А.И. Машечкин, Н.М. Новикова

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ИГРОК В ЗАДАЧЕ О ВЕТО-ГОЛОСОВАНИИ

1. Введение. Первым процедуру голосования с правом вето рассмотрел австрийский математик Д. Мюллер. В статье “Voting by veto”([1]) он предложил последовательное голосование на основе ветования в качестве метода деления некоего общественного блага B среди группы из n человек. Каждый из них выдвигает своё предложение по распределению B. После этого каждый из n голосующих в заранее определённом случайным образом порядке ветует, т.е. накладывает вето (запрет на избрание) на одну из альтернатив из числа ещё незаветованных предложений. Помимо предложений друг друга участники имеют возможность голосовать за отмену дележа – при выборе этого варианта (если все предложения будут заветованы) никому из участников ничего не достаётся (так называемый вариант статус-кво). Число вариантов с учетом статус-кво превосходит на 1 число голосующих, что, в свою очередь, всегда обеспечивает выбор одного из вариантов, выдвинутых на голосование. Единственное, оставшееся незаветованным, предложение приводится в исполнение.

По мнению Мюллера, указанный механизм хорошо рассматривать как описание демократической процедуры раскрытия индивидуальных предпочтений относительно общественных благ. У этого механизма есть четыре явных преимущества:

- несмотря на предложения участников, порядок ходов и возникновение цикличности предпочтений, он обеспечивает единственное выигрывающее предложение,
- если участники действуют рационально, то победившее предложение должно быть Парето-оптимальным,
- механизм удовлетворяет принципу меньшинства - каждый голосующий может избежать избрания наихудшего для него предложения путём наложения вето на это предложение,
- механизм честный, так как любой участник имеет одинаковый шанс оказаться на определённом месте в порядке голосования.

Для исследования данного механизма Мюллер предложил использование математического аппарата теории игр (см. работы [2-6]). В своей статье [1] Мюллер показал, что в случае двух голосующих игрок, накладывающий вето первым, имеет преимущество, так как второй игрок будет вынужден заветовать возможность сохранения статус-кво, если предложение первого сулит ему хотя бы какую-то часть блага. Тогда как в случае, как минимум, троих участников дележа, первый голосующий может уже не иметь преимущества. В такой модели играет роль выгода для остальных участников от предложения каждого голосующего (например, в игре с тремя голосующими в 83% случаев побеждает предложение с наибольшей выгодой для двух из трех игроков [1]). Позднее эти утверждения были распространены Э. Муленом [2] на общий случай выбора n игроками из n+1 варианта предложений (и не только в задаче о дележе).

В результате моделирования последовательного голосования ветованием в реальных условиях ([7]) была установлена обратно пропорциональная зависимость между частотой использования информации о предпочтениях других игроков и количеством голосующих.

Таким образом, получаем весьма удобную процедуру для принятия решений сравнительно небольшим числом представителей коллектива по вопросам: бюджета компании, выбора кандидата на управленческую позицию, стратегии развития компании, распределения инвестиций и т.п. Тем не менее, для того чтобы эта процедура была коллективом одобрена, нужен подробный анализ ее свойств в условиях определенного управления процедурой голосования, в частности, преимуществ для первого голосующего (далее – 1-й игрок), поскольку им, как правило, становится руководитель коллектива.

Предположим, что выбор процедуры голосования осуществляется 1-м игроком. При этом относительно предпочтений других членов коллектива ему известны наилучшие для каждого из них проекты (кандидаты) и порядок расположения остальных вариантов, в том числе, лидирующего для 1-го игрока. Для того чтобы 1-й игрок принял решение о голосовании путем ветования, ему нужно оценить шансы на прохождение своего варианта, а для этого иметь условия на предпочтения остальных участников, гарантирующие выбор его предложения. Подобные условия были ранее ([6]) получены для случая трех игроков и четырех альтернатив. Однако в реальных ситуациях принятия решений зачастую бывают случаи "вброса" дополнительных предложений с целью повысить шансы на прохождение своего варианта. Изучению влияния указанного фактора посвящена данная статья. В игре четырех лиц, соответствующей принятию коллективных решений путем вето-голосования, найдены условия на предпочтения игроков, необходимые и достаточные для принятия варианта 1-го игрока, классифицированы случаи, когда ему возможно обеспечить свое решение, и оценено их число относительно всех видов распределения предпочтений (в предположении, что предпочтения являются строгими). Сравнение полученных результатов с имевшимися для игр трех лиц позволило количественно измерить роль дополнительного игрока в зависимости от предпочтительности его нового варианта для остальных участников процедуры вето-голосования.

2. Постановка задачи. Для моделирования правил принятия решений традиционно применяется теория игр и исследование операций [3–5]. Основной моделью для анализа поведения лиц, принимающих решение, в частности, выборщиков, является игра в нормальной форме. Дадим её определение, следуя [4].

Определение 1. Пусть N – фиксированное конечное множество – модель коллектива или другого сообщества, членов которого будем обозначать индексом $i = 1,2,\ldots,n$ и называть игроками. Игрой в нормальной форме называется совокупность, которая включает в себя множество N, и для каждого i из N содержит:

- множество стратегий X_i, элементы которого обозначаются через x_i,
- функцию выигрыша u_i, являющуюся отображением из $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ в R.

Элемент $x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ из множества X называется исходом игры.

Игроки i независимо и одновременно выбирают любые стратегии $x_i \in X_i$. После того, как каждый игрок выбрал свою стратегию, определяется исход x и выигрыши $u_i(x)$ игроков $i = 1,2,\ldots,n$.

