'_{r,s})$, $1 \leqslant s \leqslant q$, — подходящие единичные или нулевые наборы длины $|\delta'_s|$, а набор $\tilde{\sigma}'$ задан равенствами $\tilde{\sigma}' = (\sigma, \ldots, \sigma)$, $|\tilde{\sigma}'| = |\delta'_r|$.

Пусть $i \in I_r$, $1 \leqslant r \leqslant q$. Существенность ФАЛ φ''_r означает, что найдутся булевские константы $\alpha_{i,t_{r-1}+1}, \ldots, \alpha_{i,t_r}$ такие, что

$$\varphi''_r(\alpha_{i,t_{r-1}+1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,t_r}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}, \tag{33}$$

а также что для каждого τ, $\tau \in B$, найдутся булевские константы $\gamma^{(\tau)}_{t_{r-1}+1}, \ldots, \gamma^{(\tau)}_{t_r}$ такие, что

$$\varphi''_r\big(\gamma^{(\tau)}_{t_{r-1}+1}, \ldots, \gamma^{(\tau)}_{t_r}\big) = \tau. \tag{34}$$

Для набора β, $\beta \in B^n$, и каждого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, определим ФАЛ $g_i(x, u_i)$

равенством

$$g_i(\beta, u_i) = \begin{cases} \gamma_i^{(\alpha'_{r,s})}, & \text{если } \beta \in \delta'_s, \text{ при } s \neq r; \\ \alpha_{i,j}, & \text{если } \beta \in \delta_j, \text{ при } j \in I_r \text{ и } j \neq i; \\ u_i \oplus \alpha'_{r,r} \oplus \alpha_{i,i}, & \text{если } \beta \in \delta_i. \end{cases} \tag{35}$$

Корректность определенной таким образом ФАЛ $g_i(x, u_i)$ проверяется аналогично (24) их непосредственной подстановкой в ФАЛ $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ с учетом представления последней в виде (29) и равенств(34)–(32).

Оценим альтернирование ФАЛ $g_{i,\sigma}(x)$. Из (30), (31) и определения (34) величин $\gamma_i^{(\tau)}$ следует, что

$$\mathrm{alt}\left(\tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,1})}, \ldots, \tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,q})}\right) \leqslant \mathrm{alt}\left(\tilde{\alpha}'_{r,1}, \ldots, \tilde{\alpha}'_{r,q}\right) \leqslant k_{\text{Б}} \cdot S, \tag{36}$$

где $\tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,s})} = \left(\gamma_i^{(\alpha'_{r,s})}, \ldots, \gamma_i^{(\alpha'_{r,s})}\right)$, $\left|\tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,s})}\right| = \left|\tilde{\alpha}'_{r,s}\right|$, $1 \leqslant s \leqslant q$. С другой стороны, из определения (35) ФАЛ $g_i(x, u_i)$ следует, что столбец значений $\tilde{g}_{i,\sigma}$ ФАЛ $g_{i,\sigma}$, имеет вид

$$\left(\tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,1})}, \ldots, \tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,r-1})},\ \tilde{A}_{i,r},\ \tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,r+1})}, \ldots, \tilde{\gamma}_i^{(\alpha'_{r,q})}\right), \tag{37}$$

где для i, $1 \leqslant i \leqslant p$, и r, $1 \leqslant r \leqslant q$, набор $\tilde{A}_{i,r}$ определен равенством

$$\tilde{A}_{i,r} = (\tilde{\alpha}_{i,t_{r-1}+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{i,i-1},\ \tilde{\sigma} \oplus \tilde{\alpha}_{i,i},\ \tilde{\alpha}_{i,i+1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{i,t_r}),$$

в котором $\tilde{\alpha}_{i,j} = (\alpha_{i,j}, \ldots, \alpha_{i,j})$, $|\tilde{\alpha}_{i,j}| = |\delta_j|$, $j \in I_r$. Так как $\mathrm{alt}\,(\tilde{A}_{i,r})$ не превосходит количества входов k_r у ФЭ $\mathcal{E}_r$, из которого состоит формула Φ''_r в случае $D(\Phi''_r) = 1$, и равно нулю в случае $D(\Phi''_r) = 0$, то из (36) и (37) вытекает

$$\mathrm{alt}\,(g_{i,\sigma}) \leqslant k_{\text{Б}} \cdot S + k_r \leqslant k_{\text{Б}} \cdot (S + 1).$$

Лемма доказана. □

Следствие. *В условиях леммы 6 в класе формул над* Б *найдется бесповторная формула* $\Psi(u, w)$, $u = (u_1, \ldots, u_d)$ *и* $w = (w_1, \ldots, w_{p+d})$, *которая удовлетворяет соотношениям* (25)–(27) *при некоторых ФАЛ* $\hat{g}_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant p + d$, *таких, что* $\mathrm{alt}\,(\hat{g}_j) \leqslant k_{\text{Б}} \cdot D(\Phi)$.

