

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Учебное пособие факультета вычислительной  
математики и кибернетики Московского  
государственного университета

*МОСКОВСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
1995*

*Из содержания 1995г.,*

*Дмитриев В. И., Круглов И.Е.* Метод синтезированных полей в обратных задачах магнитотеллурического зондирования. **115**

**Метод синтезированных полей в обратных задачах магнитотеллурического зондирования.**

Трехмерная обратная задача магнитотеллурического зондирования возникает при зондировании неоднородной Земли естественным электромагнитным полем. Моделью неоднородной Земли здесь является слоистое распределение электропроводности  $\sigma_n(z)$ , содержащее локальную трехмерную неоднородность  $\sigma_T(x, y, z)$ . Электромагнитное поле в Земле возбуждается плоской волной, нормально падающей на земную поверхность. Таким образом, прямая задача определения электромагнитного поля имеет вид:

определить электрическое  $\vec{E}(M)$  и магнитное  $\vec{H}(M)$  поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла:

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E}, \quad \text{rot} \vec{E} = i \omega \mu_0 \vec{H}, \quad (1)$$

где  $\omega$  - частота поля,  $\mu_0$  - магнитная проницаемость, а  $\sigma$  - электропроводность, равная

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma_c(z) & M \notin V \\ \sigma_T(z) & M \in V \end{cases} \quad (2)$$

На границах разрыва  $\sigma(M)$  непрерывны тангенциальные составляющие поля, а в бесконечности поля  $(\vec{E} - \vec{E}^0)$  и  $(\vec{H} - \vec{H}^0)$  удовлетворяют условию излучения, где  $\vec{E}^0$  и  $\vec{H}^0$  - нормальные поля в отсутствие неоднородности.

Обратная магнитотеллурическая задача состоит в определении распределения электропроводности  $\sigma(M)$  по известному на земной поверхности ( $z = 0$ ) импедансу  $\hat{Z}(x, y, \omega)$ :

$$\hat{Z} = \begin{Bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} E_x(x, y, z=0) = Z_{xx} H_x + Z_{xy} H_y \\ E_y(x, y, z=0) = Z_{yx} H_x + Z_{yy} H_y \end{cases} \quad (3)$$

Для определения тензора импеданса необходимо решить задачу (1) для двух поляризаций первичного поля:

$$\vec{E}^0 = \{E_x^0, 0, 0\}, \quad \vec{H}^0 = \{0, H_y^0, 0\} \quad (4)$$

$$2. \quad \vec{E}^0 = \{0, E_y^0, 0\}, \quad \vec{H}^0 = \{0, H_y^0, 0\}$$

Так как импеданс не зависит от поляризации первичной плоской волны нормально падающей на земную поверхность, то соотношение (3) дает для других поляризаций четыре уравнения, откуда определяются компоненты тензора импеданса.

Заметим, что с точки зрения получения экспериментальной информации использование импеданса очень удобно, т.к. позволяет производить независимые во времени и пространстве наблюдения. Однако с

точки зрения решения обратной задачи использование тензора импеданса крайне неудобно.

Во-первых, для определения одной функции  $\sigma(M)$  мы имеем четыре компоненты вектора импеданса, т.е. обратная задача переопределена. Поэтому вместо тензора импеданса в обратной задаче используют какой-либо инвариант, обычно эффективный импеданс

$$Z_{\text{эф}}(x, y, \omega) = \sqrt{Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}Z_{yx}} \quad (5)$$

Однако при этом всегда остается опасность, что введенная скалярная характеристика обладает меньшей разрешающей способностью, чем тензор импеданса.

Во-вторых, при решении обратной задачи мы должны на каждом шаге решать прямую задачу, а, следовательно, вычислять тензор импеданса. Последнее означает, что необходимо решать задачу для двух поляризаций поля, причем, вычислять каждый раз четыре компоненты электромагнитного поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$ . Все это существенно увеличивает время решения обратной задачи.

С другой стороны, из общих рассуждений кажется, что достаточно знать одну компоненту поля для одной поляризации первичного поля, чтобы определить распределение электропроводности  $\sigma(M)$  в земле ( $z > 0$ ). Легко показать, что обратная задача по тензору импеданса  $\hat{Z}$  (задача I) эквивалентна обратной задаче по тангенциальным компонентам электрического поля  $\vec{E}_r = \{E_x, E_y\}$ , полученным для одной поляризации первичного поля (задача II). Ясно, что любое решение задачи I является решением задачи II, так как последняя является частным случаем задачи I.