В игре, соответствующей голосованию, функции выигрыша представимы в виде

$$u_i(x) = U_i(p(x)), \qquad (2.1)$$

где p – функция голосования, которая ставит в соответствие исходу игры (т.е. набору x стратегий, выбранных игроками) вариант решения $p(x)$, U_i – отображение множества вариантов решений на числовую ось. Для рассматриваемого правила голосования путём ветования стратегия каждого игрока состоит в отводе одного из вариантов, а решение выбрано, если никем не заветовано. Через $U_i(m)$ обозначается выигрыш, который получит i-й игрок при принятии решения m, т.е. насколько i-му голосующему выгоден вариант m. Игроки стремятся к максимизации своей функции выигрыша.

Рассмотрим задачу выбора одного из вариантов реформирования компании на совете директоров. Пусть в процессе выборов обсуждаются n+1 вариантов решения. Причём n из них выдвинуты членами совета директоров, а один соответствует отказу от реформирования. Голосуют сторонники вариантов реформирования. Каждый вариант имеет в совете директоров представителя, для которого это решение является наилучшим. У варианта отказа от реформирования компании нет своего представителя на выборах, однако этот вариант не обязательно оказывается у голосующих на последнем месте. Далее для простоты не допускаем возможности наличия нескольких одинаково выгодных вариантов решений.

Решения будем обозначать цифрами 1, 2, ..., n, n+1. Каждая цифра, кроме n+1, соответствует номеру представителя данного решения в голосовании и номеру игрока. Пусть, если не оговорено иное, номер игрока совпадает с порядковым номером в голосовании – ветовании. Рассматривается игра с открытым голосованием – игроки накладывают вето последовательно, причём каждый из них знает, запрет на выбор каких решений уже был наложен, и удаляет одно из ещё незаветованных решений. То есть, вето может быть наложено на каждый из вариантов решений максимум один раз. При этом перед голосованием все игроки проинформированы о предпочтениях друг друга.

Данная модель принятия решений представима ([3]) в виде игры в нормальной форме

$$\mathbf{\Gamma} n = \langle N, X_i^*, u_i^* \rangle, \tag{2.2}$$

где $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество игроков, т.е. голосующих (выбирающих) участников;

X^*_i – множество отображений $X_1 \times \ldots \times X_{i-1}$ в X_i, а $X_i = \{1,2, ..., n, n+1\} \setminus \{i, x_1,...,x_{i-1}\}$ – множество действий игрока i, заключающихся в выборе решения, на которое он накладывает вето (и это решение уже выбывает из рассмотрения); т.е. стратегия i-го игрока $x^*_i = x_i\,(x_1,...,x_{i-1})$ – функция его действий в зависимости от действий уже проголосовавших игроков (с меньшими номерами);

$$u^*_i(x^*) = U_i(p^*(x^*)),\ \ p^*(x^*)= p(x_1, x_2(x_1), ..., x_n(x_1,...,x_{n-1})). \tag{2.3}$$

Предположим, что для каждого голосующего функции выигрыша заданы не явно, а системой предпочтений, т.е. известны строгие неравенства между значениями функций выигрыша в случае принятия каждого из вариантов. Например, для n=3

$$U_1(1) > U_1(a^1) > U_1(b^1) > U_1(c^1), \qquad a^1, b^1, c^1 \in \{2,3,4\};$$

$$U_2(2) > U_2(a^2) > U_2(b^2) > U_2(c^2), \qquad a^2, b^2, c^2 \in \{1,3,4\}; \tag{2.4}$$

$$U_3(3) > U_3(a^3) > U_3(b^3) > U_3(c^3), \qquad a^3, b^3, c^3 \in \{1,2,4\}.$$

Для определённости проводится исследование с точки зрения первого голосующего. Так как 1-му игроку выгоден только свой вариант, то его предпочтения относительно других вариантов для исследования безразличны. Поэтому далее для спецификации конкретных условий игры будем вместо (2.4) использовать сокращенную запись в форме матрицы предпочтений остальных игроков:

$$\begin{array}{l} 2 \quad a^2 \ldots c^2 \\ 3 \quad a^3 \ldots c^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{n} \quad a^{\mathrm{n}} \ldots c^{\mathrm{n}}, \end{array} \tag{2.5}$$

варианты в строках которой упорядочены по убыванию функций предпочтения соответствующих голосующих, $a^2, \ldots, c^2 \in \{1, 3, \ldots, n+1\}$; $a^3, \ldots, c^3 \in \{1, 2, 4, \ldots, n+1\}$; ...; $a^n, \ldots, c^n \in \{1, \ldots, n-1, n+1\}$.

Задача: выяснить, при каких условиях 1-й игрок обеспечивает прохождение своего варианта, – в зависимости от порядка голосования и расположения предпочтений других голосующих, т.е. от вида соотношений (2.5), формирующих конкретную игру.

Игры, в которых 1-й игрок имеет стратегию, гарантирующую при рациональном поведении остальных участников выбор 1-го варианта, будем называть победными. Формально, в победной игре для сложного равновесия [5] x^0 выполнено $p(x^0) = 1$.

3. Решение задачи с ростом n. Рассмотрим сначала случай трех игроков. Всего для $\mathbf{Г}_3$ возможно 36 игр, отличающихся порядком предпочтений 2-го и 3-го игроков. В [6] было доказано, что 1-й игрок может обеспечить победу своего предложения в 14 играх, т.е. в **39%** случаев расположения предпочтений у остальных игроков. При наличии у 1-го игрока возможности формирования порядка ходов шансы на победу решения 1-го игрока возрастают до 16/36 = **44%**. Для 1-го игрока гораздо больше шансов обеспечить выбор своего предложения, если на место второго голосующего он может определить игрока, который более расположен к решению 1-го.

