

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКИ

СБОРНИК ТРУДОВ ФАКУЛЬТЕТА
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией
акад. *А. Н. Тихонова*,
акад. *А. А. Самарского*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1990

Из содержания 1990г.,

- В.И. Дмитриев, Е. Е. Позднякова.* Метод и алгоритм расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью в произвольном слое. **133**
- И. С. Барашков, В. И. Дмитриев.* Обратная задача глубинного зондирования квазислоистых сред. **142**
- Л. Л. Приходько.* Численное исследование аномального квазитрехмерного электромагнитного поля над проводящим цилиндром в слоистой среде. **153**
- В. И. Дмитриев, А. В. Седельникова.* Об одном итерационном методе при расчетах аномального электромагнитного поля в проводящей среде. **162**
- Е. Г. Салтыков.* Высокочастотная асимптотика поля диполя в трехслойной диэлектрической среде. **171**
- Н. И. Березина.* О высокочастотной асимптотике электромагнитного поля на поверхности слоистой среды. **174**
- В. И. Дмитриев, Н. И. Несмеянова.* Метод интегральных уравнений в трехмерных задачах низкочастотной электродинамики. **180**
- С. Н. Давыдычева.* Интегральное уравнение в квазитрехмерной задаче расчета электромагнитного поля в проводящих неоднородных средах **186**
- Е. В. Захаров, Е. В. Никитина.* Моделирование анизотропно проводящих поверхностей ленточными структурами. **193**
- И. В. Дмитриева.* Дифракция плоской волны на отражательной решетке в случае наклонного падения. **215**

Раздел III

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ГЕОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В. И. Дмитриев, Е. Е. Позднякова

МЕТОД И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ПРОИЗВОЛЬНОМ СЛОЕ

В последние годы наблюдается все возрастающий интерес к численному моделированию трехмерных задач электродинамики. Особенно активно развивался метод интегральных уравнений для решения задач дифракции квазистационарных электромагнитных полей на локальном теле, находящемся в полупространстве или в слоистой среде [1—4]. В настоящей статье приведен алгоритм решения такой задачи для случая, когда тело погружено в произвольный слой многослойной слоистой среды с кусочно-постоянным распределением параметров. Общий подход к решению подобных задач был описан в работе [5]. Однако при практической реализации метода возникают значительные трудности, связанные с тем, что здесь приходится иметь дело с матрицами очень большого порядка и, следовательно, необходимо решать сложные вопросы экономного расходования машинной памяти и времени. В настоящей статье указаны некоторые возможности повышения эффективности алгоритмов расчета.

Пусть трехмерное тело с проводимостью $\sigma_T(x, y, z)$ находится в произвольном слое слоистой среды, проводимостью которой обозначим $\sigma_c(z)$. Зависимость от времени будем брать в виде $e^{-i\omega t}$. Выражения для вычисления электрического поля \bar{E} в любой точке слоистой среды в этом случае имеет вид

$$\bar{E}(M) = \bar{E}^N(M) + \int_{V_T} [\sigma_T(M_0) - \sigma_c(z_0)] \hat{G}_E(M, M_0) \bar{E}(M_0) dv_{M_0}, \quad (1)$$

где $\bar{E}^N(M)$ — возбуждающее (первичное) электрическое поле в точке M ; $\bar{E}(M)$ — полное электрическое поле в этой же точке; V_T — объем локальной неоднородности. Тензор Грина $\hat{G}_E(M, M_0)$ определяется своими девятью компонентами $G_E^{(ij)}(M, M_0)$, $i, j = 1, 2, 3$. Компоненты $G_E^{(ij)}(M, M_0)$ представляют собой электрическое поле в точке M , направленное вдоль орта системы координат, соответствующего i , возбуждаемое электрическим диполем единичного момента, находящимся в точке M_0 и направленным вдоль орта соответствующего j . Например, компоненты $G_E^{(11)}$, $G_E^{(21)}$, $G_E^{(31)}$ представляют собой

электрическое поле в точке M , возбуждаемое электрическим диполем с моментом, равным единице, расположенным в точке M_0 и направленным вдоль оси OX .

Для электрического поля $\vec{E}(M)$ в области неоднородности выражение (1) становится векторным интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно неизвестных компонент $E_x(M)$, $E_y(M)$, $E_z(M)$. Интегральное уравнение решается численно. На сетке $\{M^{(n)}\}$ в области V_T , где точка $M^{(n)}$ является центром подобласти $V^{(n)} \left(\sum_{n=1}^N V^{(n)} = V_T \right)$, проводится алгебраическая аппроксимация интегрального оператора. В результате получаем СЛАУ для сеточной функции $\bar{E}_n = \{\bar{E}^{(n)} = \bar{E}(M^{(n)})\}$:

$$\bar{E}^{(m)} + \sum_{n=1}^N g_{mn} \bar{E}^{(n)} = \bar{E}^N(M^{(m)}), \quad m \in [1, N], \quad (2)$$

где

$$g_{mn} = [\sigma_c(z^{(n)}) - \sigma_T(M^{(n)})] \iiint_{V^{(n)}} \hat{G}_E(M^{(m)}, M_0) dv_{M_0}. \quad (3)$$

В силу трехмерности и векторности задачи СЛАУ имеет обычно очень большой порядок, поэтому неудивительно, что в большинстве публикаций описываются расчеты либо для тел малых размеров, либо для особых типов возбуждения. Увеличение размеров тел дифракции находится в прямой зависимости от того, насколько удачно выбран алгоритм расчета матрицы с учетом симметрий, и от эффективности выбранного численного метода решения системы.

Опишем сначала опробованный нами эффективный алгоритм вычисления матрицы системы. Электрический тензор Грина $\hat{G}_E = \{G_E^{(ik)}(M, M_0)\}$, входящий в выражение (1), может быть представлен в виде

$$G_E^{(1k)} = \frac{1}{4\pi\sigma(M)} \left\{ \delta_{1k} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + i\omega\mu_0\sigma(M)Q \right) + \delta_{2k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \delta_{3k} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} \right\},$$

$$G_E^{(2k)} = \frac{1}{4\pi\sigma(M)} \left\{ \delta_{1k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \delta_{2k} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + i\omega\mu_0\sigma(M)Q \right) + \delta_{3k} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} \right\}, \quad (4)$$

$$G_E^{(3k)} = \frac{1}{4\pi\sigma(M)} \left\{ \delta_{1k} \frac{\partial F}{\partial x} + \delta_{2k} \frac{\partial F}{\partial y} + \delta_{3k} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + i\omega\mu_0\sigma(M)p \right) \right\},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k, \end{cases}$$

$$\Phi = Q + \frac{\partial q}{\partial z},$$

$$F = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + i\omega\mu_0\sigma q.$$

Функции $Q(M, M_0)$, $q(M, M_0)$ и $p(M, M_0)$ выражаются с помощью преобразования Ганкеля (6):

$$Q(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda r_{MM_0}) V(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda,$$

$$q(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda r_{MM_0}) \left(v(\lambda, z, z_0) - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (5)$$

$$p(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda r_{MM_0}) u(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda,$$

где

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Подынтегральные функции в (5) являются решением дифференциальных уравнений для кусочно-постоянного распределения электропроводности

$$\frac{d^2 V}{dz^2} - \eta^2 V = 0, \quad [V] = 0, \quad \left[\frac{dV}{dz} \right] = -2\Delta(z-z_0),$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} - \eta^2 v = 0, \quad [v] = -2\Delta(z-z_0), \quad \left[\frac{1}{\sigma} \frac{dv}{dz} \right] = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \eta^2 u = 0, \quad [u] = 0, \quad \left[\frac{\sigma(M_0)}{\sigma(M)} \frac{du}{dz} \right] = -2\Delta(z-z_0),$$

где

$$\Delta(z - z_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } z = z_0, \\ 0 & \text{при } z \neq z_0, \end{cases}$$

$$\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad k^2 = i\omega \mu_0 \sigma.$$

Функции V , v , u стремятся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

Пусть тело находится в m -м слое M -слойной слоистой среды, верхняя и нижняя границы которого имеют координаты $z_{m-1} = -h_B$ и $z_m = -h_H$ соответственно. Рассмотрим расчет функций $V(\lambda, z, z_0)$, $v(\lambda, z, z_0)$ и $u(\lambda, z, z_0)$ при $-h_H < z < -h_B$, $-h_H < z_0 < -h_B$. При $z \neq 0$ введем функции $Z(z) = \frac{1}{V} \frac{dV}{dz}$ и

$$Y(z) = \frac{1}{\sigma v} \frac{dv}{dz} = \frac{1}{\sigma u} \frac{du}{dz}. \quad \text{Тогда согласно (6) на поверхности сло-$$

истой среды $Z(z=0) = -\eta_0$, $Y(z=0) = -(\eta_0/\sigma_0)$, на верхней границе нижнего полупространства $Z(z=z_{m-1}) = \eta_M$, $Y(z = z_{m-1}) = \eta_M/\sigma_M$. В случае кусочно-постоянных параметров значения функций $Z(z)$, $Y(z)$ на верхней и нижней границе m -го слоя с неоднородностью легко вычисляются по рекуррентным формулам. Обозначим их Z_B, Y_B, Z_H, Y_H соответственно.

Тогда при $-h_H < z < -h_B$, $-h_H < z_0 < -h_B$,

$$\begin{aligned} V(\lambda, z, z_0) = & \frac{1}{\eta_m} e^{-\eta_m |z-z_0|} + \\ & + \frac{1}{\eta_m A} \left[(\eta_m + Z_H)(\eta_m + Z_B) e^{\eta_m(2h_B+z+z_0)} + \right. \\ & + (\eta_m - Z_H)(\eta_m - Z_B) e^{-\eta_m(2h_H+z+z_0)} + \\ & \left. + 2(\eta_m - Z_H)(\eta_m + Z_B) e^{-2\eta_m(h_H-h_B)} \operatorname{ch} \eta_m(z-z_0) \right], \quad (7) \\ v(\lambda, z, z_0) = & -e^{-\eta_m |z-z_0|} \operatorname{sign}(z-z_0) - \\ & - \frac{1}{B} \left[(\eta_m + \sigma_m Y_H)(\eta_m + \sigma_m Y_B) e^{\eta_m(2h_B+z+z_0)} - \right. \\ & - (\eta_m - \sigma_m Y_H)(\eta_m - \sigma_m Y_B) e^{-\eta_m(2h_H+z+z_0)} - \\ & \left. - 2(\eta_m - \sigma_m Y_H)(\eta_m + \sigma_m Y_B) e^{-2\eta_m(h_H-h_B)} \operatorname{sh} \eta_m(z-z_0) \right], \end{aligned}$$

$$u(\lambda, z, z_0) = \frac{1}{\eta_m} e^{-\eta_m |z-z_0|} +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{\eta_m B} \left[(\eta_m + \sigma_m Y_H)(\eta_m + \sigma_m Y_B) e^{\eta_m(2h_B+z+z_0)} + \right. \\ & + (\eta_m - \sigma_m Y_H)(\eta_m - \sigma_m Y_B) e^{-\eta_m(2h_H+z+z_0)} + \\ & \left. + 2(\eta_m - \sigma_m Y_H)(\eta_m + \sigma_m Y_B) e^{-2\eta_m(h_H-h_B)} \operatorname{ch} \eta_m(z-z_0) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A = & (\eta_m - Z_B)(\eta_m + Z_H) - (\eta_m + Z_B)(\eta_m - Z_H) e^{-2\eta_m(h_H-h_B)}, \\ B = & (\eta_m - \sigma_m Y_B)(\eta_m + \sigma_m Y_H) - \\ & - (\eta_m + \sigma_m Y_B)(\eta_m - \sigma_m Y_H) e^{-2\eta_m(h_H-h_B)}. \end{aligned}$$

Заметим, что формулы (7) выписаны для слоистой среды с произвольным числом слоев, при переходе к модели с другим числом слоев пересчитываются только Z_B, Y_B, Z_H, Y_H . Отсюда следует, что увеличение числа слоев модели не влияет существенно на скорость расчета тензора Грина.

Рассмотрим, какие особенности матрицы системы нужно учесть для построения наиболее эффективного алгоритма. В случае постоянной $\sigma_T(x, y, z) = \sigma_T$ матрица системы обладает большим числом симметрий, поэтому обычно матрица рассчитывается для постоянной σ_T , матрица для произвольного распределения $\sigma_T(x, y, z)$ получается затем простым умножением.

Введем понятие многоуровневой матрицы. Пусть матрица составлена из квадратных клеток. Множество этих клеток назовем первым уровнем. Каждая клетка первого уровня может также являться клеточной матрицей, составленной из клеток уже второго уровня и так далее. Будем говорить, что матрица имеет p уровней, если клетку p -го уровня мы уже не рассматриваем как клеточную матрицу. На каждом уровне матрица может обладать определенной спецификой. Считаем, что матрица A имеет тип α_1, α_2 , если A — двухуровневая матрица, первый и второй уровни которой имеют тип α_1 и α_2 соответственно. Введем обозначения T, H, G соответственно для теплицевой, ганкелевой и общего вида матриц (в теплицевой матрице на диагоналях, параллельных главной, располагаются равные элементы; в ганкелевых матрицах равные элементы располагаются параллельно побочной диагонали).

Можно заметить, что в случае постоянной σ_T матрица системы представима в виде суммы двух четырехуровневых матриц.