Покажем теперь, что любое решение задачи II является решением задачи I. Пусть решением задачи II есть  $\sigma_2(i)$ . Тогда для данного распределения электропроводности  $\sigma_2(i)$  мы однозначно вычислим тензор импеданса  $\hat{Z}_2$ . Зная  $\hat{Z}_2$ , мы определим магнитное поле, соответствующее данному  $\vec{E}_r$

$$\vec{H}_r = \hat{Z}_2^{-1} \vec{E}_r.$$

Зная импеданс в задаче I  $\hat{Z}_1$ , получим

$$\hat{Z}_1 \hat{Z}_2^{-1} = \hat{I} \quad \text{или} \quad \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 \quad (6)$$

Следовательно,  $\sigma_2(i)$  порождает нужный импеданс  $\hat{Z}_1$  задачи I. Таким образом, если задача I имеет единственное решение, то и задача II имеет единственное решение. Таким образом, мы имеем право вместо задачи I решать задачу II. Аналогично можно доказать эквивалентность задачи I задаче определения  $\sigma_2(i)$  по известному на земной поверхности магнитному полю  $\vec{H}_r$ .

Нами показана возможность определения  $\sigma(M)$  по

$$\vec{E}_z = \{E_x(x, y, \omega), E_y(x, y, \omega)\},$$

известному на земной поверхности. Вполне возможно, что достаточно знать только  $E_x$  или  $E_y$ . Однако соответствующей теоремы единственности не доказано. Естественно, возникает вопрос, как определить  $\vec{E}_z$  при  $z = 0$ , если нам из эксперимента известно лишь  $\vec{Z}(x, y, \omega)$ . Для этого пользуются синтезированным полем, которое является решением задачи (1) при  $z \leq 0$ , где  $\sigma = \sigma_0 = \text{const} \approx 0$ , если при  $z = 0$  задано граничное условие в виде (3), а в бесконечности выполняется условие излучения для  $(\vec{E} - \vec{E}^0)$  и  $(\vec{H} - \vec{H}^0)$ , где  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  - первичное поле в виде плоской волны фиксированной поляризации. Определив синтезированное поле, мы можем решать обратную задачу II.

Естественно, возникает вопрос об оптимальном выборе поляризации первичного поля для решения обратной задачи II.

Ответ на данный вопрос был получен при проведении ряда вычислительных экспериментов для моделей слоистых сред, содержащих во втором или третьем слое локальную неоднородность, вытянутую вдоль одного из горизонтальных направлений, а также при исследовании моделей неоднородностей сложной плоскостной структуры. В качестве модели слоистой среды была взята модель, отвечающая реальным задачам магнитотеллурического зондирования. Модель состоит из пяти слоев. Первый, третий и последний слой являются проводящими, второй и четвертый - плохие проводники.

В результате проведенных исследований для модели простейшей неоднородности получены следующие результаты.

1. Лучшая чувствительность электромагнитного поля к вытянутой аномалии слоя проявляется при такой поляризации электромагнитного поля, при которой электрическая компонента первичного электрического поля направлена вдоль вытянутости неоднородности.

2. При выбранном оптимальном образом направлении поляризации компоненты  $E_y$  и  $H_x$  почти не регистрирует аномалии второго и третьего слоя. Чувствительность же компонент  $H_y$  и  $E_x$  почти одинакова.

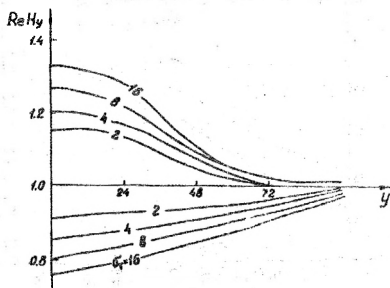


Рис. 1

В качестве примера, на рисунке 1 приведены нормированные значения компонент  $E_x$  и  $H_y$  электромагнитного поля при  $z = 0$ , полученные для различных значений электропроводности  $\sigma_T$  элементарной неоднородности, вытянутой вдоль оси  $OX$ , расположенной в слоистой среде с параметрами

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.001, \sigma_3 = 0.1, \sigma_4 = 0.001, \sigma_5 = 1000.$$

Значения даны при  $x = 0$  для различных  $y$ .