Победные игры характеризуются следующим.

1-й игрок должен обеспечить, чтобы его вариант не вычеркнули другие игроки. Для этого ни у одного из них вариант 1 не должен стоять на последнем месте, а для игрока, у которого вариант 1 стоит на предпоследнем месте, не должен быть другими заветован вариант, стоящий на последнем месте. Назовем эти требования Условием 1.

Для выполнения 2-й части Условия 1 необходимо, чтобы вариант 1 не был на предпоследнем месте у двух игроков с одним и тем же вариантом на последнем месте (далее – Требование 2).

Из результатов [6] получаем, что при возможности формирования порядка ходов Условие 1 с Требованием 2 является в $\mathbf{\Gamma}_3$ необходимым и достаточным для победы варианта 1.

В отсутствие возможности формирования порядка ходов, указанного необходимого условия недостаточно для гарантии варианта 1, как видно на примере следующей игры:

2 3 1 4

3 1 2 4

Здесь, если 1-й игрок ветует вариант 2, то побеждает вариант 3 (что бы ни заветовал 2-й игрок), а если 1-й игрок ветует вариант 3, то побеждает вариант 2, причем для обеспечения своей победы 2-й игрок ветует вариант 1. Если бы 1-й игрок мог поменять порядок ветования 2-го и 3-го участников, то он бы получил победную игру (1-й ветует вариант 3, затем 3-й участник ветует вариант 2)

Для общего случая необходимым и достаточным для победы варианта 1 является исходное общее Условие 1 (которому в [6] дана более конструктивная формулировка).

Рассмотрим теперь случай 4-х игроков и предположим наличие возможности формирования порядка ходов. При этом также необходимым, очевидно, является Условие 1 с Требованием 2, но в $\mathbf{\Gamma}_4$ необходимо еще одно дополнительное требование.

Требование 3. Число различных вариантов, находящихся правее варианта 1 в матрице (2.5) упорядоченных предпочтений остальных игроков, должно быть больше двух.

Утверждение 1. Требование 3 является необходимым условием победной игры в $\mathbf{\Gamma}_4$.

Доказательство. Пусть игра является победной, тогда выполнено Условие 1, Требование 2, а также если у игроков 2-4 один и тот же набор предпочтений на трех последних местах, то среди них не может быть варианта 1. Действительно, предположив, что вариант 1 является у партнеров даже третьим с конца, получим, что после того, как два игрока заветуют два других последних варианта, третьему из них останется заветовать вариант 1, каким бы ни был порядок ходов между ними. Теперь рассмотрим остальные возможные случаи невыполнения Требования 3 в победной игре. Из выполнения Требования 2 получаем, что вариант 1 должен быть третьим с конца хотя бы у одного из партнеров 1-го игрока. Если у двух партнеров, то это – один и тот же набор вариантов, которые хуже варианта 1 и которые они заветуют, после чего у третьего партнера – у кого вариант 1 был на предпоследнем месте – окажется последним вариант 1. Каким бы ни был порядок ходов, этот игрок рассчитает, что его худший вариант все равно будет заветован, и заветует вариант 1. Остается лишь случай, когда вариант 1 на предпоследнем месте у двоих из игроков 2-4 и третий с конца у третьего, и тогда те варианты, которые у двоих на последнем месте, у третьего оказываются хуже варианта 1, например, при следующей матрице предпочтений:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5. \end{matrix}$$

Поскольку рассматривается игра **Г**n с полной информацией [3,5], а предпочтения игроков – строгие, то они однозначно вычисляют рациональные стратегии друг друга (и ходы тех, кто ходит после). Таким образом, даже если вариант 1 будет третьим у игрока 2, он рассчитает, что 3-й и 4-й игроки вычеркнут худшие варианты, и заветует вариант 1, чтобы обеспечить себе вариант 2 или 2-й по предпочтительности. Получили противоречие с тем, что игра – победная. Утверждение доказано.

Сформулируем рассмотренные требования в общем виде. Обозначим через J_i множество вариантов j, которые для i-го участника игры хуже варианта 1.

Условие 2. Для любого подмножества I игроков {2, ..., n} число элементов в объединении J_i по i из I не меньше числа игроков в I.

Обозначим через К объединение J_i по всем $i \in \{2, ..., n\}$, тогда Требование 3 перепишется в форме: $|K| \geq |N \setminus \{1\}| = n\text{-}1$.

Следующий пример показывает, что в общем случае для того, чтобы игра была победной, не достаточно выполнения Условия 2:

$$\begin{matrix} 2\ 5\ 3\ \underline{1}\ 4 & & 2\ 3\ \underline{1}\ 4\ 5 & & 2\ 3\ 1\ \underline{4}\ 5 \\ 3\ 2\ 1\ \underline{4}\ 5 & \text{или} & 3\ 5\ 2\ 1\ \underline{4} & \text{или} & 3\ 4\ 1\ 2\ \underline{5} \\ 4\ 3\ 1\ 2\ \underline{5} & & 4\ 2\ 1\ 3\ \underline{5} & & 4\ 5\ 3\ 1\ \underline{2} \end{matrix} \qquad (3.1)$$