Доказательство следствия проводится по аналогии с доказательством следствия из леммы 5.

Лемма 7. *Для любых натуральных чисел* m *и* p *таких, что* $p \leqslant m$, *в базисе* Б *существует бесповторная формула* $\Phi(u, w)$, $u = (u_1, \ldots, u_{2^m})$ *и* $w = (w_1, \ldots, w_d)$, *такая, что выполняются соотношения:*

$$\Phi\big(u,\ g_1(\tilde{x}), \ldots, g_d(\tilde{x})\big) = \mu_m(\tilde{x}, u), \tag{38}$$

$$T_u(\Phi) \leqslant \tau_{\text{Б}} \log m + 7T_{\text{Б}}p, \qquad T_w(\Phi) \leqslant \tau_{\text{Б}} \log m + 7T_{\text{Б}}p - T_{\text{Б}}, \tag{39}$$

$$L(\Phi) \leqslant 7pk_{\text{Б}}^4 2^{\lceil m/p \rceil}, \tag{40}$$

для некоторого d, которое удовлетворяет неравенствам:

$$p2^{\lceil m/p\rceil} \leqslant d \leqslant p(K_1+1)2^{\lceil m/p\rceil}, \tag{41}$$

и некоторых ФАЛ $g_i(\tilde{x})$, $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_m)$, $1\leqslant i\leqslant d$, удовлетворяющих при любом указанном i неравенству

$$\mathrm{alt}\,(g_i) \leqslant 3k_{\text{Б}}\frac{T_1}{T_1'}\cdot\frac{m}{p}. \tag{42}$$

Доказательство. Построим по замечанию к лемме 3, положив в нем $\tilde{r}$ равным $2^{\lceil m/p\rceil}$, бесповторную формулу $\mathcal{F}$, которая имеет ранг r, заключенный в пределах

$$2^{\lceil m/p\rceil} \leqslant r \leqslant K_1 2^{\lceil m/p\rceil}, \tag{43}$$

реализует ФАЛ $f(y_1,\ldots,y_r)$ и удовлетворяет соотношениям:

$$T(\mathcal{F}) \leqslant \tau_{\text{Б}}\left\lceil\frac{m}{p}\right\rceil + T_1, \qquad L(\mathcal{F}) \leqslant \frac{K_1 2^{\lceil m/p\rceil}-1}{k_1-1}. \tag{44}$$

Для каждого k, $1\leqslant k\leqslant p$, определим вспомогательную величину $\lambda(k)$ равенством

$$\lambda(k) = \left\lceil\frac{m}{p}\right\rceil(p-k)$$

и введем сокращенные обозначения для групп БП:

$$\tilde{x}_k = (x_{\lambda(k)+1},\ldots,x_m), \qquad \hat{x}_k = (x_{\lambda(k)+1},\ldots,x_{\lambda(k-1)}),$$
$$\tilde{u}_{k,j_k} = (u_{(j_k-1)2^{m-\lambda(k)}+1},\ldots,u_{j_k 2^{m-\lambda(k)}}), \qquad j_k = 1,\ldots,2^{\lambda(k)},$$
$$\tilde{w}_k = (w_1,\ldots,w_{d_k}), \qquad \hat{w}_k = (w_{d_{k-1}+1},\ldots,w_{d_k}),$$