Первая матрица, для построения которой выделяются только первые и четвертые слагаемые в формулах (7), имеет тип $G_s T_s T_s T_s$, а вторая, соответствующая вторым и третьим слагаемым, имеет

тип $G_s T_s T_s H$ (индекс s означает, что элементы матрицы симметричны или антисимметричны относительно главной диагонали). Учитывая такую многоуровневую структуру, можно создать очень эффективный алгоритм расчета матрицы.

Как было показано, скорость расчета матрицы не сильно зависит от числа слоев модели. Однако если тело находится в нижнем полупространстве ($m=M$), то матрицу можно рассчитать значительно быстрее. В этом случае в формулах (7) остаются только первые и вторые слагаемые, причем сами вторые слагаемые упрощаются. Но первые слагаемые в этих формулах соответствуют однородной среде, а тензор Грина в однородной среде можно вычислить, не пользуясь преобразованием Ганкеля. Отсюда следует, что в этом случае ($m=M$) первая матрица, имеющая тип $G_s T_s T_s H$, соответствует однородной среде и рассчитывается очень быстро. Вычисление второй матрицы, типа $G_s T_s T_s H$, также упрощается.

Для повышения эффективности расчетов очень важно учесть особенности решения, например симметрию поля в неоднородности [4, 7], подобрать оптимальную сетку. В работе [5] при расчете поля в вытянутой вдоль оси OY призме мы использовали неравномерную по этой оси сетку, сгущавшуюся на концах призмы. Покажем, что в случае, если глубина погружения неоднородности H много больше ее высоты h , можно получить достаточно хорошее приближение поля на поверхности среды, не разбивая неоднородность по оси OZ .

Действительно, интегральное уравнение (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, y, z) = & \bar{E}^N(x, y, z) + \\ & + \iiint_{V_T} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \sigma_c(z_0)] \hat{G}_E(x - x_0, y - y_0, z, z_0) \times \\ & \times \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поле на поверхности

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, y, z=0) = & \bar{E}^N(x, y, z=0) + \\ & + \iiint_{V_T} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \sigma_c(z_0)] \hat{G}_E(x - x_0, y - y_0, z=0, z_0) \times \\ & \times \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $H \gg h$, то $\frac{\partial \hat{G}_E}{\partial z_0} \approx 0$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{E}(x, y, z=0) = & \bar{E}^N(x, y, z=0) + \\ & + \iint_{S_T} \hat{G}_E \left(x - x_0, y - y_0, z=0, z_0 = -H - \frac{h}{2} \right) \times \\ & \times \bar{J}(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}(x_0, y_0) = & \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \\ & - \sigma_c(z_0)] \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dz_0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили интегральное представление поля на поверхности слоистой среды, в которое входит интеграл по сечению тела. Получим уравнение для $\bar{J}(x, y)$. Для этого умножим уравнение (8) на $(\sigma_T(x, y, z) - \sigma_c(z))$ и проинтегрируем по z . Получим

$$\begin{aligned} & \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x, y, z) - \sigma_c(z)] \bar{E}(x, y, z) dz = \\ & = \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x, y, z) - \sigma_c(z)] \bar{E}^N(x, y, z) dz + \\ & + \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x, y, z) - \sigma_c(z)] \left\{ \iiint_{V_T} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \sigma_c(z_0)] \times \right. \\ & \quad \times \hat{G}_E(x - x_0, y - y_0, z, z_0) \times \\ & \quad \left. \times \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \right\} dz = \\ & = \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x, y, z) - \sigma_c(z)] \bar{E}^N(x, y, z) dz + \\ & + \iiint_{V_T} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \sigma_c(z_0)] \times \\ & \quad \times \hat{K}(x, x_0, y, y_0, z_0) \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{K}(x, x_0, y, y_0, z_0) = & \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x, y, z) - \sigma_c(z)] \times \\ & \times \hat{G}_E(x - x_0, y - y_0, z, z_0) dz. \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{\partial \hat{K}}{\partial z_0} \approx 0$, поэтому

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_T} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \sigma_c(z_0)] \hat{K}(x, x_0, y, y_0, z_0) \times \\ & \quad \times \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 \approx \end{aligned}$$

$$\approx \iint_{S_T} \hat{K} \left(x, x_0, y, y_0, -H - \frac{h}{2} \right) \times \\ \times \int_{-H-h}^{-H} [\sigma_T(x_0, y_0, z_0) - \sigma_C(z_0)] \times \\ \times \bar{E}(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0 = \\ = \iint_{S_T} \hat{K}_0(x, x_0, y, y_0) \bar{J}(x_0, y_0) dx_0 dy_0,$$

окончательно получаем

$$\bar{J}(x, y) = \bar{J}^N(x, y) + \\ + \iint_{S_T} \hat{K}_0(x, x_0, y, y_0) \bar{J}(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (11)$$

Таким образом, чтобы найти поле на поверхности слоистой среды при $H \gg h$, нужно решить интегральное уравнение (11) для $\bar{J}(x, y)$. Пусть проводимость тела не зависит от z , т. е. $\sigma_T(x, y, z) = \sigma_T(x, y)$. Заметим, что при $H \gg h$

$$\frac{1}{h} \int_{-H-h}^{-H} \bar{E}^N(x, y, z) dz \approx \bar{E}^N \left(x, y, -H - \frac{h}{2} \right).$$

В таком случае уравнение (11) представляет собой уравнение (8) относительно $\bar{J}(x, y)/h$, написанное для случая, когда тело не разбивается по оси OZ .

Назовем такие неоднородности, которые не разбиваем по оси OZ , «тонкими». На рис. 1, 2 видно, что уже при $H/h \geq 1.5$, исполь-

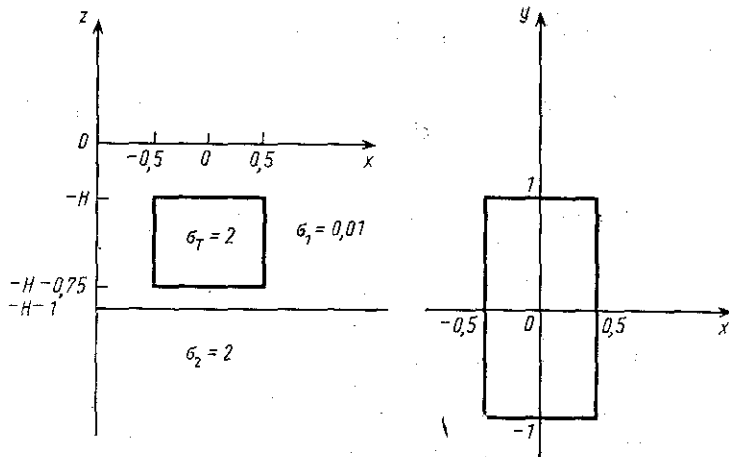


Рис. 1. Модель двухслойной среды с проводящей призмой в первом слое. Координаты даны в км, проводимости — в $1/(\text{Ом} \cdot \text{м})$

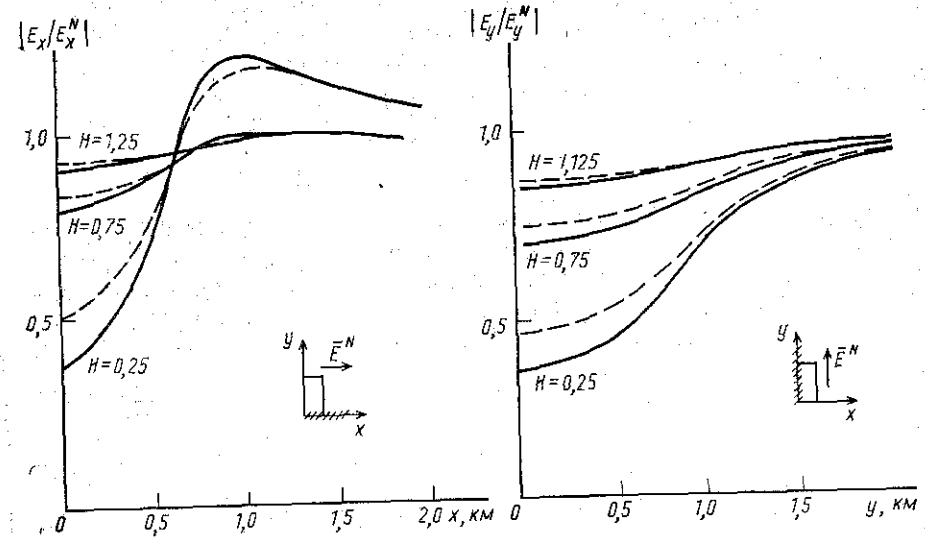


Рис. 2. Горизонтальные составляющие электрического поля на поверхности $z=0$ по профилям $y=0$ и $x=0$ для модели, изображенной на рис. 1. Поле возбуждается плоской волной:

$\bar{E}^N = (E_x^N, 0, 0)$, $H^N = (0, H_y^N, 0)$ или $\bar{E}^N = (0, E_y^N, 0)$, $H^N = (H_x^N, 0, 0)$. Период $T=10$ с. Штриховая линия — неоднородность не разбивается вдоль оси OZ , сплошная линия — число разбиений неоднородности вдоль оси OZ равно трем

зую приближение «тонких» неоднородностей, поле на поверхности можно вычислить с достаточно хорошей точностью.

В работе [5] был предложен итерационный метод решения полученной СЛАУ, основанный на частичном обращении матрицы системы. Для этого СЛАУ (2) представляли в виде

$$\hat{A}x = f, \quad \hat{A} = \{a_{mn} = \delta_{mn} + g_{mn}\}, \\ x = \{\bar{E}^{(n)}\}, \quad f = \{\bar{E}^N(M^{(n)})\}.$$

Матрицу \hat{A} представим в виде суммы $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ так, что матрица B , с одной стороны, определяет главную часть взаимодействия вторичных токов, а с другой стороны, достаточно проста для решения системы уравнений. Тогда можно построить итерационный процесс

$$\hat{B}x^{(n)} = f - \hat{C}x^{(n-1)}.$$

Выделение матрицы B осуществляется на основе физических представлений о взаимодействии токов. Простейшим случаем является выделение взаимодействия только в ближайших подобластях.

Такой подход оказывается наиболее эффективным в случае «тонких» неоднородностей в виде пластин. Если $\sigma_T(x, y, z) = \sigma_T(x, y)$, то матрицу системы можно записать в виде

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{A}_s = \begin{pmatrix} A_0^{(11)} & A_0^{(12)} & 0 \\ A_0^{(21)} & A_0^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & A_0^{(33)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_s^{(11)} & A_s^{(12)} & A_s^{(13)} \\ A_s^{(21)} & A_s^{(22)} & A_s^{(23)} \\ A_s^{(31)} & A_s^{(32)} & A_s^{(33)} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_0 соответствует матрице для однородной среды с проводимостью, равной проводимости вмещающего слоя, а \hat{A}_s определяет «добавку на слоистость». Отсюда видно, что матрица в однородной среде распадается в таком случае на две подматрицы.

Представим матрицу \hat{A}_0 в виде суммы $\hat{A}_0 = \hat{B}_0 + \hat{C}_0$, где \hat{B}_0 определяет главную часть матрицы \hat{A}_0 . Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\hat{B}_0 x^{(n)} = f - \hat{C}_0 x^{(n-1)} - \hat{A}_s x^{(n-1)}.$$

Здесь нужно обратить две матрицы меньшей размерности, чем \hat{A} :

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} B_0^{(11)} & B_0^{(12)} \\ B_0^{(21)} & B_0^{(22)} \end{pmatrix} \text{ и } B_2 \{B_0^{(33)}\}$$

и затем проинтерировать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raiche A. P. An integral equation approach to three — dimensional modeling // Geoph. J. R. Astr. Soc. 1974. V. 36. P. 363—376.
2. Weidelt P. Electromagnetic induction of a three — dimensional structures // J. Geoph. 1975. V. 41. P. 85—109.
3. Hohmann G. W. Three — dimensional induced polarization and electromagnetic modeling // Geophysics. 1975. V. 40. P. 309—324.
4. Hvozدارа M., Kaikkonen P., Varentsov I. M. Algorithm for solving 3-D problems of EM induction by means of vector integral equation // Studia Geoph. et Geod. 1987. V. 31. P. 369—385.
5. Дмитриев В. И., Позднякова Е. Е. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью // Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989.
6. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.
7. Ting S. C., Hohmann G. W. Integral equation modelling of three — dimensional magnetotelluric response // Geophysics. 1981. V. 46. P. 182—197.

И. С. Барашков, В. И. Дмитриев

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЛУБИННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ КВАЗИСЛОИСТЫХ СРЕД

Для изучения глубинного строения Земли А. Н. Тихоновым в работе [1] был предложен метод определения электрических

свойств Земли с помощью изучения импеданса Земли, т. е. отношения электрических и магнитных горизонтальных составляющих естественного поля Земли. Идеи, высказанные в этой работе, послужили основой нового геофизического метода — магнитотеллурического зондирования (МТЗ).