Рассмотрим левую матрицу в (3.1): если 2-й игрок не заветует вариант 1, то в итоге и сложится этот вариант, находящийся для него на предпоследнем месте. Тогда как при рациональном поведении он обеспечивает себе лучшую долю. В (3.1) и далее подчеркиванием в матрице предпочтений выделим варианты, которые ветует соответствующий игрок при рациональном поведении. Если переставить порядок ветования между 2-м и 3-м участниками игры при сохранении их исходных предпочтений (средняя матрица в (3.1)), то и новому 2-му игроку (бывшему 3-му) выгодно ветовать вариант 1, так как это дает ему первый или второй по его предпочтительности вариант (в зависимости от того, что ветует 1-й игрок). Победной левая игра в (3.1) становится после перестановки порядка голосования 2-го и 4-го участников игры (при сохранении за ними исходных предпочтений), - правая матрица в (3.1). И для обеспечения принятия решений по варианту 1 надо 1-му игроку заветовать вариант 3 на первом шаге игры, заданной правой матрицей предпочтений в (3.1).

Утверждение 2. При возможности формирования порядка ходов в $\mathbf{Г}_4$ Условие 2 является необходимым и достаточным условием победной игры.

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 1. Обоснуем достаточность: если в игре выполнено Условие 2, то найдется такой порядок ходов игроков, что игра будет победной. Для чего определим порядок ходов в зависимости от случаев расположения варианта 1 в предпочтениях у партнеров 1-го игрока. Дополнительной цифрой в номере случая будем обозначать его подслучаи.

1). Раз выполнено Условие 2 (и 1), вариант 1 не может быть в последнем столбце (2.5). Пусть есть игрок, у которого вариант 1 на предпоследнем месте. Поставим его 4-м по порядку ходов.

1.1). Пусть есть другой игрок, у которого вариант 1 на предпоследнем месте. Поставим его 3-м по порядку ходов.

1.1.1). Пусть есть третий игрок, у которого вариант 1 на предпоследнем месте. Поставим его 2-м по порядку ходов. По Требованию 2 все последние варианты у них разные, поэтому, если их не заветует 1-й игрок, то игрокам придется самим ветовать свои худшие варианты, оставив вариант 1 в покое. Поскольку, кроме варианта 1, есть еще четыре других варианта, то 1-й игрок может выбрать из них для ветования не последний ни для кого из партнеров. Значит такая игра – победная.

1.1.2). Если в 1.1 не выполнен подслучай 1.1.1, то у 2-го игрока вариант 1 будет на втором или третьем месте, т.е. получаем одну из следующих групп игр:

$$\begin{array}{l} 2\ \ 1\ \ a^2\ \ \mathrm{b}^2\ \ c^2 \quad \text{или} \quad 2\ \ a^2\ 1\ \ \mathrm{b}^2\ \ c^2 \\ 3\ \ a^3\ \ \mathrm{b}^3\ \ 1\ \ c^3 \\ 4\ \ a^4\ \ \mathrm{b}^4\ \ 1\ \ c^4\,, \end{array} \tag{3.2}$$

где c^3 не равно c^4 по Требованию 2, а по Требованию 3 объединение c^2 и b^2 отлично от объединения c^3 и c^4. Если все эти 4 варианта – разные, то заветовав c^2 или b^2, 1-й игрок уверен, что остальные игроки не будут ветовать вариант 1, поскольку должны самостоятельно заветовать худшие для себя варианты. Пусть для определенности $c^3 = c^2$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Тогда 2-й игрок знает, что c^2 будет заветован, и если 1-й игрок не заветовал b^2, то ветует этот вариант. Так что, 1-й игрок должен ветовать вариант 2, если $c^3 = a^2$, и вариант a^2, если $c^3 = 2$ (поскольку в $\mathbf{Г}_4$ лишь 5 вариантов). Показали, что игры (3.2) – победные.

1.2). Если у одного 4-го игрока вариант 1 – предпоследний, то имеем игры типа

$$\begin{matrix} 2 & a^2 & 1 & \mathrm{b}^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & 1 & \mathrm{b}^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & \mathrm{b}^4 & 1 & c^4 \end{matrix} \tag{3.3}$$

с точностью до перестановки варианта 1 на вторую позицию у 2-го и (или) 3-го игроков. Причем, в матрице (3.3) число |K| вариантов в множестве К=$\{c^2, b^2, c^3, b^3, c^4\}$ больше двух (по Требованию 3). Пусть сначала |K| = 4, тогда К содержит все варианты, кроме 1. Предположим для определенности, что $c^2 = c^4$ (случай $b^2 = c^4$ аналогичен). Получим: 1-й игрок должен заветовать b^3 и остальные игроки будут ветовать варианты, худшие, чем 1. Такая игра – победная. При этом, если бы вариант 1 у 2-го и (или) 3-го игрока был на втором (а не на третьем) месте, то ситуация для него бы не ухудшилась и стратегия 1-го игрока ветовать b^3 осталась бы гарантирующей этот вариант. Если $c^4 = c^3$ или b^3 (при варианте 1 на втором – третьем месте у 2-го и 3-го игроков), то оптимальная стратегия 1-го игрока – ветовать b^2. Если же в (3.3) $c^2 = c^3$ (или другие случаи, когда $|\{c^2, b^2, c^3, b^3\}| = 3$), то все три варианта из $К\backslash\{c^4\}$ будут у 2-го или 3-го игрока хуже варианта 1 и они будут ветовать те из них, которые не заветованы 1-м игроком. Поэтому, если 1-й игрок вычеркнет $c^2 = c^3$ (вариант из пересечения J_2 и J_3), остальные игроки окажутся в ситуации, рассмотренной ранее для случая 1.1.1. Следовательно, при |K| = 4 игры (3.3) – победные.