в которых $d_0=0$, а d_k задано равенством

$$d_k = kr + (k-1)2^{\lceil m/p\rceil} + 2^{m-\lambda(1)}. \tag{45}$$

Опишем последовательный процесс построения формулы Φ, состоящий из p шагов. На первом шаге для каждого j_1, $1\leqslant j_1\leqslant 2^{\lambda(1)}$, путем применения следствия из леммы 6 к формуле $\mathcal{F}$, ФАЛ f и тривиальному разбиению куба $B^{m-\lambda(1)}$ от БП $\tilde{x}_1$, положив в нем $d=2^{m-\lambda(1)}$ и $p=r$, получим формулу $\mathcal{F}_{1,j_1}(\tilde{u}_{1,j_1},\tilde{w}_1)$ и ФАЛ $g_i(\check{x}_1)$, $1\leqslant i\leqslant d_1$, которые согласно (44) удовлетворяют (42). Согласно (25)–(27) при $l=1$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{F}_{l,j_l}\big(\tilde{u}_{l,j_l},\, g_{d_{l-1}}(\tilde{x}_l),\ldots,g_{d_l}(\tilde{x}_l)\big) = \mu_{|\tilde{x}_l|}(\tilde{x}_l,\tilde{u}_{l,j_l}), \tag{46}$$
$$T_{\tilde{u}_{l,j_l}}(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leqslant lT(\mathcal{F}) + 5lT_{\text{Б}}, \quad T_{\tilde{w}_l}(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leqslant lT(\mathcal{F}) + (5l-1)T_{\text{Б}}, \tag{47}$$
$$L(\mathcal{F}_{l,j_l}) \leqslant lL(\mathcal{F}) + 6lk_{\text{Б}}^3 r. \tag{48}$$

Рассмотрим, далее, шаг с номером k, $2 \leqslant k \leqslant p$. Применим следствие из леммы 6 к формуле $\mathcal{F}$, ФАЛ f и тривиальному разбиению куба $B^{\lceil m/p \rceil}$ от БП y, $y = (y_1, \ldots, y_{2^{\lceil m/p \rceil}})$, положив в нем $d = 2^{\lceil m/p \rceil}$ и $p = r$, в результате чего получим формулу $\mathcal{G}_k(y, \hat{w}_k)$ и ФАЛ $g_i(\hat{x}_k)$, $d_{k-1} + 1 \leqslant i \leqslant d_k$, удовлетворяющие (42), такие, что

$$\mathcal{G}_k\big(y,\, g_{d_{k-1}+1}(\hat{x}_k), \ldots, g_{d_k}(\hat{x}_k)\big) = \mu_{2^{\lceil m/p \rceil}}(\hat{x}_k, y).$$

Для каждого j_k, $1 \leqslant j_k \leqslant 2^{\lambda(k)}$, определим формулу $\mathcal{F}_{k,j_k}$ равенством

$$\mathcal{F}_{k,j_k}(\tilde{u}_{k,j_k}, \tilde{w}_k) = \mathcal{G}_k\big(\mathcal{F}_{k-1,(j_k-1)2^{\lceil m/p \rceil}+1}, \ldots, \mathcal{F}_{k-1,j_k 2^{\lceil m/p \rceil}},\, \hat{w}_k\big).$$

Нетрудно убедиться, что если для формул $\mathcal{F}_{k-1,j_{k-1}}$, $1 \leqslant j_{k-1} \leqslant 2^{\lambda(k-1)}$, построенных на предыдущем шаге, выполнены соотношения (46)–(48) взятые для $l = k - 1$, то они выполнены и для формулы $\mathcal{F}_{k,j_k}$ при $l = k$. На последнем шаге при $k = p$ получаем искомую формулу Φ, $\Phi = \mathcal{F}_{p,1}$, и ФАЛ $g_i(\tilde{x})$, $1 \leqslant i \leqslant d = d_k$, из условия леммы, для которых с учетом (44) согласно (45)–(48) справедливы (38)–(42). Лемма доказана. $\square$

Оптимальная по задержке реализация мультиплексорных ФАЛ формулами линейной сложности. Поведение функции Шеннона для задержки ФАЛ

Теорема 4. *Для любого натурального n ФАЛ $\mu_n(x_1, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{2^n-1})$ можно реализовать бесповторной по информационным БП формулой $\mathcal{M}_n$ в базисе* Б, *для которой выполняются соотношения:*

$$T(\mathcal{M}_n) \leqslant \tau_{\text{Б}} n + O(1), \tag{49}$$

$$L(\mathcal{M}_n) = O(2^n). \tag{50}$$

Доказательство. Основная часть искомой формулы $\mathcal{M}_n$ будет состоять из ФЭ типа $\mathcal{E}_1$ базиса Б, на которых достигается приведенная задержка $\tau_1 = \tau_{\text{Б}}$. Формула $\mathcal{M}_n$ строится при помощи следствий из лемм 5, 6 и леммы 7. Построение формулы $\mathcal{M}_n$ происходит с использованием трехуровневого разложения мультиплексорной ФАЛ $\mu_n(x, y)$ порядка n от адресных БП x, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и информационных БП y, $y = (y_0, \ldots, y_{2^n-1})$, на мультиплексорные ФАЛ меньших порядков. Для осуществления этого разложения мы разобьем группу БП x на три подгруппы $\tilde{x}$, x', x'', заданных равенствами:

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_m), \quad x' = (x_1, \ldots, x_q), \quad x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n), \tag{51}$$

в которых числа m и q играют роль параметров и будут выбраны ниже. Дальнейшее доказательство состоит из четырех основных частей, три из которых описывают каждый уровень разложения, а последняя посвящена выбору необходимых параметров.