Данные МТЗ интерпретируются обычно в приближении однородного распределения электропроводности $\sigma(z)$, где z — глубина (плоскость $z=0$ определяет земную поверхность). Однако дальнейшие исследования [2] показали, что на интерпретацию данных глубинного МТЗ существенно влияют неоднородности верхнего (приповерхностного) слоя, причем даже в районах с медленными изменениями распределения электропроводности вдоль земной поверхности. Это связано, как показано в [2], с тем, что приповерхностный слой с электропроводностью σ_1 и мощностью h_1 отделен от глубинного проводящего слоя с электропроводностью σ_3 ($\sigma_3 \geq \sigma_1$) мощным слоем плохого проводника с электропроводностью $\sigma_2 \ll \sigma_1$ (рис. 1), что приводит к медленному перетеканию тока

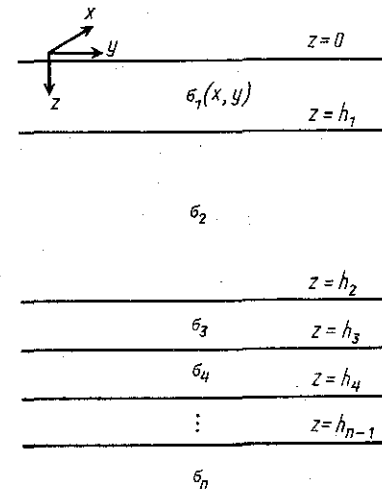


Рис. 1. Модель квазислоистой среды

из первого слоя в проводящее подстилающее основание. В результате возникает так называемый S-эффект, когда неоднородность интегральной проводимости первого слоя $S_1(x) = \sigma_1(x)h_1(x)$ сказывается на низкочастотной асимптотике импеданса. В работе [2] влияние S-эффекта на низкочастотную асимптотику импеданса изучено для двумерной задачи в случае H-поляризации, а в работе [3] — для трехмерной задачи, когда интегральная проводимость первого слоя $S_1 = S_1(x, y)$ произвольно распределена вдоль земной поверхности. Трехмерный случай существенно сложнее, чем двумерный, поскольку в трехмерном случае надо учитывать не только медленность перетекания тока из первого слоя в проводящее подстилающее основание, но и перераспределение тока внутри первого слоя. В настоящей статье предложен метод, позволяющий находить электропроводность $\sigma(z)$ горизонтально-однородной слоистой среды, залегающей при глубине $z > h_1$ с учетом поправок на искажения за счет неоднородностей электропроводности в первом слое, когда интегральная проводимость $S_1 = S_1(x, y)$ произвольно распределена вдоль земной поверхности.

Прямая задача МТЗ состоит в определении тензора импеданса связывающего тангенциальные компоненты электрического

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{A}_s = \begin{pmatrix} A_0^{(11)} & A_0^{(12)} & 0 \\ A_0^{(21)} & A_0^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & A_0^{(33)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_s^{(11)} & A_s^{(12)} & A_s^{(13)} \\ A_s^{(21)} & A_s^{(22)} & A_s^{(23)} \\ A_s^{(31)} & A_s^{(32)} & A_s^{(33)} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_0 соответствует матрице для однородной среды с проводимостью, равной проводимости вмещающего слоя, а \hat{A}_s определяет «добавку на слоистость». Отсюда видно, что матрица в однородной среде распадается в таком случае на две подматрицы.

Представим матрицу \hat{A}_0 в виде суммы $\hat{A}_0 = \hat{B}_0 + \hat{C}_0$, где \hat{B}_0 определяет главную часть матрицы \hat{A}_0 . Итерационный процесс строится следующим образом:

$$\hat{B}_0 x^{(n)} = f - \hat{C} x^{(n-1)} - \hat{A}_s x^{(n-1)}.$$

Здесь нужно обратить две матрицы меньшей размерности, чем \hat{A} :

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} B_0^{(11)} & B_0^{(12)} \\ B_0^{(21)} & B_0^{(22)} \end{pmatrix} \text{ и } B_2 \{B_0^{(33)}\}$$

и затем проинтерировать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raiche A. P. An integral equation approach to three — dimensional modeling // Geoph. J. R. Astr. Soc. 1974. V. 36. P. 363—376.
2. Weidelt P. Electromagnetic induction of a three — dimensional structures // J. Geoph. 1975. V. 41. P. 85—109.
3. Hohmann G. W. Three — dimensional induced polarization and electromagnetic modeling // Geophysics. 1975. V. 40. P. 309—324.
4. Hvozda M., Kaikkonen P., Varentsov I. M. Algorithm for solving 3-D problems of EM induction by means of vector integral equation // Studia Geoph. et Geod. 1987. V. 31. P. 369—385.
5. Дмитриев В. И., Позднякова Е. Е. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью // Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989.
6. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.
7. Ting S. C., Hohmann G. W. Integral equation modelling of three — dimensional magnetotelluric response // Geophysics. 1981. V. 46. P. 182—197.

И. С. Барашков, В. И. Дмитриев

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГЛУБИННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ КВАЗИСЛОИСТЫХ СРЕД

Для изучения глубинного строения Земли А. Н. Тихоновым в работе [1] был предложен метод определения электрических

свойств Земли с помощью изучения импеданса Земли, т. е. отношения электрических и магнитных горизонтальных составляющих естественного поля Земли. Идеи, высказанные в этой работе, послужили основой нового геофизического метода — магнитотеллурического зондирования (МТЗ).

Данные МТЗ интерпретируются обычно в приближении однородного распределения электропроводности $\sigma(z)$, где z — глубина (плоскость $z=0$ определяет земную поверхность). Однако дальнейшие исследования [2] показали, что на интерпретацию данных глубинного МТЗ существенно влияют неоднородности верхнего (приповерхностного) слоя, причем даже в районах с медленными изменениями распределения электропроводности вдоль земной поверхности. Это связано, как показано в [2], с тем, что приповерхностный слой с электропроводностью σ_1 и мощностью h_1 отделен от глубинного проводящего слоя с электропроводностью σ_3 ($\sigma_3 \geq \sigma_1$) мощным слоем плохого проводника с электропроводностью $\sigma_2 \ll \sigma_1$ (рис. 1), что приводит к медленному перетеканию тока

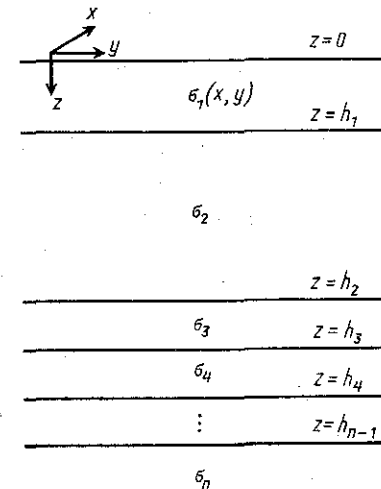


Рис. 1. Модель квазислоистой среды

из первого слоя в проводящее подстилающее основание. В результате возникает так называемый S-эффект, когда неоднородность интегральной проводимости первого слоя $S_1(x) = \sigma_1(x)h_1(x)$ сказывается на низкочастотной асимптотике импеданса. В работе [2] влияние S-эффекта на низкочастотную асимптотику импеданса изучено для двумерной задачи в случае H-поляризации, а в работе [3] — для трехмерной задачи, когда интегральная проводимость первого слоя $S_1 = S_1(x, y)$ произвольно распределена вдоль земной поверхности. Трехмерный случай существенно сложнее, чем двумерный, поскольку в трехмерном случае надо учитывать не только медленность перетекания тока из первого слоя в проводящее подстилающее основание, но и перераспределение тока внутри первого слоя. В настоящей статье предложен метод, позволяющий находить электропроводность $\sigma(z)$ горизонтально-однородной слоистой среды, залегающей при глубине $z > h_1$ с учетом поправок на искажения за счет неоднородностей электропроводности в первом слое, когда интегральная проводимость $S_1 = S_1(x, y)$ произвольно распределена вдоль земной поверхности.

Прямая задача МТЗ состоит в определении тензора импеданса связывающего тангенциальные компоненты электрического

$$\hat{Z}(\omega, x, y) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{E}_\tau = (E_x, E_y)$ и магнитного $\mathbf{H}_\tau = (H_x, H_y)$ полей на земной поверхности соотношением $\mathbf{E}_\tau = \hat{Z}\mathbf{H}_\tau$. Для этого на земной поверхности определяют поля $\mathbf{E}_\tau^m, \mathbf{H}_\tau^m$ при нормальном падении на земную поверхность плоской электромагнитной волны двух поляризаций ($m=0, H_x=1, H_y=0$), ($m=1, H_x=0, H_y=1$).

Мы рассматриваем обратную задачу глубинного МТЗ для n -слойной модели распределения электропроводности

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \sigma_1(x, y) & \text{при } 0 < z < h_1, \\ \sigma_k & \text{при } h_{k-1} < z < h_k, k=2, 3, \dots, n-1, \\ \sigma_n & \text{при } z > h_{n-1}, \end{cases}$$

где первый слой описывает электропроводность осадочного чехла, причем считается известным его интегральная проводимость $S_1(x, y) = \sigma_1(x, y)h_1$, а неоднородности сосредоточены в прямоугольной области

$$\mathcal{P} = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\},$$

с границей γ . Вне области \mathcal{P} интегральная проводимость S_1 постоянна. Второй слой высокоомный $0 < \sigma_2 \ll \min\{\min \sigma_1, \sigma_3, \dots, \sigma_n\}$, причем толщина второго слоя много больше толщины первого слоя:

$$h_2 \gg h_1. \quad (1)$$

Последний слой имеет конечную проводимость $0 < \sigma_n < \infty$.

В обратной задаче МТЗ считается известным тензор импеданса $\hat{Z}^0(\omega, x_0, y_0)$ в одной точке (x_0, y_0) на земной поверхности при различных ω . Необходимо определить распределение электропроводности $\sigma(z)$ при $z > h_1$.

Импеданс горизонтально-однородной слоистой среды при $z > h_2$, зависящий от частоты ω , обозначим через ν . Введем малый периметр ϵ , характеризующий медленность изменения суммарной электропроводности осадочного чехла:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\min S_1(x, y)}} \max \left(\left| \frac{\partial S_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial S_1}{\partial y} \right| \right).$$

В работе [3] получены условия, при выполнении которых трехмерная задача МТЗ не переходит к одномерной. При выполнении этих условий в нулевом приближении при $\epsilon \rightarrow 0$ тензор импеданса получаем в виде

$$\hat{Z}(\omega, x, y) = \hat{Z}^{(0)}(\omega, x, y) + O(\epsilon),$$

где

$$\hat{Z}^{(0)}(\omega, x, y) = i\omega \mu_0 \hat{Q}, \quad (2)$$

а компоненты тензора

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} r \frac{\partial U}{\partial x} & t - r \frac{\partial V}{\partial x} \\ -t + r \frac{\partial U}{\partial y} & -r \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Функции $U(x, y), V(x, y)$ являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \alpha V = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \alpha U = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P}$$

с нулевыми граничными условиями на γ :

$$V(x, y) = U(x, y) = 0 \quad \text{при } (x, y) \in \gamma,$$

где

$$\alpha = \sigma_2 / (h_2 - h_1), \quad (5)$$

$$G = \frac{x-1}{i\omega \mu_0 (h_2 - h_1)}, \quad P = \frac{\chi - 1}{i\omega \mu_0 (h_2 - h_1)},$$

$$t = 0,5 \chi (ae^{-ik_1 h_1} + be^{ik_1 h_1}),$$

$$r = 0,5(x-1) (ae^{-ik_1 h_1} + be^{ik_1 h_1}) - (h_2 - h_1) \cos(k_1 h_1), \quad (6)$$

$$\chi = \frac{2}{ik_1 (ae^{-ik_1 h_1} - be^{ik_1 h_1})},$$

$$x = 1 - \frac{2i(h_2 - h_1) \sin(k_1 h_1)}{ae^{-ik_1 h_1} - be^{ik_1 h_1}},$$

$$a = h_1 - h_2 + \frac{\nu}{i\omega \mu_0} + \frac{1}{ik_1},$$

$$b = a - \frac{2}{ik_1},$$

$$k_1 = k_1(x, y) = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma_1(x, y)}, \quad \text{Im } k_1 > 0.$$

Поскольку высокочастотное поле затухает уже в верхних слоях Земли, при интерпретации данных глубинного МТЗ нужны значения импеданса только при достаточно малых ω . Следовательно, в соотношениях (6) величину $e^{\pm ik_1 h_1}$ можно заменить по формуле $e^{\pm ik_1 h_1} \approx 1 \pm ik_1 h_1$. Тогда, учитывая (1), получим упрощенное выражение для $\hat{Z}^{(0)}$:

$$\hat{Z}^{(0)} = \frac{N}{1+S_1 N} \hat{R}, \quad (7)$$

где

$$N = \nu - i \omega \mu_0 h_{2x} \quad (8)$$

а компоненты тензора \hat{R} имеют вид

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v}{\partial x} \\ -1 + \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Функции u, v являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ - \alpha v = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \\ - \alpha u = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

с нулевыми граничными условиями на γ .

При $\omega \rightarrow 0$ из формул (7)–(10) низкочастотная асимптотика для тензора $\hat{Z}^{(0)}$ получается в виде

$$\hat{Z}^{(0)}(\omega, x, y) = \frac{\sqrt{i \omega \mu_0}}{i \sqrt{\sigma_n}} \hat{R} + O(\omega), \quad (11)$$

где компоненты тензора \hat{R} имеют вид (9), а функции u, v являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \alpha v = \frac{\partial S_1}{\partial x} \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \alpha u = \frac{\partial S_1}{\partial y} \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P}$$

с нулевыми граничными условиями на γ .