Пусть теперь |K| = 3, тогда1-й игрок должен не заветовать варианта из К (т.е. у него остается единственная возможная стратегия). Из Условия 2 вытекает, что $|К\backslash\{c^4\}| \geq 2$. Если $|К\backslash\{c^4\}| = 2$, то $J_2 = J_3$ и не содержит c^4. Тем самым, игра фактически свелась к $\mathbf{Г}_3$ (не зависит от 4-го игрока), которая в силу выполнения Требования 3 для нее является победной, следовательно, победной оказываются и исходные игры (3.3) для рассмотренного случая.

Если $|К\backslash\{c^4\}| > 2$, то, значит, $|К\backslash\{c^4\}| = 3 = |K|$, т.е. вариант c^4 находится среди решений c^2, b^2, c^3, b^3, из которых два варианта (с разными верхними индексами) совпадают.

Рассмотрим случай $c^4 = c^3 = c^2$. Если 2-й игрок ветует c^2, то 3-й ветует b^3 и 4-й игрок заветует вариант 1, а вариант b^2, находящийся для 2-го игрока на предпоследнем месте, окажется принятым. Поэтому 2-й игрок вычеркнет b^2 и 3-й вычеркнет b^3 (по тем же соображениям), а тогда уж 4-й игрок заветует c^4. Доказали победность игр для рассматриваемого случая. Аналогичные рассуждения справедливы и для случаев $c^4 = c^3 = b^2$, $c^4 = b^3 = b^2$, $c^4 = b^3 = c^2$.

Рассмотрим иной случай: $c^3 = c^2$, $c^4 = b^2$, – когда совпадающими в K оказываются две пары, а не тройка вариантов. Если 2-й игрок ветует c^2, то 3-й ветует b^3 и 4-й игрок заветует вариант b^2. Если же 2-й игрок заветует b^2, то 3-му придется заветовать c^3 (а иначе, этот наихудший для него вариант не будет заветован), т.е. вариант, находящийся и для 2-го игрока на последнем месте, после чего 4-й игрок спокойно вычеркнет вариант 1, так что будет принят либо вариант 2, либо a^2 (тот, который не заветован 1-м игроком). Отметим, что оба этих варианта вместе не могут оказаться заветованными, поскольку один из них совпадает с b^3 (по остаточному принципу). Ясно, что если бы b^3 был заветован 1-м игроком, то ситуация бы не поменялась. Единственная возможность у 1-го игрока в этом случае – это поменять порядок ходов 2-го и 3-го участников игры. Первым из них должен голосовать тот, у кого Ji не включает c^4. Получим соотношение: $c^3 = c^2$, $c^4 = b^3$, при котором уже побеждает вариант 1. Действительно, если 2-й игрок ветует c^2, то 3-й ветует b^3 и 4-й игрок заветует вариант 1 (остается b^2 – предпоследний для 2-го игрока), а если 2-й ветует b^2, то 3-й ветует c^3 и 4-й игрок заветует вариант b^3 – эта стратегия лучше для 2-го игрока и обеспечивает вариант 1.

В общем случае попарных равенств вариантов в K выигрыш варианта 1 обеспечен при $c^4 = b^3$ и $c^3 = c^2$ или b^2, а также при $c^4 = c^3$ и $b^3 = c^2$ или b^2. Если $c^4 \in J_2$, то для выигрыша варианта 1 следует поменять порядок ходов 2-го и 3-го участников, чтобы получить случай $c^4 \in J_3$, при котором уже эта игра будет победной (см. так же правую игру в (3.1)). Разберем для примера случай $c^4 = c^3$ и $b^3 = b^2$. Если 2-й игрок ветует c^2, то либо 3-й ветует b^3 и 4-й игрок заветует вариант c^4, либо 3-й ветует c^3 и 4-й игрок заветует вариант 1 (остается b^3 – предпоследний для 3-го), что 3-му менее выгодно. Если 2-й ветует b^2, то 3-й игрок ветует либо c^3 (и тогда 4-й ветует вариант 1), либо вариант 1 (и 4-й игрок ветует вариант c^3) – эта стратегия приводит 2-го игрока к худшему для него варианту (никто не заветовал c^2). Таким образом, остается предыдущая стратегия, дающая вариант 1.

Как и для случая |K| = 4, если вариант 1 у 2-го и (или) 3-го игрока на втором (а не на третьем) месте, то ситуация для этого варианта может лишь улучшиться. Доказали, что любая игра типа (3.3) – победная или становится таковой при возможности формирования порядка ходов.

2). Пусть нет игрока, у которого вариант 1 на предпоследнем месте, а у всех партнеров 1-го вариант 1 на третьем месте. Получаем игру вида

$$\begin{matrix} 2 & a^2 & 1 & \mathrm{b}^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & 1 & \mathrm{b}^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & 1 & \mathrm{b}^4 & c^4 \end{matrix} \qquad (3.4)$$

с числом |K| вариантов в множестве К = $\{c^2, b^2, c^3, b^3, c^4, b^4\}$ больше двух (по Требованию 3), но не больше четырех (нет варианта 1).