1. Зафиксируем натуральные параметры m и p так, что $p \leqslant m$, и выберем по лемме 7 число d, формулу Φ и ФАЛ $g_i(\tilde{x})$, $1 \leqslant i \leqslant d$, для котороых выполняются соотношения (39)–(41) и (38). Наложим следующее ограничение на числа m, p и n:

$$m + p(K_1 + 1)2^{\lceil m/p \rceil} + 2 \leqslant n, \tag{52}$$

при котором согласно (41) для числа q, $q = m + d$, справедливо $q < n$. Рассмотрим m–регулярное разбиение[1] Δ, $\Delta = (\delta_0, \ldots, \delta_{2^d-1})$, куба B^q от переменных x', связанное с множеством функций $\{g_1, \ldots, g_d\}$. Для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant 2^d - 1$, и j, $0 \leqslant j \leqslant 2^{n-q} - 1$, определим формулу $\Phi_{l,j}$ равенством

$$\Phi_{l,j} = \Phi(\tilde{y}_{l,j},\, x_{k_1}^{\rho_1}, \ldots, x_{k_d}^{\rho_d}),$$

где

$$\tilde{y}_{l,j} = \bigl(y_{l2^{n-q}+j},\, y_{2^{n-m}+l2^{n-q}+j},\, \ldots,\, y_{2^{n-m}(2^m-1)+l2^{n-q}+j}\bigr)$$

и для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant d$, ФАЛ $x_{j_i}^{\rho_i}$ ($m+1 \leqslant j_i \leqslant q$, $\rho_i \in B$) совпадает с ФАЛ $g_i(\tilde{x})$ на компоненте δ_l, а в случае $\rho_i = 0$ отрицание БП x_{j_i} задается при помощи формулы $\mathcal{F}_\neg$. Формула $\Phi_{l,j}$ реализует ФАЛ, которая совпадает с мультиплексорной ФАЛ $\mu_m(\tilde{x}, y_j, \ldots, y_{2^{n-m}(2^m-1)+j})$ на компоненте δ_l. Для задержки и сложности формулы $\Phi_{l,j}$ выполняются соотношения:

$$T_{\text{сущ.}}(\Phi_{l,j}) \leqslant \tau_{\text{Б}} m + 7T_{\text{Б}} p, \qquad L(\Phi_{l,j}) \leqslant 10 K_{\text{Б}}^4 p 2^{\lceil m/p \rceil}.$$

2. По лемме 7, выбрав в ней $m = n - q$ и $p = 2$, получим бесповторную формулу Ψ, для которой

$$T_{\text{сущ.}}(\Psi) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n-q) + 14T_{\text{Б}}, \qquad L(\Psi) \leqslant 28 K_{\text{Б}}^4 2^{(n-q)/2},$$

и, кроме того, для некоторого s, $s \leqslant 4(K_1+1)2^{(n-q)/2}$, и ФАЛ $\hat{g}_i(x'')$, $1 \leqslant i \leqslant s$, таких, что $\mathrm{alt}\,(\hat{g}_i) \leqslant (3/2)K_{\text{Б}}(T_1/T_1')(n-q)$, выполняется

$$\Psi(v_1, \ldots, v_{2^{n-q}},\, \hat{g}_1(x''), \ldots, \hat{g}_s(x'')) = \mu_{n-q}(x'',\, v_1, \ldots, v_{2^{n-q}}).$$

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, по лемме 2 получим формулу $\hat{\mathcal{G}}_i$, реализующую ФАЛ $\hat{g}_i(x'')$, для которой справедливы соотношения[2]

$$T_{\text{сущ.}}(\hat{\mathcal{G}}_i) \leqslant 3T_{\text{Б}}\Bigl(3\log(n-q) + \log\bigl(K_{\text{Б}}\frac{T_1}{T_1'}\bigr) + 3\Bigr), \quad L(\hat{\mathcal{G}}_i) \leqslant K_{\text{Б}}\frac{3T_1}{2T_1'}(n-q)^3.$$

[1] Определение и свойства m–регулярных разбиений можно найти, например, в [5].