Низкочастотная асимптотика (11) позволяет определить параметры α и σ_n . Для этого по экспериментально определенной низкочастотной асимптотике импеданса $\hat{Z}^a(\omega, x_0, y_0)$ вычисляется тензор

$$\hat{T}(x_0, y_0) = - \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im} \{ \hat{Z}^a(\omega, x_0, y_0) / \sqrt{i \omega \mu_0} \}.$$

Параметры задачи σ_n и α находятся из экстремальной задачи $\inf_{\alpha, \sigma_n} \Phi(\alpha, \sigma_n)$, где

$$\Phi(\alpha, \sigma_n) = \left\| \hat{T}(x_0, y_0) - \frac{1}{\sqrt{\sigma_n}} \hat{R}(\alpha, x_0, y_0) \right\|. \quad (13)$$

При минимизации функционала (13) тензор $\hat{R}(\alpha, x_0, y_0)$ в окрестности значения $\alpha = 0$ представим в виде

$$\hat{R}(\alpha, x_0, y_0) = \hat{R}^{(0)}(x_0, y_0) + \alpha \hat{R}^{(1)}(x_0, y_0),$$

где компоненты тензоров $\hat{R}^{(0)}$ и $\hat{R}^{(1)}$ имеют вид

$$\hat{R}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} & -\frac{\partial v_0}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & -\frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & -\frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Функции u_0, v_0 являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial S_1}{\partial x} \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial S_1}{\partial y} \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P}$$

с нулевыми граничными условиями на γ , а функции u_1, v_1 являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = v_0 \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = u_0 \quad \text{при } (x, y) \in \mathcal{P}$$

с нулевыми граничными условиями на γ .

Неизвестные $\xi_1 = 1/\sqrt{\sigma_n}$ и $\xi_2 = \alpha/\sqrt{\sigma_n}$ найдем как экстремаль квадратичного функционала $\|\xi_1 \hat{R}^{(0)}(x_0, y_0) + \xi_2 \hat{R}^{(1)}(x_0, y_0) - \hat{T}(x_0, y_0)\|^2$ по формулам

$$\xi_1 = \frac{\sum_{i,j=1}^4 r_i^{(0)} r_j^{(1)} \begin{vmatrix} t_i & r_i^{(1)} \\ t_j & r_j^{(1)} \end{vmatrix}}{\sum_{i,j=1}^4 r_i^{(0)} r_j^{(1)} \begin{vmatrix} r_i^{(0)} & r_i^{(1)} \\ r_j^{(0)} & r_j^{(1)} \end{vmatrix}},$$

$$\xi_2 = \frac{\sum_{i,j=1}^4 r_i^{(0)} r_j^{(1)} \begin{vmatrix} r_i^{(0)} & t_i \\ r_j^{(0)} & t_j \end{vmatrix}}{\sum_{i,j=1}^4 r_i^{(0)} r_j^{(1)} \begin{vmatrix} r_i^{(0)} & r_i^{(1)} \\ r_j^{(0)} & r_j^{(1)} \end{vmatrix}},$$

где

$$r_i^{(k)} = R_{mi}^{(k)} \text{ при } i = 2(m-1) + l, 1 \leq m \leq 2,$$

$$1 \leq l \leq 2, 1 \leq i \leq 4, k = 0, 1,$$

$$t_l = T_{ml} \text{ при } i = 2(m-1) + l, 1 \leq m \leq 2,$$

$$1 \leq l \leq 2, 1 \leq i \leq 4.$$

Затем по формулам $\sigma_n = \xi_1^{-2}$, $\alpha = \xi_2/\xi_1$ определим искомые параметры α и σ_n .

Чтобы определить h_2 и геофизические параметры среды при $z > h_2$, восстановим сначала поведение величины N в зависимости от частоты ω . При $\omega \rightarrow 0$ [низкочастотная асимптотика для N имеет вид

$$N = (1-i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_n}} - i\omega \mu_0 h_2. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Re} N > 0$, $\operatorname{Im} N < 0$. Пусть $N = \xi + i\eta$, где $\xi = \operatorname{Re} N$, а $\eta = \operatorname{Im} N$. Тогда из формулы (14) получим

$$\eta = -2\sigma_n h_2 \xi^2 - \xi. \quad (15)$$

Таким образом, множество комплексных значений

$$\{N(\omega) : \omega > 0\} \cap O(0) \quad (16)$$

в окрестности нуля на комплексной плоскости принадлежит параболе, изображенной на рис. 2 и зависящей от неизвестного параметра h_2 . Восстановив множество (16), можно определить параметр h_2 , а значит, согласно формуле (5) и параметр

$$\sigma_2 = \alpha(h_2 - h_1). \quad (17)$$

Для восстановления множества (16) представим тензор (9) при малых N в виде $\hat{R} = \hat{R}^{(0)} + N\hat{R}^{(1)}$, где

$$\hat{R}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} & -\frac{\partial v_0}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & -\frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & -\frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Функции u_0, v_0 являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \alpha v_0 = \frac{\partial S_1}{\partial x} \text{ при } (x, y) \in \mathcal{D},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \alpha u_0 = \frac{\partial S_1}{\partial y} \text{ при } (x, y) \in \mathcal{D}$$

с нулевыми граничными условиями на γ , а функции u_1, v_1 в области \mathcal{D} — решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \alpha v_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[S_1^2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - 1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1^2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right),$$

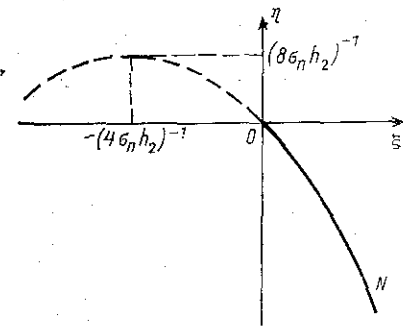


Рис. 2. Множество $\{N(\omega) : \omega > 0\}$ на комплексной плоскости при $\sigma_3 = \sigma^4 = \dots = \sigma^n$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \alpha u_1 = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(S_1^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[S_1^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

с нулевыми граничными условиями на γ .

Параметр N при малых ω найдем из квадратного уравнения

$$\frac{N}{1+S_1 N} (R_{ij}^{(0)} + N R_{ij}^{(1)}) = Z_{ij}^3(\omega)$$

с решением

$$\begin{aligned} N = N_{ij} &= \frac{-Z_{ij}^3 + \sqrt{Z_{ij}^6 + 4Z_{ij}^3 R_{ij}^{(1)} N_{ij}^*}}{2N_{ij}^* R_{ij}^{(1)}}, \\ N_{ij}^* &= \frac{Z_{ij}^3}{R_{ij}^{(0)} - S_1 Z_{ij}^3}. \end{aligned} \quad (17)$$

При различных i и j формулы (17) дают четыре кривых $N_{ij}(\omega)$. Эти кривые определяют четыре функции $\eta_{ij}(\xi)$. Параметр h_2 находится из экстремальной задачи

$$\inf_{h_2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \int_0^{\xi_1} [2\sigma_n h_2 \xi^2 + \xi + \eta_{ij}(\xi)]^2 d\xi$$

с решением

$$h_2 = \frac{1}{\xi_1 \sigma_n} \left\{ \frac{2,5}{\xi_1 \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}} \int_0^1 \tau^2 \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} |\eta_{ij}(\xi_1 \tau)| d\tau - 0,625 \right\}, \quad (18)$$

здесь a_{ij} неотрицательные весовые коэффициенты.

Определив h_2 , по формуле (14) восстановим зависимость $N(\omega)$ при $0 < \omega < \omega_1$. Полученное таким образом значение $N(\omega_1)$ возьмем в качестве нулевого приближения N_0 к истинному значению функции N при $\omega = \omega_1$. Чтобы уточнить значение N_0 и восстановить $N(\omega)$ на следующем интервале значений частот при $\omega_1 < \omega < \omega_2$, разложим тензор $\hat{Z}^{(0)}$, заданный формулой (7) по $N - N_0$ в окрестности точки N_0 :

$$\hat{Z}^{(0)} = \hat{Q}^{(0)} + N \hat{Q}^{(1)} + O((N - N_0)^2),$$

где

$$\hat{Q}^{(0)} = \left(\frac{N_0}{1+S_1 N_0} \right)^2 [S_1 \hat{R}^{(0)} - (1+S_1 N_0) \hat{R}^{(1)}],$$

$$\hat{Q}^{(1)} = \frac{1}{1+S_1 N_0} \hat{R}^{(0)} - \frac{1}{N_0} \hat{Q}^{(0)},$$

а компоненты тензоров $\hat{R}^{(0)}$ и $\hat{R}^{(1)}$ имеют вид

$$\hat{R}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} & -\frac{\partial v_0}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & -\frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & -\frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Функции u_0, v_0 в области \mathcal{D} являются решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) -$$

$$- \alpha v_0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) -$$

$$- \alpha u_0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)$$

с нулевыми граничными условиями на γ , а функции u_1, v_1 в области \mathcal{D} — решениями уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \alpha v_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)^2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - 1 \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)^2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \alpha u_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - 1 \right) \right]$$

с нулевыми граничными условиями на γ .

Параметр задачи $N = N(\omega)$ при $\omega_1/2 < \omega < \omega_2$ находится из экстремальной задачи $\inf_N \|\hat{Z}^a(\omega) - \hat{Q}^{(0)} - N \hat{Q}^{(1)}\|$ с решением

$$N = N(\omega) = \frac{\sum_{i,j=1}^2 \bar{Q}_{ij}^{(1)} (Z_{ij}^a(\omega) - Q_{ij}^{(0)})}{\sum_{i,j=1}^2 |Q_{ij}^{(1)}|^2}, \quad (19)$$

здесь $\bar{Q}_{ij}^{(1)}$ означает число комплексно-сопряженное числу $Q_{ij}^{(1)}$.

По формуле (19) восстановим значения $N(\omega)$ при $\omega_1/2 < \omega < \omega_2$. Эти значения при $\omega_1/2 < \omega < (\omega_1 + \omega_2)/2$ возьмем в качестве уточненного значения для $N(\omega)$. Значение $N(\omega_2)$, посчитанное по формуле (19), считаем нулевым приближением N_0 к истинному значению функции N при $\omega = \omega_2$. Теперь можно продвинуться в восстановлении $N(\omega)$ на следующий интервал по ω . Шаг за шагом восстановим $N(\omega)$ для всех ω , необходимых при глубинном МТЗ.

После этого согласно (8) по формуле

$$v(\omega) = N(\omega) + i\omega\mu_0 h_2 \quad (20)$$

определим импеданс горизонтально-однородной слоистой среды, залегающей при глубине $z > h_2$, и используем его для одномерной интерпретации этой среды по стандартной программе [4].

Следует отметить, что значение h_2 , найденное по формуле (18), использовано в описанном алгоритме дважды. Сначала, зная приближенно h_2 , мы по формуле (14) нашли значение $N(\omega_1)$, которое использовали затем в качестве нулевого приближения для более точного восстановления $N(\omega)$ в интервале $\omega_1/2 < \omega < (\omega_1 + \omega_2)/2$. При этом достаточно знать h_2 лишь весьма приближенно. Второй раз h_2 использовано в формуле (20) при вычислении $v(\omega)$. Здесь неточность в определении h_2 может очень сильно повлиять на результат дальнейшей одномерной интерпретации.

Согласно формуле (20) реальная часть $v(\omega)$ не зависит от h_2 и легко вычисляется по формуле

$$\operatorname{Re} v(\omega) = \operatorname{Re} N(\omega). \quad (21)$$

Поэтому одномерную интерпретацию целесообразно проводить только по реальной части импеданса $v(\omega)$, рассчитанного по формуле (21). Затем, восстановив геофизические параметры среды

при глубине $z > h_2$, найдем комплексные значения $v(\omega)$. Уточненное значение параметра h_2 определим из экстремальной задачи

$$\inf_{h_2} \int_0^{\omega_{\max}} [\operatorname{Im} v(\omega) - \operatorname{Im} N(\omega) - \omega\mu_0 h_2]^2 d\omega$$

с решением

$$h_2 = \frac{3}{\mu_0 \omega_{\max}^3} \int_0^{\omega_{\max}} [\operatorname{Im} v(\omega) - \operatorname{Im} N(\omega)] \omega d\omega.$$

Таким образом, задача восстановления распределения электропроводности $\sigma(z)$ при $z > h_1$ полностью решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубинных слоев земной коры // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 295—297.
2. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Влияние поверхностных неоднородностей на глубинное магнитотеллурическое зондирование // Вычислительные методы и программирование. № 13. М.: Изд-во МГУ, 1969. С. 237—243.
3. Барашков А. С., Дмитриев В. И. Об обратной задаче глубинного магнитотеллурического зондирования // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 1. С. 83—86.
4. Березина Н. И., Дмитриев В. И., Захарова Е. А. Применение метода линеаризации к решению обратной задачи МТЗ в слоистой среде // Библиотека программ по геофизике. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 3—10.

Л. Л. Приходько

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНОМАЛЬНОГО КВАЗИТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НАД ПРОВОДЯЩИМ ЦИЛИНДРОМ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Развитие геофизических методов разведки рудных месторождений требует дальнейшей разработки моделей электромагнитных полей в неоднородных проводящих средах. В связи с этим активно развиваются методы расчета прямых задач электроразведки неоднородных сред. Численное решение таких задач весьма трудоемко. Однако существует класс задач, для которых разработаны более эффективные вычислительные методы, чем методы решения общих трехмерных задач электродинамики неоднородных сред [1]. Такие задачи называются квазитрехмерными. В них поле трехмерно, а среда двумерна.

Пусть горизонтальный электрический диполь находится на поверхности слоистой среды, содержащей цилиндрическую идеально проводящую неоднородность, ось которой направлена вдоль ОХ [2]. Поскольку источник поля — локальный, то поле трехмерно, неоднородность двумерна. Зависимость от времени берем в

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \alpha u_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)^2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{S_1}{1+S_1 N_0} \right)^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - 1 \right) \right]$$

с нулевыми граничными условиями на γ .