Отметим, что данные выводы справедливы лишь для моделей сред, имеющих плохопроводящий слой. В случае, когда тело находится в проводящем слое и над ним отсутствуют плохопроводящие слои, возможна регистрация неоднородности и при поперечной поляризации, а при продольной поляризации к "традиционным" регистрирующим компонентам  $E_x$  и  $H_y$  добавляется еще одна:  $E_y$ . Регистрирующее свойство этой компоненты специфично: если компоненты  $E_x$  и  $H_y$  фиксируют саму неоднородность (их максимальные аномалии наблюдаются над неоднородностью), то компонента  $E_y$  регистрирует границу неоднородности (пик аномалии этой компоненты находится за пределами границы неоднородности, рассматриваемыми в плоскости  $z = const$ ).

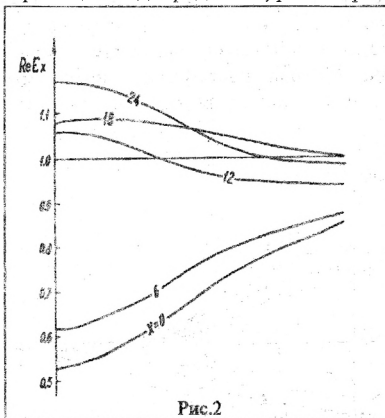


Рис.2

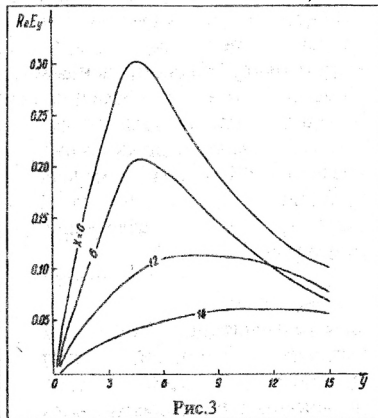


Рис.3

На рисунках 2,3 приводятся изображения компонент для модели неоднородности второго проводящего слоя ( $\sigma_2 = 0.1$ ). Кривые каждой компоненты изображаются в виде срезов для различных значений переменной  $x$  на одном графике. Параметры модели следующие:  $h_1 = 1, h_2 = 4, h_3 = 1, h_4 = 50$ ,

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.1, \sigma_3 = 0.04, \sigma_4 = 0.001, \sigma_5 = 1000, \sigma_T = 10.$$

Размеры неоднородности:  $24 \times 6 \times 2$ . Для продольной поляризации поля компонента  $E_x$  (рис.2) имеет чувствительность несколько хуже

чувствительности компоненты  $E_y$  поперечной поляризации (рис.3). Аномалии  $E_y$  существенны, а их максимумы находятся за пределами неоднородности. Их положение обусловлено размером неоднородности и глубиной ее залегания.

Исследование аномалий электромагнитного поля, получаемых от тел сложной плоскостной структуры, залегающих во втором и третьем слоях слоистой среды, у которой второй слой является плохим проводником, позволило выявить интегрирующее свойство только у компоненты  $E_x$ . Поясним сказанное на примере. Рассмотрим две прямоугольные неоднородности третьего слоя размерами  $64 \times 8 \times 1$  и  $64 \times 64 \times 1$  (вторая неоднородность составлена из восьми элементарных неоднородностей размера  $64 \times 8 \times 1$ ). Среда - пятислойка с параметрами:  $h_1 = 1, h_2 = 5, h_3 = 2, h_4 = 50,$   
 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.001, \sigma_3 = 0.5, \sigma_4 = 0.001, \sigma_5 = 1000.$

Рассмотрим значения компонент поля для этих неоднородностей при различных значениях электропроводности тела ( $\sigma_T = 2, 4, 8, 16$ ). На рис.4

приводятся электрическая и магнитная компоненты поля при  $x = 0$  для различных  $\sigma_T$  второй неоднородности ( $64 \times 64 \times 1$ ). Поля для первой неоднородности изображены на рис.1 и 2. Из сравнения изображений полей можно сделать вывод о том, что структура электрической компоненты  $E_x$  особых различий не имеет: значения аномалии электрической компоненты второй

