М. Д. Малых

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ[1]

Решение задачи о возбуждении колебаний в волноведущих системах финитным током вида $je^{-i\omega t}$ весьма затруднено явлением резонанса: поле, гармонически зависящее от времени, существует лишь при частотах ω, не принадлежащих так называемому резонансному множеству.

В случае регулярного полого волновода явление резонанса прямо связанно с тем, что при малых частотах большая часть энергии поля, возбужденного током $je^{-i\omega t}$, локализована, а при частотах, больших некоторой частоты $\omega[j]$, от области, где имеется ток, расходятся бегущие волны. Частоты $\omega[j]$, при которой происходит переход на режим излучения, и которые называют частотами отсечки, формируют резонансное множество регулярного волновода. При этих частотах существует лишь нестационарное поле, амплитуда которого растет со временем как $\sqrt{t}$.

Однако в более сложных системах (и в первую очередь в локально нерегулярных волноводах) среди резонансных частот есть и другие, не связанные с переходом к режиму излучения, характерной чертой которых является то, что при них существует лишь поле, амплитуда которого растет как t. В скалярном приближении задача о возбуждении колебаний током в локально нерегулярном волноводе при частотах, отличных от частот отсечки, является фредольмовой, то есть из единственности ее решения следует существование (обобщенного) решения (см. [2], [3]). Поскольку решение однородной задачи, называемой также спектральной, удовлетворяющее парциальным условиям излучения, принадлежит $L^2(\Omega)$, появление резонансных частот, отличных от частот отсечки, связано с существованием у спектральной задачи точечного спектра.

Вопрос о существовании собственных значений спектральной задачи для волноведущих систем является чрезвычайно трудным. На саму возможность существования собственных значений у спектральных задач в неограниченных областях впервые указал Ф. Реллих в 1948 году (см. [4]). Затем в работах Д. Джонса и других авторов (см. [5]-[7]) был построен ряд примеров таких волноведущих систем, именно, ряд локально

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-01-00111) и программы "Университеты России" (код 015.03.02.001)

нерегулярных волноводов или изогнутых волноводов. С физической точки зрения такие собственные функции представляют собой стоячие волны, не переносящие энергию. Во всех этих примерах поле убывает вдоль оси волновода экспонециальным образом. Большая часть энергии таких волн сосредоточена в конечной области, в <ловушке>, поэтому их и называют ловушечными модами. Впрочем, как было показано в нашей работе [8], в гофрированных волноводах существуют собственных функции, убывающие существенно медленнее – именно, степенным образом.

В скалярном случае в соответствующем пространстве Соболева W_2^1 задача об отыскании ловушечных мод представляет собой задачу отыскания собственных векторов ограниченного эрмитова оператора A:

$$u + \omega^2 Au = 0, \quad u \in W_2^1.$$

К настоящему моменту развиты методы анализа лишь изолированных (то есть лежащих вне непрерывного спектра) собственных значений. Непрерывный спектр имеет простой физический смысл – это множество частот, при которых происходит излучение в бесконечные участки волновода. Значит, непрерывный спектр регулярного волновода начинается с первой частоты отсечки, а, в силу теоремы Вейля, непрерывный спектр локально нерегулярного волновода совпадает со спектром регулярного, то есть тоже начинается с первой частоты отсечки. Поэтому при помощи принципа Релея и его модификаций можно не только уточнить упомянутые выше условия существования ловушечных мод (частоты которых меньше первой частоты отсечки), но и изучить другие свойства дискретной части спектра. В частности, если регулярный волновод локально расширен или внутрь него помещено диэлектрическое тело, то существует хотя бы одно собственное значение, лежащие ниже первой частоты отсечки (см. [3]). Последнее утверждение верно и для векторного случая, хотя вид его непрерывного спектра пока не изучен.

В [7] было особо отмечено, что в вопросе существования вложенных собственных значений нет продвижения дальше построения примеров, и было предложено выяснить, сохранится ли собственное значение у волноведущей системы, если слегка возмутить ее параметры. Если бы резонансное множество оказалось бы устойчивым к малым возмущениям параметров системы, то можно было бы утверждать, что известные примеры верно отражают характерные свойства резонансного множества произвольного волновода. Целью наших работ [9]-[11] как раз и было изучение поведения вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода при малых возмущениях его заполнения.