Параметр задачи $N = N(\omega)$ при $\omega_1/2 < \omega < \omega_2$ находится из экстремальной задачи $\inf_N \|\hat{Z}^a(\omega) - \hat{Q}^{(0)} - N \hat{Q}^{(1)}\|$ с решением

$$N = N(\omega) = \frac{\sum_{i,j=1}^2 \bar{Q}_{ij}^{(1)} (Z_{ij}^a(\omega) - Q_{ij}^{(0)})}{\sum_{i,j=1}^2 |Q_{ij}^{(1)}|^2}, \quad (19)$$

здесь $\bar{Q}_{ij}^{(1)}$ означает число комплексно-сопряженное числу $Q_{ij}^{(1)}$.

По формуле (19) восстановим значения $N(\omega)$ при $\omega_1/2 < \omega < \omega_2$. Эти значения при $\omega_1/2 < \omega < (\omega_1 + \omega_2)/2$ возьмем в качестве уточненного значения для $N(\omega)$. Значение $N(\omega_2)$, посчитанное по формуле (19), считаем нулевым приближением N_0 к истинному значению функции N при $\omega = \omega_2$. Теперь можно продвинуться в восстановлении $N(\omega)$ на следующий интервал по ω . Шаг за шагом восстановим $N(\omega)$ для всех ω , необходимых при глубинном МТЗ.

После этого согласно (8) по формуле

$$v(\omega) = N(\omega) + i\omega\mu_0 h_2 \quad (20)$$

определим импеданс горизонтально-однородной слоистой среды, залегающей при глубине $z > h_2$, и используем его для одномерной интерпретации этой среды по стандартной программе [4].

Следует отметить, что значение h_2 , найденное по формуле (18), использовано в описанном алгоритме дважды. Сначала, зная приближенно h_2 , мы по формуле (14) нашли значение $N(\omega_1)$, которое использовали затем в качестве нулевого приближения для более точного восстановления $N(\omega)$ в интервале $\omega_1/2 < \omega < (\omega_1 + \omega_2)/2$. При этом достаточно знать h_2 лишь весьма приближенно. Второй раз h_2 использовано в формуле (20) при вычислении $v(\omega)$. Здесь неточность в определении h_2 может очень сильно повлиять на результат дальнейшей одномерной интерпретации.

Согласно формуле (20) реальная часть $v(\omega)$ не зависит от h_2 и легко вычисляется по формуле

$$\operatorname{Re} v(\omega) = \operatorname{Re} N(\omega). \quad (21)$$

Поэтому одномерную интерпретацию целесообразно проводить только по реальной части импеданса $v(\omega)$, рассчитанного по формуле (21). Затем, восстановив геофизические параметры среды

при глубине $z > h_2$, найдем комплексные значения $v(\omega)$. Уточненное значение параметра h_2 определим из экстремальной задачи

$$\inf_{h_2} \int_0^{\omega_{\max}} [\operatorname{Im} v(\omega) - \operatorname{Im} N(\omega) - \omega\mu_0 h_2]^2 d\omega$$

с решением

$$h_2 = \frac{3}{\mu_0 \omega_{\max}^3} \int_0^{\omega_{\max}} [\operatorname{Im} v(\omega) - \operatorname{Im} N(\omega)] \omega d\omega.$$

Таким образом, задача восстановления распределения электропроводности $\sigma(z)$ при $z > h_1$ полностью решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубинных слоев земной коры // ДАН СССР. 1950. Т. 73, № 2. С. 295—297.
2. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Влияние поверхностных неоднородностей на глубинное магнитотеллурическое зондирование // Вычислительные методы и программирование. № 13. М.: Изд-во МГУ, 1969. С. 237—243.
3. Барашков А. С., Дмитриев В. И. Об обратной задаче глубинного магнитотеллурического зондирования // ДАН СССР. 1987. Т. 295, № 1. С. 83—86.
4. Березина Н. И., Дмитриев В. И., Захарова Е. А. Применение метода линеаризации к решению обратной задачи МТЗ в слоистой среде // Библиотека программ по геофизике. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 3—10.

Л. Л. Приходько

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНОМАЛЬНОГО КВАЗИТРЕХМЕРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НАД ПРОВОДЯЩИМ ЦИЛИНДРОМ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Развитие геофизических методов разведки рудных месторождений требует дальнейшей разработки моделей электромагнитных полей в неоднородных проводящих средах. В связи с этим активно развиваются методы расчета прямых задач электроразведки неоднородных сред. Численное решение таких задач весьма трудоемко. Однако существует класс задач, для которых разработаны более эффективные вычислительные методы, чем методы решения общих трехмерных задач электродинамики неоднородных сред [1]. Такие задачи называются квазитрехмерными. В них поле трехмерно, а среда двумерна.

Пусть горизонтальный электрический диполь находится на поверхности слоистой среды, содержащей цилиндрическую идеально проводящую неоднородность, ось которой направлена вдоль ОХ [2]. Поскольку источник поля — локальный, то поле трехмерно, неоднородность двумерна. Зависимость от времени берем в

виде $e^{-i\omega t}$, токами смещения пренебрегаем, магнитную проницаемость всюду считаем постоянной и равной магнитной проницаемости вакуума ($\mu = \mu_0$). Проводимость земли меняется только по координатам y и z , а по координате x она постоянна.

Для решения задачи применим методику, развитую в работе [1]. Электромагнитное поле запишем в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{E}^{(n)}(x, y, z) + \mathbf{E}^{(a)}(x, y, z)] e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = [\mathbf{H}^{(n)}(x, y, z) + \mathbf{H}^{(a)}(x, y, z)] e^{-i\omega t},$$

где $\mathbf{E}^{(n)}$, $\mathbf{H}^{(n)}$ — нормальное поле, $\mathbf{E}^{(a)}$, $\mathbf{H}^{(a)}$ — аномальное поле. Аномальное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла в горизонтально-однородной среде

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(a)} = \delta(z) \mathbf{E}^{(a)}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(a)} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}^{(a)}, \end{cases} \quad \delta(z) = \begin{cases} \delta_0, & z < 0, \\ \delta_1, & 0 < z < h, \\ \delta_2, & z > h, \end{cases} \quad (2)$$

а на контуре C выполняются граничные условия

$$E_x^{(a)} = -E_x^{(n)}, \quad E_z^{(a)} = -E_z^{(n)},$$

где E_x — компонента, касательная к контуру. В бесконечности выполняются условия излучения. Уравнения Максвелла для нормального поля, возбуждаемого электрическим диполем \mathbf{j} , имеют вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(n)} = \delta(z) \mathbf{E}^{(n)} + \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(n)} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}^{(n)}. \end{cases} \quad (3)$$

Введем преобразования Фурье от уравнений Максвелла по координате x для нормального и аномального полей и тока:

$$\begin{aligned} e^{(n)}(y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_x^{(n)}(x, y, z) e^{i\xi x} dx, \quad h^{(n)}(y, z) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_x^{(n)}(x, y, z) e^{i\xi x} dx, \end{aligned}$$

$$e^{(a)}(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_x^{(a)}(x, y, z) e^{i\xi x} dx,$$

$$h^{(a)}(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_x^{(a)}(x, y, z) e^{i\xi x} dx,$$

$$j(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_x(x, y, z) e^{i\xi x} dx.$$

Формулы для определения полей получены в [1]:

$$\begin{aligned} e^{(a)}(M) &= \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{\partial G_e}{\partial n_{M_0}}(M, M_0) i_1(M_0) dl_{M_0} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \oint_C g_e(M, M_0) i_2(M_0) dl_{M_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} h^{(a)}(M) &= \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{\partial g_m}{\partial n_{M_0}}(M, M_0) i_1(M_0) dl_{M_0} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \oint_C G_m(M, M_0) i_2(M_0) dl_{M_0}, \end{aligned}$$

где интегрирование проводится по контуру C цилиндра, n — внешняя нормаль к этому контуру, $M_0 \in C$, M лежит на поверхности земли, тензор Грина

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_e & g_e \\ g_m & G_m \end{pmatrix}$$

определяется из [2], а токи удовлетворяют системе уравнений Фредгольма II рода

$$\begin{cases} i_1(M) + \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{\partial G_e}{\partial n_{M_0}}(M, M_0) i_1(M_0) dl_{M_0} + \\ + \frac{1}{\pi} \oint_C g_e(M, M_0) i_2(M_0) dl_{M_0} = -e^{(n)}(M), \\ i_2(M) - \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{\partial^2 g_m}{\partial n_M \partial n_{M_0}}(M, M_0) i_1(M_0) dl_{M_0} - \\ - \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{\partial G_m}{\partial n_M}(M, M_0) i_2(M_0) dl_{M_0} = \frac{\partial h^{(n)}}{\partial n_M}(M), \end{cases} \quad (5)$$

где точки M и M_0 принадлежат контуру C . Правые части известны:

$$e^{(n)}(M) = G_e(M, M_0)/2\pi, \quad h^{(n)}(M) = g_m(M, M_0)/2\pi,$$

где точка M лежит на поверхности земли, $M_0 \in C$.

Система уравнений (5) решается методом сведения к системе алгебраических уравнений. Непрерывные функции распределения токов $i_1(M)$, $i_2(M)$ на контуре C заменим кусочно-постоянными. Разобьем C на элементарные дуги l_j , внутри которых $i_1(M)$, $i_2(M)$ можно считать постоянными и равными значению в некоторой внутренней точке M_i дуги l_j . Это оправдывается тем, что i_1 и i_2 не сильно меняются, если неоднородность отстоит от диполя \mathbf{j} достаточно далеко. В результате система (5) интегральных уравнений Фредгольма II рода редуцируется к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных $i_1(M_i)$, $i_2(M_i)$, $i=1, \dots, N$:

$$\begin{cases} i_1(M_i) + \sum_{j=1}^N \{a_{ij} i_1(M_j) + b_{ij} i_2(M_j)\} = -e^{(n)}(M_i), \\ i_2(M_i) - \sum_{j=1}^N \{c_{ij} i_1(M_j) + d_{ij} i_2(M_j)\} = \frac{\partial h^{(n)}}{\partial n_{M_i}}(M_i), \end{cases}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{l_j} \frac{\partial G_e}{\partial n_{M_0}}(M_i, M_0) dl_{M_0},$$

$$b_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{l_j} g_e(M_i, M_0) dl_{M_0},$$

$$c_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{l_j} \frac{\partial^2 g_m}{\partial n_{M_i} \partial n_{M_0}}(M_i, M_0) dl_{M_0},$$

$$d_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{l_j} \frac{\partial G_m}{\partial n_{M_i}}(M_i, M_0) dl_{M_0}.$$

Требуется эффективный способ вычисления коэффициентов a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , причем при $i=j$ имеем несобственный интеграл для a_{ii} , d_{ii} , что связано с наличием особенности в ядрах системы интегральных уравнений (5) при $M=M_0$.

Получим аналитические выражения для a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} . Перейдем от декартовых координат (y, z) к полярным координатам (ρ, φ) . Точки $M=(y, z)$ и $M_0=(y_0, z_0)$ лежат на окружности C , ограничивающей сечение неоднородности. Следовательно, для них $\rho=R$ и

$$\begin{aligned} y &= R \sin \varphi + h_2, & y_0 &= R \sin \varphi_0 + h_2, \\ z &= R \cos \varphi + h_1, & z_0 &= R \cos \varphi_0 + h_1, \end{aligned} \quad (6)$$

где R — радиус окружности C , φ, φ_0 — углы между осью OZ и радиусами-векторами, проведенными в точки M и M_0 соответственно, h_1, h_2 — расстояния от источника до центра сечения Грина неоднородности. В таком случае для производных тензора Грина справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial G_e}{\partial n_{M_0}} = \frac{\partial G_e}{\partial \rho_{M_0}} = \frac{\partial G_e}{\partial y_0} \sin \varphi_0 + \frac{\partial G_e}{\partial z_0} \cos \varphi_0,$$

$$\frac{\partial G_m}{\partial n_M} = \frac{\partial G_m}{\partial \rho_M} = \frac{\partial G_m}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial G_m}{\partial z} \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_m}{\partial n_M \partial n_{M_0}} &= \frac{\partial^2 g_m}{\partial \rho_M \partial \rho_{M_0}} = \frac{\partial^2 g_m}{\partial y \partial y_0} \sin \varphi_0 \sin \varphi + \\ &+ \frac{\partial^2 g_m}{\partial y \partial z_0} \cos \varphi_0 \sin \varphi + \frac{\partial^2 g_m}{\partial x \partial y_0} \sin \varphi_0 \cos \varphi + \\ &+ \frac{\partial^2 g_m}{\partial z \partial z_0} \cos \varphi_0 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Мы установили ранее в [2], что диагональные элементы $G_e(M, M_0)$ и $G_m(M, M_0)$ двумерной тензорной функции Грина имеют особенность при $M=M_0$ и эта особенность в слоистой среде такая же, как особенность в однородном пространстве с проводимостью δ_2 . Для однородного пространства

$$G_e^{(0)}(M, M_0) = \frac{k_2^2 - \xi^2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)} \left(\sqrt{k_2^2 - \xi^2} r_{MM_0} \right), \quad (7)$$

$$G_m^{(0)}(M, M_0) = \frac{k_2^2 - \xi^2}{\mu_0} \cdot \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)} \left(\sqrt{k_2^2 - \xi^2} r_{MM_0} \right),$$

где $H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots$ — функция Ханкеля,

$$\begin{aligned} r_{MM_0} &= \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, \\ \varepsilon_2 &= i \frac{\delta_2}{\omega}. \end{aligned}$$

