А.В. Лукшин, Б.И. Резник

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

Нелокальные условия встречаются совместно с различными уравнениями математической физики и в различных постановках. Подобные задачи исследованы в работах ([4], [6], [8], [2]). В статье исследуется обратная задача определения правой части для задачи, исследованной с статье [4]. Условие переопределения задается на правом конце рассматриваемого отрезка. Найдены условия существования и единственности решения обратной задачи методом редукции к интегральному уравнению Вольтерра.

1 Прямая задача

1.1 Постановка задачи

В области $D_T = \{(x,t) \in (0,1) \times (0,T]\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &v(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \\ &\int\limits_0^1 v(x,t)dx = 0, \qquad 0 \le t \le T, \end{aligned} \tag{2}$$

и начальным условием

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где функции $F(x,t), v_0(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

1.2 Решение

Определение 1. Согласно [4], решением задачи (1-3) назовем функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}
&v(x,t) \in C(\overline{D_T}),\\
&v(x,t) \text{ непрерывно дифференцируема по } t \in [0,T],\\
&v(x,t) \text{ дважды непрерывно дифференцируема по } x \in [0,1],\\
&v(x,t) \text{ удовлетворяет (1-3) в классическом смысле.}
\end{aligned} \tag{4}$$

Представим решение в виде суммы $v(x,t) = u(x,t) + w(x,t)$, где функция $w(x,t)$ – решение задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,\\
&w(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T,\\
&\int_0^1 w(x,t)dx = 0, \qquad 0 \le t \le T,\\
&w(x,0) = \phi(x), \qquad 0 \le x \le T;
\end{aligned} \tag{5}$$

функция $u(x,t)$ - решение задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,\\
&u(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T,\\
&\int_0^1 u(x,t)dx = 0, \qquad 0 \le t \le T,\\
&u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le T.
\end{aligned} \tag{6}$$

Согласно [4], при $\phi \in C^1[0,1]$, $\phi'(0) = \phi'(1)$ существует единственная

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_{2k}X_{2k}(x) + \phi_{2k-1}(X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k}tX_{2k}(x)))e^{-\lambda_k t}, \tag{7}$$

и существует единственная

$$\begin{aligned}
&u(x,t) = \int_0^t F_0(\tau)d\tau X_0(x) +\\
&\sum_{k=1}^{\infty} [\int_0^t F_{2k}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau X_{2k}(x)+\\
&\int_0^t F_{2k-1}(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau(X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k}tX_{2k}(x))]e^{-\lambda_k t},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$\lambda_k = 4\pi^2 k^2$ – собственное значение задачи (6);
$X_0(x) = x$ – собственная функция задачи (6);
$X_{2k}(x) = \sin 2\pi kx$ – собственные функции задачи (6);
$X_{2k-1}(x) = x\cos 2\pi kx$ – присоединенные функции задачи (6);

$$
\begin{aligned}
&F_0(\tau) = \int_0^1 f(x)p(\tau)Y_0(x)dx;\\
&F_{2k}(\tau) = \int_0^1 f(x)p(\tau)Y_{2k}(x)dx;\\
&F_{2k-1}(\tau) = \int_0^1 f(x)p(\tau)Y_{2k-1}(x)dx;\\
&\phi_0(x) = \int_0^1 \phi(x)Y_0(x)dx;\\
&\phi_{2k}(x) = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k}(x)dx;\\
&\phi_{2k-1}(x) = \int_0^1 \phi(x)Y_{2k-1}(x)dx;
\end{aligned} \tag{9}
$$

$Y_0(x) = 2$ – собственная функция сопряженной к (6) задачи;
$Y_{2k-1}(x) = 4\cos 2\pi kx$ – собственные функции сопр. задачи (6);
$Y_{2k}(x) = 4(1-x)\sin 2\pi kx$– присоединенные функции сопр.задачи(6).