[2] Для константной ФАЛ $\hat{g}_i$ в базисе Б найдется формула, реализующая эту константу, задержка и сложность которой не более $3T_{\text{Б}}$ и $k_{\text{Б}}^3$ соответствнно.

Для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant 2^d - 1$, формула Ψ_l, заданная равенством
$$\Psi_l = \Psi\big(\Phi_{l,0}, \ldots, \Phi_{l,2^{n-q}-1}, \hat{\mathcal{G}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{G}}_s\big),$$
реализует ФАЛ, совпадающую с ФАЛ $\mu_{n-d}(\tilde{x}, x'', \tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_{2^m-1})$ на компоненте δ_l, где $\tilde{y}_j = (y_{j2^{n-m}+l2^{n-q}}, \ldots, y_{j2^{n-m}+(l+1)2^{n-q}-1})$ для j, $0 \leqslant j \leqslant 2^m - 1$. Для сложности формулы Ψ_l справедливо неравенство
$$L(\Psi_l) = L(\Psi) + \sum_{i=1}^{s} L(\hat{\mathcal{G}}_i) + \sum_{j=1}^{2^{n-q}} L(\Phi_{l,j}) \leqslant$$
$$\leqslant 28K_{\text{Б}}^4 2^{(n-q)/2} + 9L_{\text{Б}}^2 \frac{T_1}{T_1'} 2^{(n-q)/2}(n-q)^3 + 10K_{\text{Б}}^4 p 2^{n-q+\lceil m/p \rceil}.$$
Кроме того, если для любых указанных i, j, l выполняется соотношение
$$T_{\text{сущ.}}(\hat{\mathcal{G}}_i) \leqslant T_{\text{сущ.}}(\Phi_{l,j}), \tag{53}$$
то для задержки формулы Ψ_l также выполняются неравенства
$$T_{\text{сущ.}}(\Psi_l) \leqslant T_{\text{сущ.}}(\Psi) + \max_{0 \leqslant j \leqslant 2^{n-m}-1} T_{\text{сущ.}}(\Phi_{l,j}) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n-d) + 7pT_{\text{Б}} + 14T_{\text{Б}}.$$

3. По следствию из леммы 5, положив в нем в качестве формулы Φ формулу $\widetilde{\mathcal{F}}$, полученную по замечанию к лемме 3 для $\tilde{r} = 2^d$, получим бесповторную формулу Λ, для которой
$$T_{\text{сущ.}}(\Lambda) \leqslant \tau_{\text{Б}} d + 6T_{\text{Б}}, \quad L(\Lambda) \leqslant 7K_{\text{Б}}^3 2^d,$$
и такую, что для некоторого t, $t \leqslant (K_1+1)2^d$, и ФАЛ $\check{g}_i(x')$, $1 \leqslant i \leqslant t$, выполняется
$$\Lambda(w_1, \ldots, w_{2^d}, \check{g}_1(x'), \ldots, \check{g}_t(x')) = \mu_\Delta(x', w_1, \ldots, w_{2^d}).$$
Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant t$, по лемме 2 получим формулу $\check{\mathcal{G}}_i$, реализующую ФАЛ $\check{g}_i(x')$, для которой справедливы соотношения:[1]
$$T_{\text{сущ.}}(\check{\mathcal{G}}_i) \leqslant 3T_{\text{Б}}(2\log q + q + 3), \qquad L(\check{\mathcal{G}}_i) \leqslant 2^{q+1} q \log q.$$
Формула $\mathcal{M}_n'$, реализующая $\mu_n(x,y)$, определяется равенством
$$\mathcal{M}_n' = \Lambda(\Psi_0, \ldots, \Psi_{2^d}, \check{\mathcal{G}}_1, \ldots, \check{\mathcal{G}}_t).$$
Для сложности формулы $\mathcal{M}_n'$ справедливо неравенство
$$L(\mathcal{M}_n') = L(\Lambda) + \sum_{i=1}^{t} L(\check{\mathcal{G}}_i) + \sum_{j=1}^{2^d} L(\Psi_l) \leqslant$$
$$\leqslant 7K_{\text{Б}}^3 2^d + 3K_{\text{Б}} 2^{q+d} q \log q + \frac{3}{2} K_{\text{Б}} 2^d \max_{0 \leqslant l \leqslant 2^d - 1} L(\Psi_l).$$

[1]Константная ФАЛ $\check{g}_i$ без труда реализуется формулой, удовлетворяющей указанным неравенствам (см. аналогичное замечание на предыдущей странице).