Воспользуемся преобразованиями (6), свойствами функции Ханкеля и покажем, что для точек, лежащих на контуре C , при совпадении аргументов особенность исчезает. Она равняется кри-
визне контура, поскольку

$$\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial n_M} \left\{ \sqrt{(k_2^2 - \xi^2) [(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]} \right\} =$$

$$= -\frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial R} \left(2R \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right) =$$

$$= -2 \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| H_1^{(1)} \times$$

$$\times \left(2R \sqrt{k_2^2 - \xi^2} \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right| \right)$$

при

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\partial G_e^{(0)}}{\partial n_{M_0}} = \frac{(k_2^2 - \xi^2) \pi i}{2 \varepsilon_2 R},$$

$$\frac{\partial G_m^{(0)}}{\partial n_M} = \frac{(k_2^2 - \xi^2) \pi i}{2 \mu_0 R}.$$

Местоположение точек M и M_0 на окружности C полностью определяется углами φ и φ_0 . Систему (5) интегральных уравнений Фредгольма II рода можно переписать:

$$\left\{ \begin{aligned} i_1(\varphi) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G_e}{\partial n_{\varphi_0}}(\varphi, \varphi_0) i_1(\varphi_0) d\varphi_0 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_e(\varphi, \varphi_0) i_2(\varphi_0) d\varphi_0 = -e^{(n)}(\varphi), \\ i_2(\varphi) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 g_m}{\partial n_\varphi \partial n_{\varphi_0}}(\varphi, \varphi_0) i_1(\varphi_0) d\varphi_0 + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G_m}{\partial n_\varphi}(\varphi, \varphi_0) i_2(\varphi_0) d\varphi_0 = \frac{\partial h^{(n)}}{\partial n_\varphi}(\varphi). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Система алгебраических уравнений в таком случае представляется в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^N \{A_{ij} i_1(\varphi_j) + B_{ij} i_2(\varphi_j)\} = -e^{(n)}(\varphi_i), \\ \sum_{j=1}^N \{C_{ij} i_1(\varphi_j) + D_{ij} i_2(\varphi_j)\} = -\frac{\partial h^{(n)}}{\partial n_{\varphi_i}}(\varphi_i), \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где

$$A_{ij} = a_{ij}^{(0)} + a_{ij}^{(1)} + \delta_{ij}, \quad B_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)},$$

$$C_{ij} = -c_{ij}^{(0)} - c_{ij}^{(1)}, \quad D_{ij} = -d_{ij}^{(0)} - d_{ij}^{(1)} - \delta_{ij},$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

В работе [3] показано, что для однородного пространства с проводимостью δ_2 матрицы $a_{ij}^{(0)}$, $b_{ij}^{(0)}$, $c_{ij}^{(0)}$, $d_{ij}^{(0)}$ теплицевы. Элементы матриц представляют собой интегралы от функции Грина, на которую действуют соответствующие дифференциальные операторы. Следовательно, из-за четности $\cos \lambda(y-y_0)$ и нечетности $\sin \lambda(y-y_0)$ получим

$$a_{-r}^{(0)} = a_r^{(0)}, \quad d_{-r}^{(0)} = d_r^{(0)}, \quad b_{-r}^{(0)} = -b_r^{(0)}, \quad c_{-r}^{(0)} = -c_r^{(0)}. \quad (10)$$

Вследствие симметричности цилиндра интегрирование проводим на отрезке $[0, \pi]$. Вместе с (10) это позволит сократить время вычисления расширенной матрицы для однородного пространства примерно в четыре раза. Расширенная матрица для однородного пространства имеет следующий вид:

$$\tilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} & \dots & a_{N-1}^{(0)} & b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & \dots & b_{N-1}^{(0)} \\ a_1^{(0)} & a_0^{(0)} & \dots & a_{N-2}^{(0)} & -b_1^{(0)} & b_0^{(0)} & \dots & b_{N-2}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1}^{(0)} & a_{N-2}^{(0)} & \dots & a_0^{(0)} & -b_{N-1}^{(0)} & -b_{N-2}^{(0)} & \dots & b_0^{(0)} \\ \hline c_0^{(0)} & c_1^{(0)} & \dots & c_{N-1}^{(0)} & d_0^{(0)} & d_1^{(0)} & \dots & d_{N-1}^{(0)} \\ -c_1^{(0)} & c_0^{(0)} & \dots & c_{N-2}^{(0)} & d_1^{(0)} & d_0^{(0)} & \dots & d_{N-2}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{N-1}^{(0)} & -c_{N-2}^{(0)} & \dots & c_0^{(0)} & d_{N-1}^{(0)} & d_{N-2}^{(0)} & \dots & d_0^{(0)} \end{array} \right).$$

Перестановкой строк и столбцов матрицы $\tilde{A}^{(0)}$ приведем ее к клеточно-теплицевому виду с клетками порядка 2×2 :

$$\tilde{\tilde{A}}^{(0)} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a_0^{(0)} & b_0^{(0)} & & & a_1^{(0)} & b_1^{(0)} & & & \dots & & a_{N-1}^{(0)} & b_{N-1}^{(0)} \\ c_0^{(0)} & d_0^{(0)} & & & c_1^{(0)} & d_1^{(0)} & & & \dots & & c_{N-1}^{(0)} & d_{N-1}^{(0)} \\ \hline a_1^{(0)} & -b_1^{(0)} & & & a_0^{(0)} & b_0^{(0)} & & & \dots & & a_{N-2}^{(0)} & b_{N-2}^{(0)} \\ -c_1^{(0)} & d_1^{(0)} & & & c_0^{(0)} & d_0^{(0)} & & & \dots & & c_{N-2}^{(0)} & d_{N-2}^{(0)} \\ \hline \dots & \dots & & & \dots & \dots & & & \dots & & \dots & \dots \\ \hline a_{N-1}^{(0)} & -b_{N-1}^{(0)} & & & a_{N-2}^{(0)} & -b_{N-2}^{(0)} & & & \dots & & a_0^{(0)} & b_0^{(0)} \\ -c_{N-1}^{(0)} & d_{N-1}^{(0)} & & & -c_{N-2}^{(0)} & d_{N-2}^{(0)} & & & \dots & & c_0^{(0)} & d_0^{(0)} \end{array} \right).$$

2. Приходько Л. Л. Исследование тензорной функции Грина для квазитрехмерной задачи //Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 195—205.
3. Плещко В. Ю. Метод численного исследования электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью //Численные методы электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 95—104.
4. Воеводина С. Н. Клеточно-теплицевы матрицы и интегральные уравнения Фредгольма //Вычислительные методы и программирование. Вып. XXIV. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 91—93.

В. И. Дмитриев, А. В. Седельникова

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПРИ РАСЧЕТАХ АНОМАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Очень часто в геофизике возникают задачи поиска аномальных электромагнитных полей в проводящих средах. При решении таких задач активно используется метод интегральных уравнений, позволяющий эффективно рассчитывать электромагнитное поле в любой точке среды. Однако в случае достаточно большого тела или при наличии в среде нескольких тел прямые методы решения задачи становятся трудоемкими, так как требуют больших затрат машинных ресурсов. Здесь более эффективны итерационные методы.

Авторами был предложен и подробно описан итерационный метод, примененный к уравнению Фредгольма II рода и основанный на том, что электромагнитное поле на неоднородности изменяется относительно медленно [3]. В настоящей статье рассматривается применимость этого метода к решению систем интегральных уравнений Фредгольма I рода, возникающих в задачах расчета аномального электромагнитного поля в проводящей среде.

Постановка задачи. Пусть в однородном пространстве с диэлектрической проводимостью σ_0 и магнитной проницаемостью μ_0 расположено N различных цилиндрических тел. Обозначим области, занятые сечениями цилиндрических тел, S_j , а их границы C_j ($j=1, 2, \dots, N$) соответственно. Среду внутри S_j характеризуем параметрами σ_j, μ_j . Внешнюю ко всем областям S_j часть плоскости R^2 обозначим S_0 .

Задача поиска аномального электромагнитного поля состоит в следующем: в R^2 определить функцию $U(M)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U + k^2(M)U = 0, \quad (1)$$

где $k(M)$ — кусочно-постоянная функция координат точки M :

$$k(M) = \begin{cases} k_j = \sqrt{i\omega \mu_j \sigma_j} & \text{при } M \in S_j (j = 1, 2, \dots, N), \\ k_0 = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma_0} & \text{при } M \in S_0. \end{cases}$$

2. Приходько Л. Л. Исследование тензорной функции Грина для квазитрехмерной задачи //Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 195—205.
3. Плешко В. Ю. Метод численного исследования электромагнитного поля в слонстой среде с локальной неоднородностью //Численные методы электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 95—104.
4. Воеводина С. Н. Клеточно-теплицевы матрицы и интегральные уравнения Фредгольма //Вычислительные методы и программирование. Вып. XXIV. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 91—93.

В. И. Дмитриев, А. В. Седельникова

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПРИ РАСЧЕТАХ АНОМАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Очень часто в геофизике возникают задачи поиска аномальных электромагнитных полей в проводящих средах. При решении таких задач активно используется метод интегральных уравнений, позволяющий эффективно рассчитывать электромагнитное поле в любой точке среды. Однако в случае достаточно большого тела или при наличии в среде нескольких тел прямые методы решения задачи становятся трудоемкими, так как требуют больших затрат машинных ресурсов. Здесь более эффективны итерационные методы.

Авторами был предложен и подробно описан итерационный метод, примененный к уравнению Фредгольма II рода и основанный на том, что электромагнитное поле на неоднородности изменяется относительно медленно [3]. В настоящей статье рассматривается применимость этого метода к решению систем интегральных уравнений Фредгольма I рода, возникающих в задачах расчета аномального электромагнитного поля в проводящей среде.

Постановка задачи. Пусть в однородном пространстве с диэлектрической проводимостью σ_0 и магнитной проницаемостью μ_0 расположено N различных цилиндрических тел. Обозначим области, занятые сечениями цилиндрических тел, S_j , а их границы C_j ($j=1, 2, \dots, N$) соответственно. Среду внутри S_j характеризуем параметрами σ_j, μ_j . Внешнюю ко всем областям S_j часть плоскости R^2 обозначим S_0 .

Задача поиска аномального электромагнитного поля состоит в следующем: в R^2 определить функцию $U(M)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta U + k^2(M)U = 0, \quad (1)$$

где $k(M)$ — кусочно-постоянная функция координат точки M :

$$k(M) = \begin{cases} k_j = \sqrt{i\omega \mu_j \sigma_j} & \text{при } M \in S_j (j=1, 2, \dots, N), \\ k_0 = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma_0} & \text{при } M \in S_0. \end{cases}$$

На контурах C_j выполнены граничные условия

$$[U]_{C_j} = 0, \quad \left[\gamma \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{C_j} = 0.$$

На бесконечности (при $r = \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty$) выполнены условия излучения для рассеянного поля. Заметим, что $U(M) = E_x(M)$, $\gamma = 1/\mu(M)$ для E -поляризованного поля; $U(M) = H_x(M)$, $\gamma = 1/\sigma(M)$ для H -поляризованного поля, а источники первичного поля $U_0(M)$ расположены в области S_0 , т. е. вне тел.

Введем фундаментальные решения уравнений Гельмгольца в R^2 с параметрами σ_j, μ_j ($j=1, 2, \dots, N$)

$$G_j(M, M_0) = \frac{i}{4} H_0^1(k_j r_{MM_0})$$

и фундаментальное решение

$$G(M, M_0) = \frac{i}{4} H_0^1(k_0 r_{MM_0}).$$

Следуя методу, изложенному в [1], представим поле $U(M)$ в виде

$$U(M) = U_0(M) + \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} Q_j^1(M_0) G(M, M_0) dl_{M_0} \quad \text{при } M \in S_0, \quad (2)$$

$$U(M) = \oint_{C_j} Q_j^2(M_0) G_j(M, M_0) dl_{M_0} \quad \text{при } M \in S_j,$$

где $Q_j^1(M)$, $Q_j^2(M)$ — некоторые фиктивные токи, заданные на наружной и внутренней сторонах поверхности цилиндра C_j .

Представленные таким образом поля удовлетворяют уравнению (1) вне и внутри цилиндрических тел, а также всем необходимым условиям, за исключением граничных условий на контурах C_j .