Функции $X_k(x)$ и $Y_k(x)$ образуют [4] базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

Найдем значение функции $u(x,t)$ при $x = 1$. Из (11), (7) и (9) следует

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = v(x,t) - w(x,t),\\
&\overline{g}(t) = u(1,t) = g(t) - w(1,t),\\
&w(1,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_{2k} + \phi_{2k-1})\, e^{-\lambda_k t}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

2 Обратная задача

2.1 Постановка задачи

Пусть $\overline{F}(x,t) = p(t)f(x)$. Поставим обратную задачу определения источника: функции $f(x), \phi(x)$ известны, $p(t), v(x,t)$ – искомые функции. Также известно значение $v(x,t)$ на правом конце отрезка

$$v(1,t) = g(t). \tag{11}$$

Определение 2. По аналогии с [3] классическим решением обратной задачи назовем пару функций $p(t),\ v(x,t)$, удовлетворяющих условиям

$$
\begin{array}{l}
p(t) \in C[0,T] \\
v(x,t) \in C(\overline{D_T}) \\
v(x,t) \text{ непрерывно дифференцируема по } t \in [0,T] \\
v(x,t) \text{ дважды непрерывно дифференцируема по } x \in [0,1] \\
v(x,t),\ p(t) \text{ удовлетворяют (1) (2) (3) (11)}
\end{array}
\tag{12}
$$

2.2 Сведение к интегральному уравнению

Лемма 1.

Пусть $f(x) \in C^4[0,l], \quad f(0) = f'(0) = f'(1) = f''(0) = 0.$

Покажем, что коэффициенты $\hat{f}_n$ удовлетворяют неравенствам

$$
\left|\hat{f}_n\right| \leq \frac{const}{n^4}, \text{ при } n = 1, 2, ... \tag{13}
$$

Доказательство.

Проинтегрируем (19) по частям с учетом условий на функцию $f(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_k &= \int\limits_0^1 4f(x)(1-x)\sin 2\pi kx dx = -\frac{4}{2\pi k} f(x)(1-x)\cos 2\pi kx\Big|_0^1 + \\
&+ \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^1 \cos 2\pi kx[4(1-x)f' - 4f(x)]dx = \\
&= \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^1 4(1-x)f'(x)\cos 2\pi kx dx - \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^1 4f(x)\cos 2\pi kx dx = \\
&= I_1 - I_2,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^1 4(1-x)f'(x)\cos 2\pi kx dx = \frac{1}{\pi^2 k^2}(1-x)f(x)\sin 2\pi kx\Big|_0^1 - \\
&- \frac{1}{\pi^2 k^2}\int\limits_0^1 \sin 2\pi kx[(1-x)f''(x) - f'(x)]dx = -I_{11} + I_{12},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{11} = \frac{1}{\pi^2k^2}\int\limits_0^1 \sin 2\pi kx(1-x)f''(x)dx = \\
= -\frac{1}{2\pi^3k^3}(1-x)f''(x)\cos 2\pi kx\Big|_0^1 + \\
+\frac{1}{2\pi^3k^3}\int\limits_0^1 \cos 2\pi kx[(1-x)f'''(x)-f''(x)]dx = \\
= \frac{1}{2\pi^4k^4}[(1-x)f'''(x)-f''(x)]\sin 2\pi kx\Big|_0^1 - \\
-\frac{1}{2\pi^4k^4}\int\limits_0^1 \sin 2\pi kx[(1-x)f^{\mathrm{IV}}-2f''']dx,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{12} = \frac{1}{\pi^2k^2}\int\limits_0^1 f'(x)\sin 2\pi kx dx = -\frac{1}{2\pi^3k^3}\cos 2\pi kx f'(x)\Big|_0^1 + \\
+\frac{1}{2\pi^3k^3}\int\limits_0^1 \cos 2\pi kx f''(x)dx = \frac{1}{4\pi^4k^4}\sin 2\pi kx f''(x)\Big|_0^1 - \\
-\frac{1}{4\pi^4k^4}\int\limits_0^1 \sin 2\pi kx f'''(x)dx,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{\pi k}\int\limits_0^1 2f(x)\cos 2\pi kx dx = \frac{1}{2\pi^2k^2}f(x)\sin 2\pi kx\Big|_0^1 - \\
-\frac{1}{2\pi^2k^2}\int\limits_0^1 f'(x)\sin 2\pi kx dx = \\
= \frac{1}{4\pi^3k^3}f'(x)\cos 2\pi kx\Big|_0^1 - \frac{1}{4\pi^3k^3}\int\limits_0^1 f''(x)\cos 2\pi kx dx = \\
= -\frac{1}{8\pi^4k^4}f''(x)\sin 2\pi kx dx + \frac{1}{8\pi^4k^4}\int\limits_0^1 f'''(x)\sin 2\pi kx dx.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Q.E.D.