Если |K| = 4, то возможен случай трех одинаковых вариантов, например $c^4 = c^3 = c^2$, и случай двух пар одинаковых вариантов, например $c^4 = c^3$ и $c^2 = b^3$ (или при перестановках букв c и b или их индексов). Если три варианта одинаковы, то все их вычеркивает 1-й игрок, и приходим к ситуации, рассмотренной ранее для случая 1.1.1. Рассмотрим в (3.4) подробнее вторую возможность, проиллюстрировав ее примером, указанным выше, а именно, игрой следующего типа:

$$\begin{matrix} 2 & a^2 & 1 & \mathrm{b}^2 & \mathrm{b} \\ 3 & a^3 & 1 & \mathrm{b} & c \\ 4 & a^4 & 1 & \mathrm{b}^4 & c \end{matrix} \qquad (3.5)$$

Если в множестве К – две пары совпадающих вариантов, то у некоего игрока i оба варианта из J_i будут находиться в этих парах. Он может не вычеркнуть ни один из них (а заветовать вариант 1), рассчитывая, что оба его худших варианта будут заветованы другими игроками. Такой расчет i-го игрока рационален, если у одного из оставшихся игроков вариант, входящий в J_i, – последний по предпочтительности, а у другого непарный вариант вычеркнут 1-м игроком. Поэтому, чтобы данная игра стала победной, 1-му игроку достаточно сделать игрока i последним или третьим (как в (3.5)) по порядку ходов и заветовать непарный вариант, причем у игрока с бóльшим номером (в (3.5) - b^4). В итоге 2-й игрок ветует свой непарный вариант (в (3.5) – b^2), который никто, кроме него, не будет ветовать, 3-й вычеркнет вариант, общий со 2-м игроком (в (3.5) - b), а 4-й игрок накладывает вето на свой вариант из пересечения J_4 и J_3 (в (3.5) - c). При сдвиге в матрице (3.4) вариантов 1 налево также не найдется игрока, который бы его вычеркнул. Таким образом, игра вида (3.4) с |K| = 4 – или победная, или становится победной после изменения порядка голосования.

Случай |K| = 3 в (3.4) возможен при тройке одинаковых вариантов и еще паре либо при трех парах одинаковых вариантов, например $c^4 = c^3 = c^2$ и $b^3 = b^2$, либо $b^3 = b^2$, и $c^3 = c^4$, и $b^4 = c^2$. 1-й игрок ветует единственный вариант, оставшийся вне K∪{1}.

При первом раскладе предпочтений 2-й игрок может заветовать или c^2 (и тогда 3-й заветует b^3 и 4-й игрок заветует вариант b^4), или b^2. В последнем случае 3-й либо может заветовать c^3 (и 4-й игрок заветует вариант b^4), либо может заветовать вариант 1, ожидая, что 4-й заветует $c^4 = c^3 = c^2$ – остается b^4. Последний вариант 3-му более выгоден, чем вариант 1, так как он совпадает с 3 или a^3, поскольку эти варианты отличаются от заветованных вариантов b^3 и c^3, а оба вместе не могли быть вычеркнуты 1-м игроком. Аналогично со 2-м игроком. Поэтому в таком порядке ходов 1-му игроку нет смысла – ему необходимо переставить местами 2-го и 4-го (или 3-го и 4-го) игроков. Получим (после переобозначения игроков и вариантов), что в (3.4) $c^4 = c^3 = c^2$ и $b^3 = b^4$. Тогда уже 2-му игроку надо самому ветовать непарный b^2, что приносит победу варианту 1. Если в тройке одинаковых в K оказываются другие варианты (например, $b^3 = b^2 = b^4$), то рассуждения не меняются: главное, чтобы единственный непарный вариант из K находился в J_2, т.е. у 2-го игрока (по порядку голосования), а это уже может обеспечить 1-й игрок в условиях утверждения 2.

Рассмотрим теперь оставшиеся расклады предпочтений в (3.4) при |K| = 3:

$$\begin{matrix} 2\ \ a^2\ \ 1\ \ \mathrm{b}\ \ \underline{c} & \qquad 2\ \ \mathrm{a}^2\ \ 1\ \ \mathrm{d}\ \ \mathrm{c} & \qquad 2\ \ \mathrm{a}^2\ \ 1\ \ \mathrm{d}\ \ \mathrm{c} \\ 3\ \ a^3\ \ 1\ \ \underline{\mathrm{b}}\ \ c^3 & \qquad 3\ \ \mathrm{a}^3\ \ 1\ \ \mathrm{b}\ \ \mathrm{d} & \qquad 3\ \ \mathrm{a}^3\ \ 1\ \ \mathrm{b}\ \ \mathrm{c} \\ 4\ \ a^4\ \ 1\ \ \underline{c}^3\ \ \mathrm{c} & \qquad 4\ \ \mathrm{a}^4\ \ 1\ \ \mathrm{b}\ \ \mathrm{c} & \qquad 4\ \ \mathrm{a}^4\ \ 1\ \ \mathrm{b}\ \ \mathrm{d} \end{matrix} \tag{3.6}$$

Для левой игры в (3.6): если 2-й ветует b, то 3-й игрок ветует c^3 (и тогда 4-й ветует вариант c), но если 2-й ветует c, то 3-й игрок ветует либо c^3 (и тогда 4-й ветует вариант 1), либо вариант b (и 4-й игрок ветует вариант c^3) – эта стратегия приводит 3-го игрока к варианту 1, а предыдущая – к b, который никто не заветовал и который хуже для 3-го. Так что рациональна та стратегия 3-го игрока, которая дает вариант 1 (рациональные стратегии ветования отмечены подчеркиванием), т.е. левая игра в (3.6) – победная при любых b, c, c^3. При раскладах предпочтений, соответствующих другим случаям порядка ходов, вариант 1 побеждает во всех играх, кроме тех, что приведены в (3.6) справа и посередине. Действительно, в этих двух играх 2-му игроку выгодно ветовать вариант 1, поскольку все варианты из J_2 (следующие за 1 по убыванию его предпочтений) заветуют 3-й и 4-й игроки. Поэтому для получения победной игры типа (3.6) 1-му игроку надо переставить игрока i, у которого все варианты из J_i оказываются с точки зрения других игроков (без учета 1-го) наихудшими, на третье или последнее место в порядке ходов (при голосовании).