Подставим представления (2) в граничные условия на контурах при $M \in C_l$ ($l=1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{j=1}^N \oint_{C_j} Q_j^1(M_0) G(M, M_0) dl_{M_0} - \oint_{C_l} Q_l^2(M_0) G_l(M, M_0) dl_{M_0} = -U_0(M),$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_0 \pi \sum_{j=1}^N Q_j^1(M) + \gamma_l \pi Q_l^2(M) + \\
& + \gamma_0 \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} Q_j^1(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} - \\
& - \gamma_l \oint_{C_l} Q_l^2(M_0) \frac{\partial G_l(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} = -\gamma_0 \frac{\partial U_0(M)}{\partial n}.
\end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, получили систему $2N$ интегральных уравнений, заданных на контурах $C_j (j=1, 2, \dots, N)$. При выводе учитывается разрыв нормальной производной простого слоя, особенности ядер имеют вид

$$\begin{aligned}
G(M, M_0) & \sim \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}, \\
G_j(M, M_0) & \sim \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}, \quad j=1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Нечетные уравнения системы (3) являются уравнениями Фредгольма I рода с ядрами, имеющими логарифмическую особенность. Применив метод саморегуляризации, рассмотренный в [1], переходим к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j(M) \cdot Q_j^1(M) + \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} Q_j^1(M_0) \tilde{G}(M, M_0) dl_{M_0} - \\
& - \beta_l(M) Q_l^2(M) - \oint_{C_l} Q_l^2(M_0) \tilde{G}_l(M, M_0) dl_{M_0} = -U_0(M), \\
& \gamma_0 \pi \sum_{j=1}^N Q_j^1(M) + \gamma_0 \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} Q_j^1(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} + \\
& + \gamma_l \pi Q_l^2(M) - \gamma_l \oint_{C_l} Q_l^2(M_0) \frac{\partial G_l(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} = \\
& = -\gamma_0 \frac{\partial U_0(M)}{\partial n},
\end{aligned} \quad (4)$$

где

$$M \in C_l (l=1, 2, \dots, N),$$

$$\alpha_j(M) = \oint_{C_j} \hat{G}(M, M_0) dl_{M_0},$$

$$G(M, M_0) = \hat{G}(M, M_0) + \tilde{G}(M, M_0),$$

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2}{k_0 r_{MM_0}} + \frac{i}{4} - \frac{c}{2\pi} & \text{при } r < h_r \\ 0 & \text{при } r \geq h_r \end{cases}$$

$$\tilde{G}(M, M_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < h_r \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 r_{MM_0}) & \text{при } r \geq h_r \end{cases}$$

$C=0.577215665\dots$ — постоянная Эйлера,

$$\beta_l(M) = \oint_{C_l} \hat{G}_l(M, M_0) dl_{M_0},$$

$$G_j(M, M_0) = \hat{G}_j(M, M_0) + \tilde{G}_j(M, M_0),$$

функции $\hat{G}_j(M, M_0)$ и $\tilde{G}_j(M, M_0)$ имеют вид, аналогичный $\hat{G}(M, M_0)$ и $\tilde{G}(M, M_0)$.

Применим к системе уравнений (4) итерационный метод, предложенный в [3]:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \left(\alpha_j(M) + \oint_{C_j} \tilde{G}(M, M_0) dl_{M_0} \right) Q_j^{(n+1)}(M) - \\
& - \left(\beta_l(M) + \oint_{C_l} \tilde{G}_l(M, M_0) dl_{M_0} \right) \times \\
& \times Q_l^{(n+1)}(M) = -U_0(M) - \\
& - \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} (Q_j^{(n)}(M_0) - Q_j^{(n)}(M)) \tilde{G}(M, M_0) dl_{M_0} + \\
& + \oint_{C_l} (Q_l^{(n)}(M_0) - Q_l^{(n)}(M)) \tilde{G}_l(M, M_0) dl_{M_0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_0 \sum_{l=1}^N \left(\pi + \oint_{C_j} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} \right) \times \\ & \times Q_l^{1(n+1)}(M) + \gamma_l \left(\pi - \oint_{C_l} \frac{\partial G_l(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} \right). \quad (5) \\ & Q_l^{2(n+1)}(M) = -\gamma_0 \frac{\partial U_0(M)}{\partial n} - \gamma_0 \times \\ & \times \sum_{l=1}^N \oint_{C_j} (Q_l^{1(n)}(M_0) - Q_l^{2(n)}(M)) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} + \\ & + \gamma_l \oint_{C_l} (Q_l^{2(n)}(M_0) - Q_l^{1(n)}(M)) \frac{\partial G_l(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0}. \end{aligned}$$

$M \in C_l$ ($l=1, 2, \dots, N$).

Для исследования возможности и эффективности применения предлагаемого итерационного метода к решению такого класса задач рассматривается простейшая задача дифракции поля плоского источника на бесконечно протяженном вдоль оси x теле круглого сечения с проводимостью σ_r , расположенном в однородном пространстве с проводимостью σ_c .

Рассмотрим случай E -поляризации электромагнитного поля.

Электромагнитные колебания возбуждаются плоским E -поляризованным источником (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$):

1) плоская волна, $E_x^0(M) = E_{x1}^0 e^{ik_c z}$, $k_c = \sqrt{i\omega\mu\sigma_c}$, $\text{Im } k_c > 0$ (рис. 1, а);

2) бесконечный кабель, $E_x^0(M) = \frac{\omega\mu A_0}{\pi} H_0^{(1)}(k_c r_{MM_1})$, A_0 — сила тока в кабеле, M_1 — точка расположения кабеля (рис. 1, б). Векторы напряженности электромагнитного поля имеют вид

$$\mathbf{E} = \{E_x, 0, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{0, H_y, H_z\},$$

причем

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

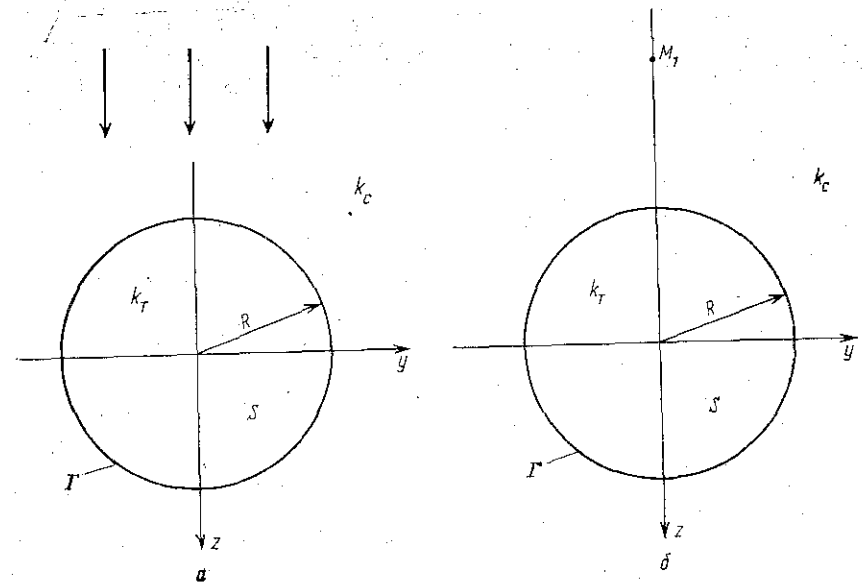


Рис. 1

В рассматриваемом случае система уравнений (5) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\alpha(M) + \oint_{\Gamma} G(M, M_0) dl_{M_0} \right) q_1^{(n+1)}(M) - \\ & - \left(\beta(M) + \oint_{\Gamma} G_1(M, M_0) dl_{M_0} \right) q_2^{(n+1)}(M) = \\ & = -E_x^0(M) - \oint_{\Gamma} (q_1^{(n)}(M_0) - q_1^{(n)}(M)) \tilde{G}(M, M_0) dl_{M_0} + \\ & + \oint_{\Gamma} (q_2^{(n)}(M_0) - q_2^{(n)}(M)) \tilde{G}_1(M, M_0) dl_{M_0}, \\ & \left(\pi + \oint_{\Gamma} \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} \right) q_1^{(n+1)}(M) + \\ & + \left(\pi - \oint_{\Gamma} \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} \right) q_2^{(n+1)}(M) = \\ & = -\frac{\partial E_x^0(M)}{\partial n} - \oint_{\Gamma} (q_1^{(n)}(M_0) - q_1^{(n)}(M)) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0} + \\ & + \oint_{\Gamma} (q_2^{(n)}(M_0) - q_2^{(n)}(M)) \frac{\partial G_1(M, M_0)}{\partial n_M} dl_{M_0}, \quad M \in \Gamma. \quad (6) \end{aligned}$$

На основе изложенного выше итерационного метода решения задачи дифракции поля плоского источника на двумерном проводящем теле круглого сечения был написан вычислительный алгоритм и составлена программа на ЭВМ, позволяющая рассчитывать фиктивные токи q_1 и q_2 , с помощью которых можно вычислить электромагнитное поле в любой точке пространства по формулам пересчета:

$$E_x(M) = E_x^0(M) + \frac{i}{4} \oint_{\Gamma} q_1(M_0) H_0^{(1)}(k_c r_{MM_0}) dl_{M_0}, \quad M \in S,$$

$$E_x(M) = \frac{i}{4} \oint_{\Gamma} q_2(M_0) H_0^{(1)}(k_c r_{MM_0}) dl_{M_0}, \quad M \in S.$$

Следует отметить, что номер итерации \mathcal{N} выбирался из следующего условия:

$$\max_{M \in \Gamma} \text{abs} \left(\frac{u^{(N)}(M) - u^{(N-1)}(M)}{u^{(N)}(M)} \right) \leq \varepsilon, \quad (7)$$

где $u(M) = (q_1(M), q_2(M))^T$.

Неравенство (7) является условием окончания процесса итераций при достижении нужной точности решения задачи.

Для исследования эффективности данного итерационного процесса было интересно сравнить полученное решение с другим решением задачи, вычисленным по методу, предполагающему сведение системы интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений [2]. Точность решения можно гарантировать, задав точность вычисления интегралов.

На основе проведенных расчетов было получено, что итерационный метод для задачи дифракции плоского поля на круглом проводящем цилиндре в обоих рассматриваемых случаях возбуждения электромагнитных колебаний дает решение, которое сходится к решению задачи.

В случае дифракции плоской волны был проведен ряд расчетов для оценки количества итераций \mathcal{N} от параметров задачи $\nu = \sqrt{\sigma_r/\sigma_c}$ и $\xi = \kappa_c R$, где $\kappa_c = \sqrt{\omega \mu \sigma_c/2}$. Полученные результаты представлены на рис. 2.

Можно отметить следующие факты:

1) чем $\xi = \kappa_c R$ больше, тем меньшее число итераций \mathcal{N} требуется для достижения желаемой точности решения задачи;

2) чем больше значение $\nu = \sqrt{\sigma_r/\sigma_c}$, тем количество итераций \mathcal{N} меньше.

В случае возбуждения электромагнитных колебаний полем бесконечного кабеля представлялось интересным получить зависимость количества итераций \mathcal{N} от расстояния ρ между центром неоднородности и точкой расположения кабеля (рис. 3).

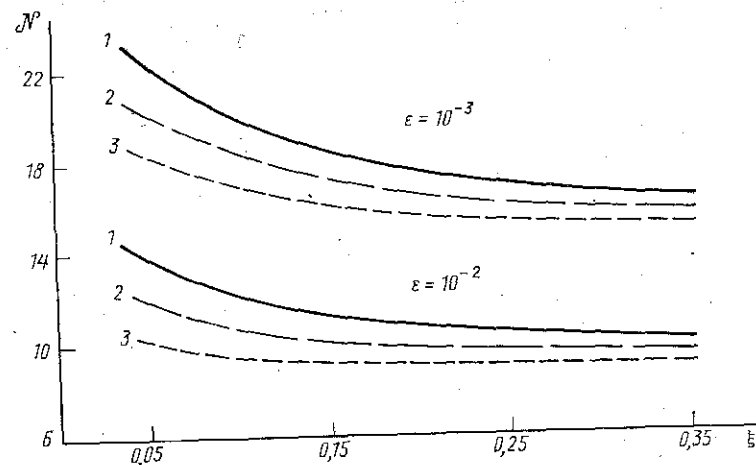


Рис. 2. Для кривой 1 $\nu=3$, для кривой 2 $\nu=5$, для кривой 3 $\nu=7$

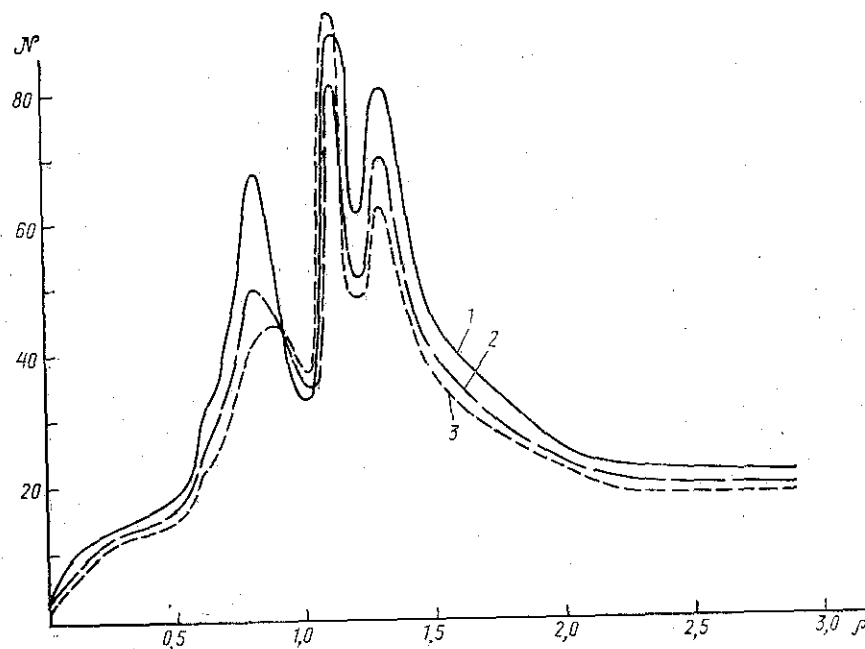


Рис. 3. Для кривой 1 $\nu=3$, для кривой 2 $\nu=5$, для кривой 3 $\nu=7$; $\xi=0.028$, $R=1$, $A_0=1$, $\varepsilon=10^{-2}$.