Запишем (8) в точке $x = 1$ и используем (10)

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^t\int\limits_0^1 2f(x)p(\tau)dxd\tau + \\
+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_0^t\int\limits_0^1 4f(x)p(\tau)(1-x)\sin 2\pi kx dx\right\} e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau = u(1,t) = \overline{g}(t).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Обозначим

$$\hat{f}_0 = \int\limits_0^1 2f(x)dx,$$
$$\hat{f}_k = \int\limits_0^1 4f(x)(1-x)\sin 2\pi kx dx \tag{19}$$

и перепишем

$$\int\limits_0^t \hat{f}_0 p(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^t \hat{f}_k p(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}\right]d\tau = \overline{g}(t). \tag{20}$$

Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет 2.2 и $p(t) \in C[0,T]$. Тогда ряд в (20) сходится равномерно. Поменяем местами порядок интегрирования и суммирования. В результате получим интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int\limits_0^t K(t,\tau)p(\tau)d\tau = \overline{g}(t) \text{ при } 0 \le t \le T, \tag{21}$$

с ядром

$$K(t,\tau) = \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}. \tag{22}$$

2.3 Теорема существования и единственности

Исследуем вопрос о существовании и единственности решения уравнения (21) в пространстве $C[0,T]$.

Теорема 1. Предположим, что $\phi \in C^1[0,1]$, $\phi'(0) = \phi'(1)$, $f(x) \in C^4[0,l]$, $f(0) = f'(0) = f'(1) = f''(0) = 0$. Тогда, если $f(1) \neq 0$ и $g(0) = \phi(1)$, $g(t) \in C^1[0,T]$, уравнение (21) имеет, и притом единственное, решение $p(t) \in C[0,T]$.

Доказательство.

Для функции $f(x)$ выполнена лемма 2.2. Из неравенств (13) следует, что ядро (22) непрерывно и имеет непрерывную производную $K_t(t,\tau)$ при $0 \le \tau \le t \le T$. Дифференцируя уравнение (21), получаем

$$K(t,t)p(t) + \int\limits_0^t K_t(t,\tau)p(\tau)d\tau = \overline{g}'(t), \quad \text{при } 0 \le t \le T. \tag{23}$$

Положим в (22) $t = \tau$:

$$K(t,t) = \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k. \tag{24}$$

Из (9, 19) следует, что правая часть (24) есть разложение функции $f(x)$ по системе функций $X_k(x)$ по точке $x = 1 \Rightarrow K(t,t) = f(1) \neq 0$.

Следовательно, уравнение (23) есть интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с непрерывным ядром и правой частью. Оно имеет [7], и притом единственное, решение $p(t) \in C[0,T]$.

Заметим, что из условия теоремы и (9) $\Rightarrow$

$$\overline{g}(0) = g(0) - \phi(1) = 0. \tag{25}$$

Проинтегрируем (23), учитывая (25):

$$\int_0^t K(t,\tau)p(\tau)d\tau = \overline{g}(t) - \overline{g}(0) = \overline{g}(t). \tag{26}$$

Следовательно, $p(t)$ является решением (21). Теорема доказана. *Q.E.D.*

Для непрерывной функции $p(t)$, согласно [4], существует единственная функция $u(x,t)$, удовлетворяющая (2.1). Таким образом, при указанных ограничениях обратная задача разрешима, ее решение единственно, и может быть получено методом последовательных приближений для интегрального уравнения (23).

3 Численные методы

3.1 Прямая задача

Реализован численный метод решения прямой задачи, предложенный в работе [5]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\hat{y}_k - y_k}{\tau} = \frac{\hat{y}_{k+1} - 2\hat{y}_k + \hat{y}_{k-1}}{2h^2} + \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{2h^2} + f(x)p(t), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \le k \le N-1, \\
&y_0 = 0, \\
&\frac{1}{2}\left(\hat{y}_{x,0} - \hat{y}_{\overline{x},N}\right) - \frac{1}{2}\left(y_{x,0} - y_{\overline{x},N}\right) = 0.5h\left(y_{t,N} - f_N\right), \\
&y(x_i, 0) = \phi(x_i).
\end{aligned} \tag{27}$$

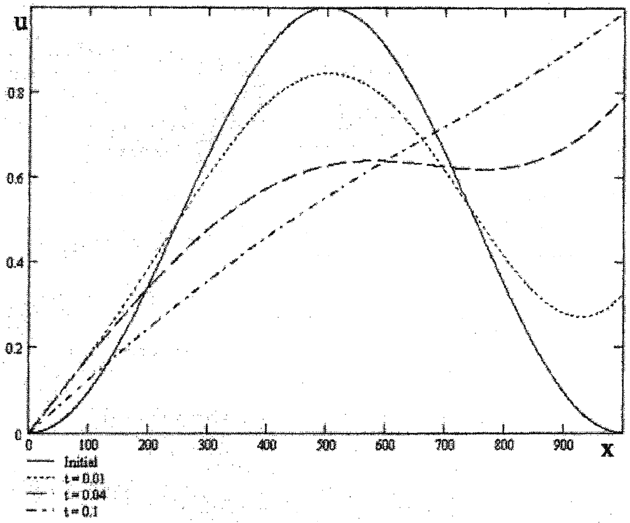
Данная схема является абсолютно устойчивой и имеет порядок точности $\tau^2 + h^2$, где τ – шаг по времени, h – шаг по пространству.