Кроме того, если для любых i, $1 \leqslant i \leqslant s$, и l, $0 \leqslant l \leqslant 2^d - 1$, выполняется соотношение
$$T_{\text{сущ.}}(\check{\mathcal{G}}_i) \leqslant T_{\text{сущ.}}(\Psi_l), \tag{54}$$
то для задержки формулы $\mathcal{M}'_n$ также выполняются неравенства
$$T_{\text{сущ.}}(\mathcal{M}'_n) \leqslant T_{\text{сущ.}}(\Lambda) + \max_{0 \leqslant l \leqslant 2^d-1} T_{\text{сущ.}}(\Psi_l) \leqslant \tau_{\text{Б}} n + 7pT_{\text{Б}} + 20T_{\text{Б}}.$$
Согласно (20) в классе формул над базисом Б найдется формула $\mathcal{M}_n$, эквивалентная $\mathcal{M}'_n$, такая, что
$$T(\mathcal{M}_n) \leqslant T_{\text{сущ.}}(\mathcal{M}'_n) + 3T_{\text{Б}}.$$

4. Асимптотические соотношения (49), (50) будут установлены, если удовлетворить условиям (52)–(54), начиная с достаточно большого n и выбирая параметр p равным константе. Учитывая неравенства
$$\tau_{\text{Б}} m \leqslant T(\Phi) < T(\Phi_{l,j}) \quad \text{и} \quad \tau_{\text{Б}}(n - q + m) \leqslant T(\Phi) + T(\Psi) < T(\Psi_l),$$
справедливые при любых l, $0 \leqslant l \leqslant 2^d - 1$, и j, $0 \leqslant j \leqslant 2^{n-m} - 1$, достаточно выбрать параметры m и p так, чтобы для достаточно больших n выполнялись неравенства
$$3T_{\text{Б}}\Big(3\log(n-q) + 3 + \log\big(K_{\text{Б}}\frac{T_1}{T'_1}\big)\Big) \leqslant \tau_{\text{Б}} m, \tag{55}$$
$$3T_{\text{Б}}(2\log q + q + 3) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n - q + m). \tag{56}$$
Для выполнения неравенств (55), (56) при указанных n достаточно выбрать любое целое p, $p \geqslant 2$, и положить $m = \lceil \log n \rceil$. Теорема доказана. □

Для доказательства последней теоремы нам понадобится понятие φ–универсального множества. Пусть ФАЛ $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ существенно зависит от всех своих БП. Множество ФАЛ G, зависящих от БП $\tilde{x}$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, называется *$\varphi$–универсальным множеством* (φ–*УМ*) *порядка* m, если любая ФАЛ $g(\tilde{x})$ может быть представлена в виде
$$g(\tilde{x}) = \varphi\big(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_m(\tilde{x})\big), \tag{57}$$
где $g_1, \ldots, g_m$ — некоторые ФАЛ из G. Следуя [5], будем строить φ–УМ на основе разбиения Δ, $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, куба B^m от БП $\tilde{x}$. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, в силу существенной зависимости ФАЛ φ от БП y_i найдется набор булевых констант $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,p}$ такой, что
$$\varphi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,i-1},\ y_i,\ \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{i,p}) = y_i \oplus \alpha_{i,i}.$$
Для каждого указанного i рассмотрим множество $G^{(i)}$ всех тех ФАЛ $g(\tilde{x})$, которые при любом j, $1 \leqslant j \leqslant p$ и $j \neq i$, равны $\alpha_{i,j}$ на множестве наборов δ_j. Положим $G = G^{(1)} \cup \cdots \cup G^{(p)}$. Нетрудно убедиться, что равенсво (57) имеет место для любой ФАЛ $g(\tilde{x})$, если для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, в

качестве ФАЛ g_i выбрать ФАЛ из $G^{(i)}$, которая на δ_i совпадает с $g(\tilde{x}) \oplus \alpha_{i,i}$. Следовательно, множество G является φ–УМ порядка q.