$$
\begin{array}{ccccc}
2 & a^2 & 1 & b & \underline{c} \\
3 & a^3 & 1 & \underline{b} & c^3 \\
4 & a^4 & 1 & \underline{c}^3 & c
\end{array}
$$

Итак, рассмотрены все случаи расположения вариантов из К в предпочтениях игроков, когда вариант 1 у них на третьем и далее месте. При сдвиге варианта 1 на вторoе место в каких-то строках (3.4) ситуация этого варианта только улучшается, поскольку у соответствующего игрока имеются три варианта хуже варианта 1, и если заведомо не все они оказались вычеркнутыми, то указанный игрок уже не заветует вариант 1. В частности, если у всех партнеров 1-го игрока вариант 1 на втором месте, то: |K| = 4, один вариант из К заветует 1-й игрок (вариант игрока, голосующего 2-м), а остальные три варианта будут ветовать все оставшиеся – победная игра. Утверждение 2 доказано.

4. Роль 4-го игрока. Кроме возможности у 1-го игрока формировать порядок ходов партнёров, шансы на победу его решения увеличивает возможность ввести еще одного игрока (4-го в игру $\mathbf{\Gamma}_3$ для получения $\mathbf{\Gamma}_4$) с новым предложением (вариантом решения) при условии, что для 2-го и 3-го игроков вариант 4 будет хуже, чем вариант 1. В этом случае покажем, что предложение 1-го игрока побеждает в **62.5%** соотношений предпочтений остальных игроков.

Утверждение 3. Если для 2-го и 3-го голосующих вариант 4 хуже варианта 1, то 1-й игрок может без изменения порядка их ходов обеспечить избрание своего варианта в 62.5% случаев.

Доказательство. Для подсчета случаев, в которых побеждает вариант 1, воспользуемся классификацией всех возможных раскладов предпочтений 2 – 4-го игроков, введенной при доказательстве утверждения 2.

Игры **1.1.1**

$$
\begin{array}{ccccc}
2 & a^2 & b^2 & 1 & c^2 \\
3 & a^3 & b^3 & 1 & c^3 \\
4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4
\end{array}
$$

Из формулировки утверждения 3 следует, что в данном случае $c^2 = c^3 = 4$, что противоречит Требованию 2. Следовательно, для рассматриваемой группы игр имеем 0 побед.

Игры **1.1.2**

$$\begin{matrix} 2 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & a^2 & 1 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{matrix} \qquad (4.1)$$

В левой группе игр в (4.1) для каждого из шести возможных случаев предпочтений вида (2 1 a^2 b^2 c^2) имеем 12 побед (для двух раскладов вариантов у 3-го и шести – у 4-го). Получаем 72 игры, в которых 1-й игрок может обеспечить избрание своего предложения.

Для правой группы игр в (4.1) возможны четыре различных случая размещения варианта 4 после варианта 1 и вариантов 3 и 5 между собой в строке (2 a^2 1 b^2 c^2), каждый из которых может привести к восьми различным ситуациям избрания предложения 1. Число возможных выигрышных комбинаций уменьшилось, поскольку вступает в силу Требование 3, влекущее за собой (см. пункт 1.1.2 в доказательстве утверждения 2) условие $c^4 = a^2$ или $c^4 = 2$. Итого 32 победы.

В условиях отсутствия управления порядком ходов игры 1.1.2 не включают случаи 1.1.2*, полученные из них перестановкой игроков.

Игры **1.1.2***

$$A=\begin{matrix} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{matrix} \quad B=\begin{matrix} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{matrix} \quad C=\begin{matrix} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & a^3 & 1 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{matrix} \quad D=\begin{matrix} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & a^4 & 1 & b^4 & c^4 \end{matrix}$$

Здесь получаем уменьшение шансов на победу предложения 1-го игрока по сравнению с игрой 1.1.2, что свидетельствует о прямо-пропорциональной зависимости возможности его победы от предпочтительности для игрока варианта 1 и порядкового номера этого игрока. В играх с матрицами предпочтений A и B можно рассчитывать на победу варианта 1 в 40 и 0 играх, соответственно. Для матриц C и D – 16 и 0.

Игры **1.2**

$$\begin{matrix} 2 & a^2 & 1 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & 1 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{matrix}$$

В данной группе игр возможно четыре случая размещения предпочтений у 2-го игрока. Для двух из них (2 3 1 b^2 c^2) имеем по 18 побед, а для других двух ($2\ \ 5\ \ 1\ \ b^2\ \ c^2$) – по 20. Иными словами, увеличение числа различных предложений, которые хуже предложения 1 для остальных игроков, увеличивает шансы на победу 1-го игрока. Итого 76 победных комбинаций.

Следующие две группы игр наглядно демонстрируют, что для 1-го игрока бо́льшую роль играют предпочтения игрока, голосующего вторым:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & 1 & b^2 & c^2 \\ 3 & 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & 1 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{array}$$

В обеих группах одинаковое число возможных комбинаций предпочтений голосующих – 144. При этом в левой группе игр 1-й игрок побеждает в 124 случаях, тогда как в правой – в 144.