3.2 Пример расчета прямой задачи

Приведем пример расчетов для модельной задачи

$$
\begin{array}{l}
f(x) = \left(sin^2(5/2\pi x) + sin^2(\pi x)\right) sin^2(1/2\pi x) \\
\varphi(x) = sin^2(\pi x) \\
p\,(t) = sin^2(\pi t) \\
h = 0.001 \\
\tau = 0.01 \\
T = 1
\end{array}
\tag{28}
$$

Результат расчетов:



3.3 Обратная задача. Градиентный метод

Рассмотрим оператор $A : L_2[0,T] \to L_2[0,T]$, определяемый следующими соотношениями:

$$
\begin{array}{l}
Ap\,(t) = g(t), \\
g(t) = u(1,t), \\
u(x,t) \text{ – решение (5) с правой частью } p\,(t)f(x).
\end{array}
\tag{29}
$$

Запишем функционал невязки для обратной задачи с условием переопределения $u(1,t) = g(t)$

$$J(p) = \| Ap - g \|^2_{L_2[0,T]} . \qquad (30)$$

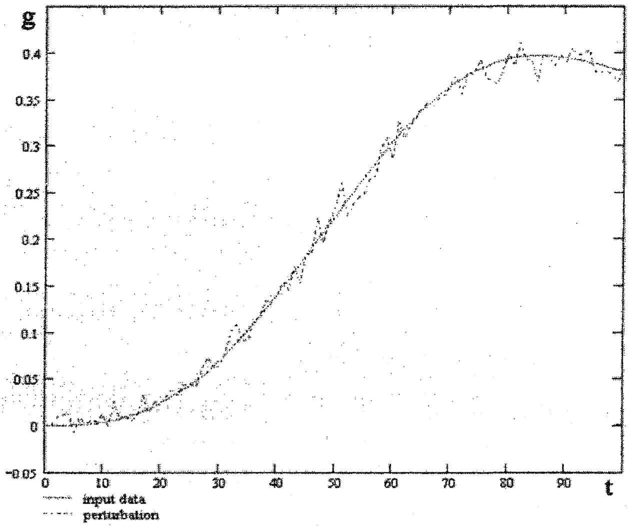
Функционал (30) минимизировался градиентным методом ([1]).

3.4 Примеры расчетов градиентным методом

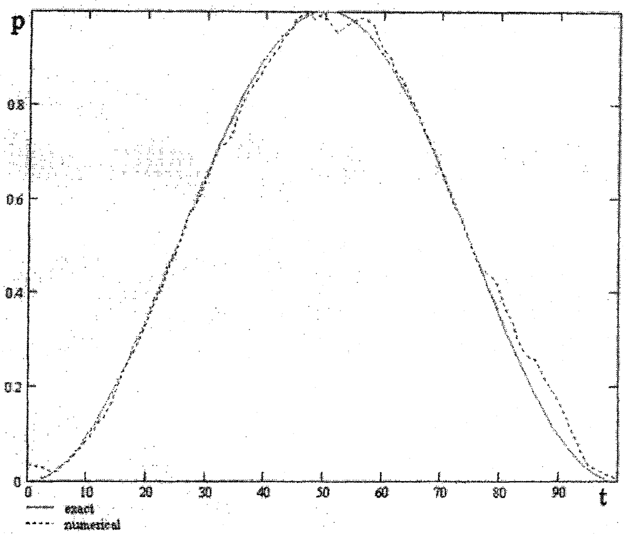
Приведем пример расчетов для модельной задачи

$$\begin{aligned} & f(x) = \left(sin^2(5/2\pi x) + sin^2(\pi x)\right) sin^2(1/2\pi x) \\ & \varphi(x) = 0 \\ & p(t) = sin^2(\pi t) \\ & h = 0.01 \\ & \tau = 0.01 \\ & T = 1 \end{aligned} \qquad (31)$$