Теорема 5. *Для натурального n и любой ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}$ в базисе* Б *такая, что*

$$T(\mathcal{F}) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n - \log\log n) + O(1). \tag{58}$$

Доказательство. Пусть n достаточно велико, чтобы удовлетворить всем возникающим далее требованиям на эту величину. Рассмотрим в качестве параметров, зависящих от n, натуральные числа m и r такие, что $2^m = o(r)$. Выберем по замечанию к лемме 3 формулу Φ ранга p, $r \leqslant p \leqslant K_1 r$, реализующую ФАЛ $\varphi(y_1, \dots, y_p)$ и такую, что

$$T(\Phi) \leqslant \tau_{\text{Б}} \log r + T_1. \tag{59}$$

Пусть $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_p)$ — разбиение куба B^m от БП $\tilde{x}$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_m)$, на последовательные отрезки такое, что

$$|\pi_1| = \dots = |\pi_{p-1}| = \left\lceil \frac{2^m}{p} \right\rceil, \qquad |\pi_p| \leqslant \left\lceil \frac{2^m}{p} \right\rceil.$$

Построим φ–УМ G порядка m на основе разбиения Π описанным выше способом. Для числа d — числа различных ФАЛ в G по построению G справедлива верхняя оценка $d \leqslant p 2^{\lceil 2^m/p \rceil}$. Обозначим величину $m + d$ через q и рассмотрим m–регулярное разбиение Δ, $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, куба B^q от БП x', $x' = (x_1, \dots, x_q)$, моделирующее на своих компонентах ФАЛ множества G. В силу того, что при достаточно больших n справедливо неравенство

$$p 2^{\lceil 2^m/p \rceil} \leqslant r 2^{\lceil 2^m/r \rceil},$$

для обеспечения ограничения $q < n$ потребуем выполнения неравенства

$$m + r 2^{\lceil 2^m/r \rceil} < n. \tag{60}$$

Рассмотрим теперь следующее разложение ФАЛ f из условия теоремы:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{2^d} \chi_i(x') \cdot \left(\bigvee_{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-q}) \in B^{n-q}} x_{q+1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_{n-q}} \cdot g_{\nu(\sigma),i}(x') \right),$$

в котором для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^d$, ФАЛ χ_i — характеристическая ФАЛ компоненты δ_i, а ФАЛ $g_{\nu(\sigma),i}(x')$ для каждого σ, $\sigma \in B^{n-q}$, — произвольные ФАЛ, совпадющие с ФАЛ $f(x', \sigma)$ на компоненте δ_i разбиения Δ. Заметим, что в силу свойств m–регулярного разбиения ФАЛ $g_{\nu(\sigma),i}(x')$ совпадает с некоторой ФАЛ $t_{\nu(\sigma),i}(\tilde{x})$ на компоненте δ_i. В силу свойств построенного множества G для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^d$, и j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{n-q}$, найдутся ФАЛ $t_{j,i}^{(k)}(\tilde{x})$, $1 \leqslant k \leqslant p$, такие, что

$$t_{j,i}(\tilde{x}) = \varphi\big(t_{j,i}^{(1)}(\tilde{x}), \ldots, t_{j,i}^{(p)}(\tilde{x})\big).$$

Пусть ФАЛ $t_{j,i}^{(k)}$ для некоторых l_k ($l_k = l_k(j,i)$, $m+1 \leqslant l_k \leqslant d$) и ρ_{l_k} ($\rho_{l_k} \in B$) моделируется ФАЛ $x_{l_k}^{\rho_{l_k}}$ на компоненте δ_i. Тогда формула $\Phi_{i,j}$, заданная равенством

$$\Phi_{i,j} = \Phi(x_{l_1}^{\rho_{l_1}}, \ldots, x_{l_p}^{\rho_{l_p}}),$$

реализует ФАЛ $t_{j,i}(\tilde{x})$ и согласно (59) имеет задержку, удовлетворяющую неравенству

$$T_{\text{сущ.}}(\Phi_{j,i}) \leqslant \tau_{\text{Б}} \log r + 2T_{\text{Б}}. \tag{61}$$

Выберем по теореме 4 формулу $\mathcal{M}_{n-q}$, реализующую мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', u_0, \ldots, u_{2^{n-q}-1})$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, для которой справедливо соотношение

$$T(\mathcal{M}_{n-q}) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n-q) + C_{\text{Б}}, \tag{62}$$

в котором через $C_{\text{Б}}$ обозначена некоторая константа, зависящая только от базиса Б. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^d$, определим формулу Ψ_i равенством

$$\Psi_i = \mathcal{M}_{n-q}(x'', \Phi_{0,i}, \ldots, \Phi_{2^{n-q}-1,i}).$$

Формула Ψ_i реализует ФАЛ, совпадающую с ФАЛ f на компоненте δ_i, и согласно (61), (62) для ее задержки справедливо неравенство

$$T_{\text{сущ.}}(\Psi_i) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n - q + \log r) + C_{\text{Б}} + 2T_{\text{Б}}. \tag{63}$$