В последней группе игр из данного класса (вариант 1 – предпоследний лишь у 4-го игрока)

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 3 & 1 & a^2 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & b^4 & 1 & c^4 \end{array}$$

предложение первого голосующего также побеждает в 100% случаев (216 игр).

Итого: в группе игр 1.2 1-й игрок может одержать победу в 560 из 580 возможных игр.

Рассмотрим оставшуюся группу игр, соответствующих подслучаю 1.2 в доказательстве утверждения 2, из которых игры типа 1.2 получаются в результате перестановки порядка ходов игроков (тогда как в утверждении 3 возможность подобной перестановки не предполагается).

Игры **1.2***

$$A= \begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & 1 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & a^4 & 1 & b^4 & c^4 \end{array} \quad B= \begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & a^3 & 1 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & 1 & b^4 & c^4 \end{array} \quad C= \begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & 1 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{array} \quad D= \begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 4 & a^4 & 1 & b^4 & c^4 \end{array}$$

$$E= \begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & a^3 & 1 & b^3 & c^3 \\ 4 & 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{array} \quad F= \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & a^4 & 1 & b^4 & c^4 \end{array} \quad G= \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 3 & a^3 & b^3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{array} \quad H= \begin{array}{ccccc} 2 & a^2 & b^2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & a^3 & b^3 & c^3 \\ 4 & 1 & a^4 & b^4 & c^4 \end{array}$$

Важно отметить, что в предпочтениях игрока, голосующего последним, значение имеет только то, какие варианты в его J_4 (так как трое предыдущих голосующих не оставят ему выбора). Поэтому результаты будут выглядеть следующим образом:

- для A, C получим 32 победы из 48 игр,
- для B, E получим 16 побед из 48 игр,
- для D, H получим 40 побед из 72 игр,
- для F, G - 72 победы из 72 игр – единственные варианты предпочтений, при которых предложение 1 на втором по выгодности месте у 2-го игрока.

Итого 320 побед из 480 вариантов предпочтений игроков.

<u>Игры **2**</u>

$$2\ \ a^2\ 1\ \ b^2\ \ c^2$$

$$3\ \ a^3\ \ 1\ \ b^3\ \ c^3$$

$$4\ \ a^4\ \ 1\ \ b^4\ \ c^4$$

Для каждого из двух возможных случаев расположения варианта 1 у игрока 4 для данной группы игр получим те же самые результаты, что и в группе игр **1.2,** т.е. 1120 побед.

Рассмотрев все возможные случаи расположения варианта 1 в предпочтениях игроков, будем иметь 2160 побед из 3456 игр, что составляет 62.5%. Утверждение 3 доказано.

В противоположной ситуации – когда предложение вновь введённого игрока лучше варианта 1 для 2-го и 3-го игроков одновременно (например, если дополнительного игрока вводят 2-й и 3-й игроки в обход 1-го), 1-й игрок способен обеспечить выигрыш своего варианта лишь в **7%** игр.

В модели, когда первому голосующему удаётся ввести дополнительного игрока, чьё предложение менее предпочтительно, чем вариант 1, только для одного из партнеров, ему выгоднее, чтобы это условие выполнялось для 2-го игрока. В такой ситуации он одерживает победу в **26.3%** случаев. Если вариант 1 выгоднее варианта 4 только для 3-го игрока, то 1-й игрок может рассчитывать на **25.5%**. Когда 1-й игрок знает, что его предложение более выгодно, чем вариант 4, для 2-го и 3-го вместе или хотя бы для одного из них: 2(3), он может рассчитывать на **44.4%(44%)**.

Если же первый голосующий должен рассчитывать на возможность любого расклада предпочтений нового голосующего, то его шансы на победу составляют **30%**, что хуже, чем в игре с двумя партнерами.

Полученные результаты показывают, что с точки зрения 1-го игрока возможность ввода дополнительного голосующего более выгодна, чем управление порядком ходов, только когда заранее известно, что вариант нового игрока менее предпочтителен, чем предложение 1-го, для 2-го и 3-го игроков одновременно. В случаях, когда 1-й игрок знает, что для кого-то из партнеров новый вариант может оказаться лучше варианта 1, приход еще одного участника (с таким вариантом) ему не выгоден.

5. Заключение. В сравнении с моделью с 3-мя голосующими проведено исследование игры 4-х лиц с точки зрения факторов, обеспечивающих 1-му игроку принятие наилучшего для него решения при голосовании путём открытого ветования. Даны условия, являющиеся необходимыми и достаточными в игре с полной информацией при наличии у 1-го игрока возможности формировать порядок ходов игроков – порядок ветования. Также оценены шансы на победу 1-го игрока, если он вводит в игру последнего голосующего, тем самым стараясь увеличить вероятность выбора своего предложения.

Анализ, проведённый в данной работе, даёт возможность первому голосующему ещё до начала процесса ветования обдумать и выявить для себя наиболее выигрышную тактику ведения процедуры голосования, а также оценить шансы на победу своего решения.

Список литературы

1. *Mueller D.C.* Voting by Veto. Journal of Public Economics 10, 57-75, 1978.
2. *Moulin H.* The Strategy of Social Choice. Amsterdam: North-Holland, 1983.
3. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
4. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005 г.
5. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М: Мир, 1985.
6. *Машечкин А.И., Поспелова И.И.* Свойства голосования с правом вето. Прикладная математика и информатика 31, 83-94, 2009.
7. *Fany Y.*, Sophisticated Voting Under the Sequential Voting by Veto. Theory and Decision 53: 343–369, 2002.