Входные данные g_δ получены из решения прямой задачи, внесены возмущения с погрешностью в норме $\| \cdot \|_{C[0,T]}$. Величина погрешности $\delta = 0.03$:



Результат расчетов (20 итераций):



3.5 Обратная задача. Метод последовательных приближений

Для решения уравнения (23) применим метод последовательных приближений. Перепишем уравнение в виде

$$
\begin{aligned}
&p(t) - \int\limits_0^t -\frac{K_t(t,\tau)}{K(t,t)} p(\tau) d\tau = \frac{\overline{g}'(t)}{K(t,t)}, \\
&p(t) - \int\limits_0^t \overline{K}(t,\tau) p(\tau) d\tau = \gamma(t), \\
&\overline{K}(t,\tau) = -\frac{K_t(t,\tau)}{K(t,t)}, \\
&\gamma(t) = \frac{\overline{g}'(t)}{K(t,t)}.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Метод последовательных приближений задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(t) = \int\limits_0^t \overline{K}(t,\tau)\gamma(\tau)d\tau,\\
&\phi_{n+1}(t) = \int\limits_0^t \overline{K}(t,\tau)\phi_n(t)d\tau,\\
&p_N(t) = \gamma(t) + \sum_{n=1}^{N} \phi_n(t).
\end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что для применения метода последовательных приближений необходимо продифферецировать входную функцию $g(t)$. Эта задача является некорректной. Приближенно заданная функция $\overline{g}_\delta$ численно дифференцируется методом, описанным в [3]. Функция γ заменяется на

$$\begin{aligned}
&\gamma_\epsilon(t) = \frac{1}{K(t,t)}\frac{\overline{g}_\delta(t+\epsilon)-\overline{g}_\delta(t)}{\epsilon},\\
&\epsilon = \frac{\tau}{\delta^{-1/3}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Задав число итераций N, получаем приближенное решение $p_N(t)$ и

$$\| \, p\,(t) - p_N(t) \,\|_{C[0,T]} \to 0, \; N \to \infty. \tag{35}$$

Для вычислений по оси t вводится равномерная сетка $t_j = j\tau$, $j = 0,1...T$. Ядро заменяется своим аналогом $\kappa_{j,k} = -\overline{K}(j\tau, k\tau)$, $j = 0,1...T$ $k = j...T$. Интегральный оператор заменяется заменяется суммой по формуле трапеций:

$$\begin{aligned}
&\phi_{n+1}(t) = \int\limits_0^t \overline{K}(t,\tau)\phi_n(t)d\tau,\\
&\phi_j^{(n+1)} = \frac{\tau\kappa_{j,0}}{2}\phi_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{j-1}\kappa_{j,k}\phi_k^{(n)}\tau + \frac{\tau\kappa_{j,j}}{2}\phi_j^{(n)}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Как следует из проведенных расчетов, метод последовательных приближений применим для функций $g(t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

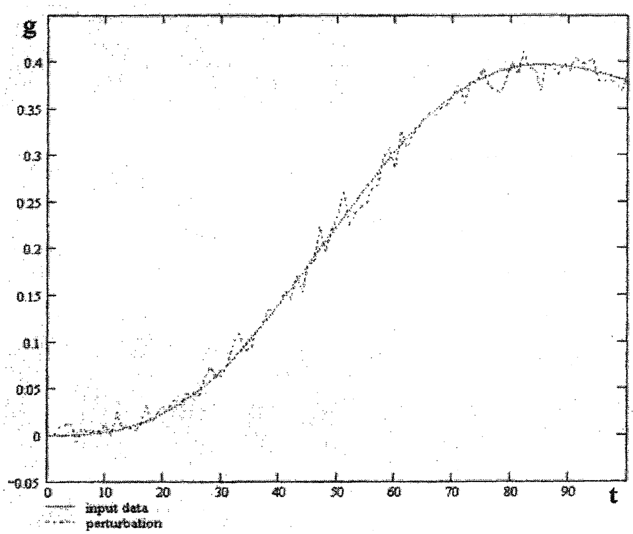
$$\begin{aligned}
&g(0) = 0, \quad \phi(0) = 0\\
&T \gg 1.
\end{aligned} \tag{37}$$