Именно, рассмотрим волновод

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, y \in S\}$$

с сечением S, представляющим собой односвязную конечную область в пространстве $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$, заполненный неоднородным веществом, характеризуемом функцией $q(x, y)$. Задача о возбуждении колебаний током $fe^{-i\omega t}$ в скалярном приближении имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 q(x, y) u = f, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

а соответствующая ей спектральная задача –

$$\begin{cases} \Delta u + e q(x, y) u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где e – собственное значение, а u – собственная функция. Будем далее всюду предполагать, что в волноводе не происходит затухание колебаний из-за поглощения в среде, то есть что $q(x, y)$ – вещественная, и что неоднородность локальная, то есть что носители функций f и $q - 1$ ограничены.

Нами было показано, что эта задача всегда имеет решение, если заполнение волновода представляет собой <вставку> (то есть $q(x, y) \equiv q_0(x)$) и $q_0(x) - 1 \geq 0$). Например, на рис. 1 для плоского волновода ширины π, в который вставлена пластина длины 2 с постоянным значением $q > 1$, отображены собственные частоты ω(корни из собственных значений) как функции q (см. также [12]).

Если $q_0 - 1$ достаточно мало, то, обозначив как $\{\psi_n(y)\}$ и $\{\alpha_n^2\}$ набор собственных функций и собственных значений задачи Дирихле на сечение S, одну из собственных функций можно представить в виде произведения $u_0(x)\psi_2(y)$. Для краткости собственное значение, отвечающее этой функции будем далее обозначать как $e^{(2)}$ Целью дальнейшего рассмотрения было исследовать, сохранится ли вложенное собственное значение, если это заполнение будет возмущено:

$$q(x, y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x, y),$$

где q_1 – вещественная функция, а параметр ε характеризует малость возмущения.

Воспользовались тем, что задача (1) может быть сведена к виду

$$v - \mathfrak{A}(\omega^2, \varepsilon)v = f, \tag{3}$$

где $\mathfrak{A}(\omega^2, \varepsilon)$ – компактный интегральный оператор, голоморфный при $\omega^2 \neq \alpha_n^2$, а точки α_n^2 являются точками ветвления. Как показано в [10], собственные значения этого интегрального уравнения лежащие на главном листе и его границе можно интерпретировать как собственные значения задачи (2), а кратности собственных значений интегрального уравнения являются кратностями собственных значений задачи (2).

Заметим теперь, что подготовительная теорема Вейерштрасса переносится на оператор-функции $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$: если в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ компактный оператор $\mathfrak{A}(\lambda, \varepsilon)$, голоморфный в области B λ-плоскости и в области $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, имеет при $\varepsilon = 0$ в области B только одно собственное значение e_0 кратности N, то все его собственные значения $\{e^{(n)}(\varepsilon)\}$, лежащие в области B, являются корнями алгебраического уравнения

$$e^N + a_1(\varepsilon)e^{N-1} + \cdots + a_N(\varepsilon) = 0,$$

где функции $a_n(\varepsilon)$ являются аналитическими функциями ε, регулярными в нуле (см. приложение к [9]).

Согласно этой теореме в окрестности однократного собственного значения e_0 невозмущенной задачи (2), а, следовательно, и оператор-функции $\mathfrak{A}$ имеется собственное значение $e(\varepsilon)$ оператор- функции $\mathfrak{A}$. Если e_0 – изолированное собственное значение задачи (2), то оно является однократным собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e, 0)$, лежащим внутри главного листа. Следовательно, в достаточно малой окрестности e_0 лежит единственное собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$. Поскольку малая окрестности e_0 лежит на главном листе, $e(\varepsilon)$ – единственное возмущенное собственное значение задачи (2) с возмущенным заполнением, стремящиеся к e_0 при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Однако, если e_0 – вложенное в непрерывный спектр собственное значение задачи (2), то оно является собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e, 0)$, лежащим на границе главного листа. Поэтому хотя в достаточно малой окрестности e_0 лежит единственное собственное значение $e(\varepsilon)$ оператора $\mathfrak{A}(e, \varepsilon)$, это собственное значение может и не лежит на главном листе и значит, не быть собственным значением (2) с возмущенным заполнением. Это означает, что может существовать не более одного собственного значения возмущенной задачи (2), стремящегося к e_0 при $\varepsilon \longrightarrow 0$. При этом, если оно существует, то оно совпадет с соответствующим собственным значением оператора $\mathfrak{A}(e,\varepsilon)$, и следовательно, зависит от ε аналитически.