По следствию из леммы 5, положив в нем в качестве формулы Φ формулу $\widetilde{\mathcal{F}}$, полученную по замечанию к лемме 3 для $\tilde{r} = 2^d$, получим бесповторную формулу Λ, для которой

$$T_{\text{сущ.}}(\Lambda) \leqslant \tau_{\text{Б}} d + 6T_{\text{Б}}, \tag{64}$$

и такую, что для некоторого s, $s \leqslant (K_1+1)2^d$, и ФАЛ $\hat{g}_i(x')$, $1 \leqslant i \leqslant s$, выполняется

$$\Lambda\big(v_1, \ldots, v_{2^d}, \hat{g}_1(x'), \ldots, \hat{g}_s(x')\big) = \mu_\Delta(x', v_1, \ldots, v_{2^d}).$$

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, по лемме 2 получим формулу $\hat{\mathcal{G}}_i$, реализующую ФАЛ $\hat{g}_i(x')$, для которой справедливо соотношение[1]

$$T_{\text{сущ.}}(\hat{\mathcal{G}}_i) \leqslant 3T_{\text{Б}}(2\log q + q + 3). \tag{65}$$

[1]Константная ФАЛ $\hat{g}_i$ без труда реализуется формулой, удовлетворяющей указанному соотношению.

Зададим формулу $\mathcal{F}'$, реализующую ФАЛ f, равенством

$$\mathcal{F}' = \Lambda\left(\Psi_1, \ldots, \Psi_{2^d}, \hat{\mathcal{G}}_1, \ldots, \hat{\mathcal{G}}_s\right).$$

Заметим, что при выполнении соотношения

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant s} T_{\text{сущ.}}\left(\hat{\mathcal{G}}_i\right) \leqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant 2^d} T_{\text{сущ.}}\left(\Psi_j\right) \tag{66}$$

для задержки формулы $\mathcal{F}'$ согласно (63) и (64) справедливо

$$T_{\text{сущ.}}(\mathcal{F}') \leqslant \tau_{\text{Б}}(n - m + \log r) + C_{\text{Б}} + 8T_{\text{Б}}.$$

Заметим, что для выполнения (66) согласно (65) достаточно потребовать выполнения неравенства

$$9T_{\text{Б}}(q+1) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n - q + \log r) \tag{67}$$

для достаточно больших n. Наконец, согласно (20) в базисе Б найдется формула $\mathcal{F}$, эквивалентная $\mathcal{F}'$ и такая что

$$T(\mathcal{F}) \leqslant \tau_{\text{Б}}(n - m + \log r) + C_{\text{Б}} + 11T_{\text{Б}}. \tag{68}$$

Если теперь выбрать следующие значения параметров:

$$m = 2\left\lfloor \log \left\lfloor \log n \right\rfloor \right\rfloor - 1, \qquad r = \left\lfloor \log n \right\rfloor,$$

то нетрудно убедиться в выполнении требуемых соотношений (60), (67) для достаточно больших n, при этом для задержки формулы $\mathcal{F}$ согласно (68) оказывается справедливо (58). Теорема доказана. □

Из теорем 3–5 вытекают теоремы 1, 2, которые описывают поведение функции Шеннона для глубины формул в произвольном базисе в рассматриваемой модели на уровне асимптотических оценок высокой степени точности и устанавливают задержку стандартной мультиплексорной ФАЛ с точностью до слагаемого вида $O(1)$.

Список литературы

[1] *Ложкин С. А.* Поведение функции Шеннона для задержки схем из функциональных элементов в некоторых моделях // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XII международной конференции (Нижний Новгород, 17–22 мая 1994г.). — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С. 139.

[2] *Лупанов О. Б.* О схемах функциональных элементов с задержками // Проблемы кибернетики. — Вып. 23 — М.: Наука, 1970. — С. 43–82.

[3] *Ложкин С. А.* О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1996. — № 2 — С. 80–82.

[4] *Ложкин С. А.* О задержке мультиплексорной функции в произвольном базисе // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008г.). — Казань: Отечество, 2008. — С. 75.

[5] *Ложкин С. А.* Основы кибернетики. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. — 251 с.

[6] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовничего. — 4-е изд., стер. — М.: Высш шк.; 2003. — 384 с.