3.6 Примеры расчетов методом последовательных приближений

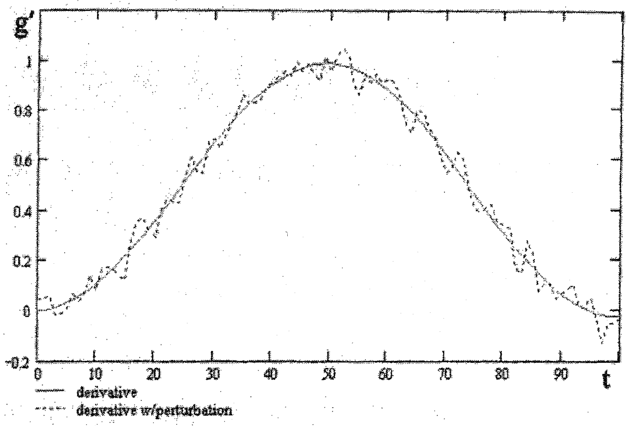
Приведем пример расчетов для модельной задачи.

$$
\begin{aligned}
&f(x) = sin^2(\pi/2x)\\
&\varphi(x) = 0\\
&p(t) = sin^2(0.1\pi t)\\
&h = 0.001\\
&\tau = 0.1\\
&T = 10
\end{aligned}
\tag{38}
$$

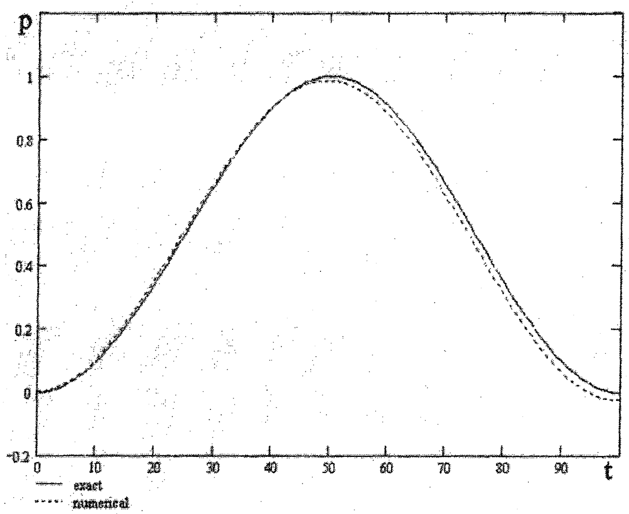
Входные данные g_δ получены из решения прямой задачи, внесены возмущения с погрешностью в норме $\|\cdot\|_{C[0,T]}$. Величина погрешности $\delta = 0.03$.



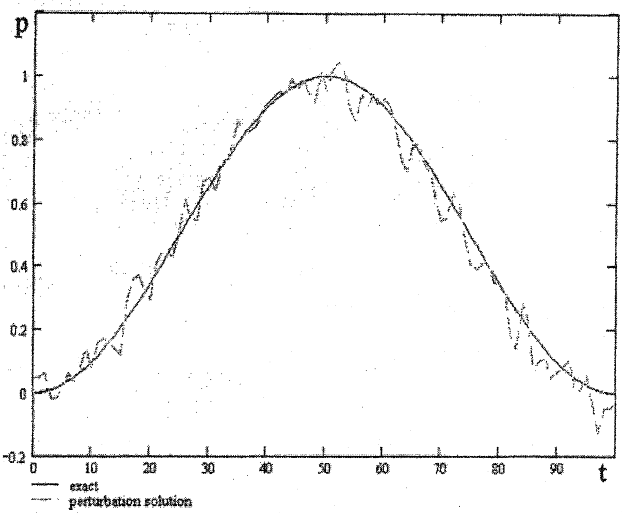
Результаты численного дифференцирования точных и возмущенных входных данных:



Результат расчетов с точными входными данными (100 итераций):



Результат расчетов с возмущенными входными данными (100 итераций):



Литература

1. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. Изд. "Факториал", 2003

2. *Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А.* Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды.

3. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. Изд. МГУ, 1995

4. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Дифференциальные уравнения. Том XIII, №2, 1977

5. *Ио нкин Н. И.* Разностные схемы для одной неклассической задачи. Вестник Московского университета. Сер. вычисл. матем. и киберн. №2, 1977

6. *Муравей Л. А., Филиновский А. В.* Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения.

7. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. Изд. МГУ, 1984

8. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения.

9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Изд. "Наука", 1972

10. *Mehdi Dehghan* On numerical solution of the diffusion. Mathematical Problems in Engineering 2003:2, 2003

11. *M. Denche, A. L. Marhoune.* High-order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions

12. *S. V. Koshkin, A. G. Ramm.* An inverse problem for an abstract evolution equation

13. *E. Mesloub, A. Bouziani.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations

14. *A. G. Ramm.* An inverse problem for the heat equation.