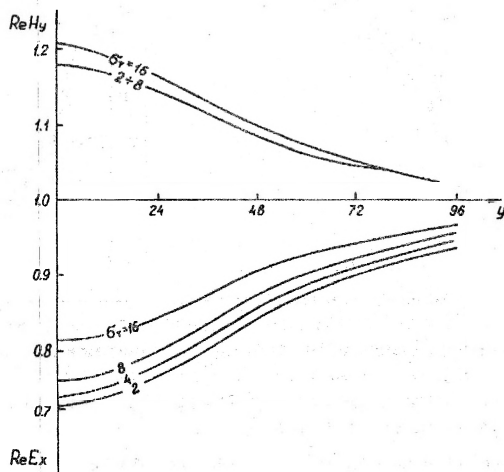


Рис. 4

неоднородности (рис.4) несколько больше, а сама аномалия несколько шире, чем для первой неоднородности (рис.1). Сравнение же магнитных компонент демонстрирует качественные изменения в структуре магнитного поля. В связи с чем выбор магнитной компоненты в качестве функции отклика при решении задач восстановления может вызвать некоторые проблемы. Использование же электрической компоненты позволяет выявлять

продольные структуры в неоднородностях сложной формы, а ее интегрирующее свойство дает возможность "собрать" из этих структур неоднородность сложной формы.

Избирательная чувствительность электрического поля к направлению вытянутости неоднородного тела обуславливает различное по качеству восстановление частей неоднородного тела сложной плоскостной структуры, образованного объединением вытянутых в различных направлениях элементарных неоднородностей. Поясним сказанное на примере. В качестве примера рассмотрим неоднородность крестообразной формы ("крест"), расположенную в третьем слое. Неоднородность, составленная из двух элементарных неоднородностей размера  $64 \times 16 \times 1$ , расположенных перпендикулярно друг другу, лежит на плоскости  $z = const$  и симметрична относительно оси  $OZ$ . Параметры модели следующие:

$$h_1 = 1, h_2 = 5, h_3 = 2, h_4 = 50;$$

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0.001, \sigma_3 = 0.5, \sigma_4 = 0.001, \sigma_5 = 1000, \sigma_T = 10.$$

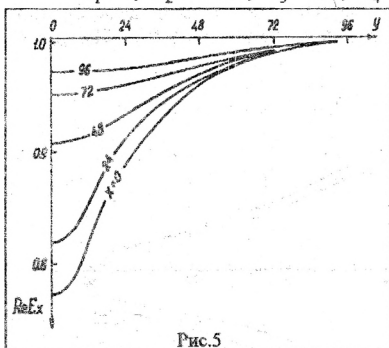


Рис.5

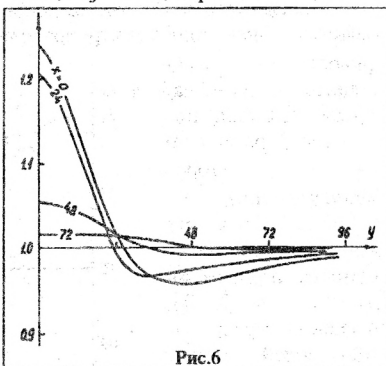


Рис.6

Компоненты поля изображены

на рис.5 и 6. Кривые каждой компоненты изображаются в виде срезов для различных значений пространственной переменной  $x$ . Из-за избирательной чувствительности магнитного поля к вытянутым структурам, "крылышки" креста почти не регистрируются при  $x$  - поляризации. Для сравнения на рисунках приведены компоненты  $E_x$ ,  $H_y$  для креста и прямоугольника.

Анализ показывает почти полное совпадение компоненты  $E_x$  двух видов неоднородностей. Магнитные компоненты немного различны.

Данный факт избирательной чувствительности компонент говорит о необходимости использования двух поляризаций поля при неоднородностях сложной формы. Вообще, неоднородность сложной плоскостной структуры можно представить в виде объединения простейших неоднородностей, имеющих различные направления вытянутости. Тогда процесс



**восстановления неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.**

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.

Восстановление неоднородности может происходить путем итерационного  
всчитывания в модель простейших неоднородностей для двух поляризаций.