Предположим теперь, что при любом $q_1(x,y)$ в окрестности собственного значения $e_0 \equiv e^{(2)}$ существует собственное значение возмущенной задачи (2). Тогда это собственное значение и соответствующую ему собственную функцию можно разложить в ряды:

$$e(\varepsilon) = e_0 + e_1\varepsilon + \ldots, \qquad u(x,y;\varepsilon) = u_2(x)\psi_2(y) + \varepsilon u_1(x,y) + \ldots .$$

Умножив (2) на $\psi_1(y)$ и проинтегрировав по всему сечению S, получим

$$\frac{d^2}{dx^2}\int\limits_S dy u(x,y)\psi_1(y) + e\int\limits_S dy\, q(x,y)u(x,y)\psi_1(y) = \alpha_1^2\int\limits_S dy u(x,y)\psi_1(y).$$

Подставим сюда ряды для $e(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$, тогда в первом порядке теории возмущений, обозначив

$$-\int\limits_S dy u(x,y)_1\psi_1(y) = w(x),$$

получим

$$w'' + [e_0q_0(x) - \alpha_1^2]w = e_0u_2(x)\int\limits_S dy\, q_1(x,y)\psi_1(y)\psi_2(y).$$

Для того чтобы $u(x,y;\varepsilon)$ принадлежало L^2, необходимо, чтобы и $w(x)$ принадлежала $L^2(\mathbb{R}^1)$. Поскольку носитель возмущенного заполнения $q(x,y) - 1$ ограничен, это уравнение имеет решение, принадлежащее пространству L^2, лишь при весьма специальных условиях на $q_1(x,y)$. Тем самым доказано следующее.

Теорема 1. *Существуют такие кусочно-непрерывные вещественные возмущения $q_1(x,y)$ исходного заполнения $q_0(x)$, что в окрестности невозмущенного собственного значения нет возмущенных собственных значений.*

Таким образом, резонансное множество волновода неустойчиво к малым возмущениям заполнения и поэтому структура резонансного множества в общем случае сложнее, чем в известных примерах волноведущих систем, обладающих вложенными собственными значениями. При этом получается, что резонансные частоты могут исчезать при вещественных (а не только комплексных) возмущениях заполнения.

Литература

1. Werner P. Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern//Z. Angew. Math. Mech. 1987. Bd. 67. т4. S.43-54.
2. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М.: Наука, 1987.
3. Делицын А.Л. О задаче рассеяния на неоднородности в волноводе // ЖВМ. 2000 Т. 40. т 4. С. 606-610.
4. Rellich F. Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren // Studies and essays presented to R. Courant. N-Y., 1948. P. 329-344.
5. Jones D.S. The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u$ when the boundary conditions are on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. V. 49. P. 668-684.
6. Evans D.V., Porter R. Trapped modes embedded in the continuous spectrum // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51. P. 263-274.
7. Davies E.B., Parnovski L. Trapped modes in acoustic waveguides // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51. P. 477-492.
8. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. Об одном примере ловушечных мод в нерегулярном волноводе // ЖВМ. 2002. Т. 43 т 1. С. 147-152.
9. Боголюбов А.Н., Малых М.Д. Теория возмущений для вложенных собственных значений волновода // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал `http://jre.cplire.ru`). 2002, т 2.
10. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. Явление резонанса в волноводе с неоднородным заполнением // ЖВМ. 2002. Т. 42. т 12. С. 1833-1847.

11. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. О неустойчивости вложенных в непрерывный спектр собственных значений волновода по отношению к возмущениям его заполнения // Докл. РАН. 2002. Т. 385. т 6. С. 744-746.

12. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. О вещественных резонансах в волноводе с неоднородным заполнением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2001, т 5. С. 23-25.