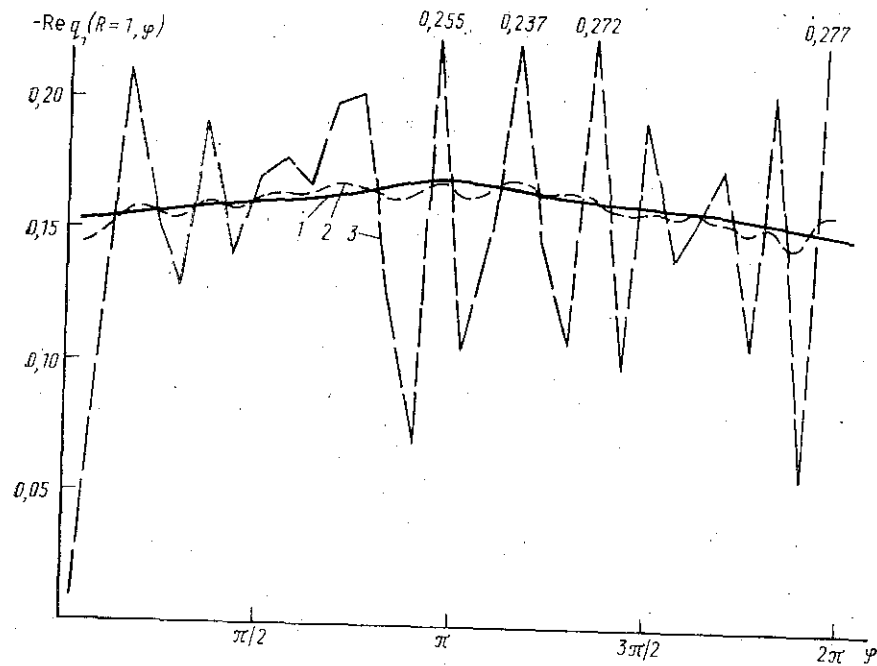


Рис. 4

В данном случае можно отметить, что при $\rho < 2R = 2$ количество итераций N резко увеличивается, т. е. применение итерационного метода для задачи дифракции поля бесконечного кабеля на круглом проводящем цилиндре эффективно для значений $\rho > 2R = 2$.

Для исследования вопроса, важна ли саморегуляризация при решении системы уравнений (3), был проведен ряд расчетов по описанному выше алгоритму с использованием метода саморегуляризации и алгоритму решения задачи без саморегуляризации, который получается из описанного внесением следующего изменения: $h = 0$, где h — параметр саморегуляризации.

Было получено, что если точность правой части системы уравнений (3) велика, то итерационный метод для задачи дифракции плоского поля на круглом проводящем цилиндре и без саморегуляризации дает решение, которое сходится к решению задачи.

Однако если правая часть системы уравнений известна не точно, т. е. $\tilde{F}(M) = F(M)(1 + 0.01 p \delta)$, где $F(M) = \left(-E_x^0(M), -\frac{\partial E_x^0(M)}{\partial n} \right)^T$, $-1 \leq \delta \leq 1$ — случайное число, p — целое число (процент ошибки), то в этом случае саморегуляризация важна.

На рис. 4 приводятся результаты решения задачи с применением метода саморегуляризации (кривая 2) и без саморегуляризации (кривая 3). Правая часть системы уравнений $\tilde{F}(M)$ известна с относительной ошибкой $p = 1\%$. Кривая 1 — график решения задачи с точно известной правой частью системы уравнений. (Для удобства графического представления рассмотрена действительная часть комплексной функции $q_1(M)$. Поведение функций $\text{Im} q_1(M)$, $\text{Re} q_2(M)$ и $\text{Im} q_2(M)$ аналогичное).

Следует отметить, что при решении задачи с использованием метода саморегуляризации необходимо согласовывать точность аппроксимации оператора (шаг разбиения h_0), параметр саморегуляризации h и относительную ошибку правой части p . В связи с этим параметр саморегуляризации должен быть выбран в соответствии со следующими условиями: $h \sim \sqrt{0.01p}$ и $h < h_0/2$.

Таким образом, в настоящей статье была проверена возможность применения итерационного процесса, предложенного в [3], к некоторому классу задач, при решении которых возникает система интегральных уравнений Фредгольма I рода, на примере решения простейшей задачи дифракции плоского поля на двумерном проводящем теле круглого сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. Метод интегральных уравнений при моделировании электромагнитных зондирований неоднородных сред // Вычислительные методы и программирование. Вып. 32. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 200—215.
3. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А., Седелъникова А. В. Итерационный метод в задаче дифракции плоского поля на двумерном проводящем теле прямоугольного сечения // Математические модели и вычислительные методы. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 156—161.

Е. Г. Салтыков

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ПОЛЯ ДИПОЛЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Расчету вертикальной составляющей электрического поля вертикального диполя на поверхности слоистой диэлектрической среды, когда расстояние r между точкой наблюдения и диполем достаточно велико ($r \rightarrow \infty$), посвящены статьи [1, 2]. В настоящей статье определяется асимптотика поля в трехслойной диэлектрической среде, когда частота диполя достаточно велика ($\omega \rightarrow \infty$).

Вертикальная составляющая электрического поля вертикального диполя с моментом I , когда точка наблюдения и диполь находятся на поверхности двухслойной диэлектрической среды, определяется по формулам [3]

$$E_z = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right),$$

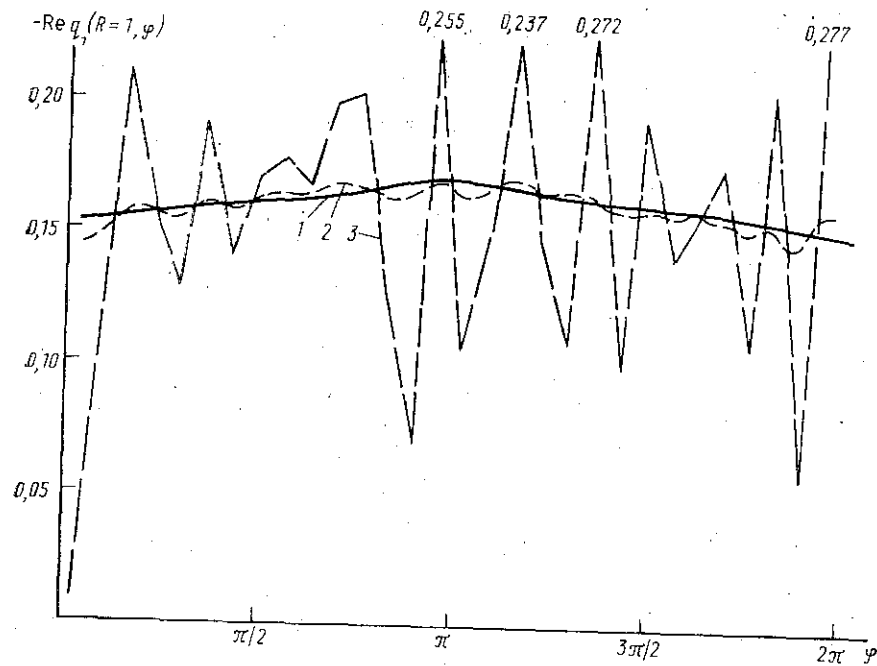


Рис. 4

В данном случае можно отметить, что при $\rho < 2R = 2$ количество итераций N резко увеличивается, т. е. применение итерационного метода для задачи дифракции поля бесконечного кабеля на круглом проводящем цилиндре эффективно для значений $\rho > 2R = 2$.

Для исследования вопроса, важна ли саморегуляризация при решении системы уравнений (3), был проведен ряд расчетов по описанному выше алгоритму с использованием метода саморегуляризации и алгоритму решения задачи без саморегуляризации, который получается из описанного внесением следующего изменения: $h = 0$, где h — параметр саморегуляризации.

Было получено, что если точность правой части системы уравнений (3) велика, то итерационный метод для задачи дифракции плоского поля на круглом проводящем цилиндре и без саморегуляризации дает решение, которое сходится к решению задачи.

Однако если правая часть системы уравнений известна не точно, т. е. $\tilde{F}(M) = F(M)(1 + 0.01 p \delta)$, где $F(M) = \left(-E_x^0(M), -\frac{\partial E_x^0(M)}{\partial n} \right)^T$, $-1 \leq \delta \leq 1$ — случайное число, p — целое число (процент ошибки), то в этом случае саморегуляризация важна.

На рис. 4 приводятся результаты решения задачи с применением метода саморегуляризации (кривая 2) и без саморегуляризации (кривая 3). Правая часть системы уравнений $\tilde{F}(M)$ известна с относительной ошибкой $p = 1\%$. Кривая 1 — график решения задачи с точно известной правой частью системы уравнений. (Для удобства графического представления рассмотрена действительная часть комплексной функции $q_1(M)$. Поведение функций $\text{Im} q_1(M)$, $\text{Re} q_2(M)$ и $\text{Im} q_2(M)$ аналогичное).

Следует отметить, что при решении задачи с использованием метода саморегуляризации необходимо согласовывать точность аппроксимации оператора (шаг разбиения h_0), параметр саморегуляризации h и относительную ошибку правой части p . В связи с этим параметр саморегуляризации должен быть выбран в соответствии со следующими условиями: $h \sim \sqrt{0.01p}$ и $h < h_0/2$.

Таким образом, в настоящей статье была проверена возможность применения итерационного процесса, предложенного в [3], к некоторому классу задач, при решении которых возникает система интегральных уравнений Фредгольма I рода, на примере решения простейшей задачи дифракции плоского поля на двумерном проводящем теле круглого сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. Метод интегральных уравнений при моделировании электромагнитных зондирований неоднородных сред // Вычислительные методы и программирование. Вып. 32. М.: Изд-во МГУ, 1980. С. 200—215.
3. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А., Седелникова А. В. Итерационный метод в задаче дифракции плоского поля на двумерном проводящем теле прямоугольного сечения // Математические модели и вычислительные методы. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 156—161.

Е. Г. Салтыков

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ПОЛЯ ДИПОЛЯ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Расчету вертикальной составляющей электрического поля вертикального диполя на поверхности слоистой диэлектрической среды, когда расстояние r между точкой наблюдения и диполем достаточно велико ($r \rightarrow \infty$), посвящены статьи [1, 2]. В настоящей статье определяется асимптотика поля в трехслойной диэлектрической среде, когда частота диполя достаточно велика ($\omega \rightarrow \infty$).

Вертикальная составляющая электрического поля вертикального диполя с моментом I , когда точка наблюдения и диполь находятся на поверхности двухслойной диэлектрической среды, определяется по формулам [3]

$$E_z = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right),$$

$$A_2 = \frac{H\mu_0}{4\pi\epsilon_0} G_1,$$

$$G_1 = \int_0^{\infty} J_0(ts) u(t, \omega) t dt, \quad (1)$$

где

$$u = \frac{2\epsilon_1 k_0}{\alpha_1 Z + \delta_1 \alpha_0},$$

$$Z = \frac{1 - \rho e^{-2H\alpha_1}}{1 + \rho e^{-2H\alpha_1}},$$

$$\rho = \frac{\delta_2 \alpha_1 - \delta_1 \alpha_2}{\delta_2 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_2},$$

$$\alpha_0 = \sqrt{t^2 - 1}, \quad \alpha_1 = \sqrt{t^2 - \delta_1}, \quad \alpha_2 = \sqrt{t^2 - \delta_2},$$

$$s = k_0 r, \quad H = k_0 h, \quad k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0},$$

$$\delta_1 = \epsilon_1 / \epsilon_0, \quad \delta_2 = \epsilon_2 / \epsilon_0.$$

Здесь ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость верхнего полупространства, μ_0 — его магнитная проницаемость, h — толщина первого слоя нижнего полупространства, ϵ_1 — его диэлектрическая проницаемость, ϵ_2 — диэлектрическая проницаемость второго слоя нижнего полупространства, μ_0 — магнитная проницаемость нижнего полупространства.

В [4] для вычисления потенциала поля питающего электрода в случае двухслойной модели земли сомножитель при функции $J_0(\lambda r)$ в подынтегральном выражении для поля разлагается в ряд. Аналогично для нахождения асимптотики интеграла (1) при $\omega \rightarrow \infty$ разложим функцию u в ряд. Для этого представим u в виде

$$u(t, \omega) = \frac{2\epsilon_1 k_0}{\alpha_1 + \delta_1 \alpha_0} \cdot \frac{1 + \rho e^{-2H\alpha_1}}{1 - \rho \rho_1 e^{-2H\alpha_1}},$$

где

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1 - \delta_1 \alpha_0}{\alpha_1 + \delta_1 \alpha_0}.$$

Так как

$$|\rho| < 1, \quad |\rho_1| < 1, \quad |e^{-2H\alpha_1}| \leq 1,$$

имеем

$$u = A \left(\sum_{m=0}^{\infty} q^m e^{-2H\alpha_1 m} + \rho \sum_{m=0}^{\infty} q^m e^{-2H\alpha_1(m+1)} \right),$$

где

$$A = \frac{2\epsilon_1 k_0^3}{\alpha_1 + \delta_1 \alpha_0}, \quad q = \rho \rho_1.$$

Для функции G_1 получаем

$$G_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} J_0(ts) e^{-2H\alpha_1 m} a_m(t) dt + \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} J_0(ts) e^{-2H\alpha_1(m+1)} b_m(t) dt, \quad (2)$$

где

$$a_m(t) = A q^m t,$$

$$b_m(t) = \rho A q^m t.$$

Для нахождения асимптотики функции G_1 при $\omega \rightarrow \infty$ нужно найти асимптотику интегралов вида

$$I_l = \int_0^{\infty} J_0(tk_0 r) e^{-2k_0 h \alpha_1 t} d_l(t) dt.$$

Воспользуемся асимптотикой для функции

$$J_0(tk_0 r)$$

при $k_0 \rightarrow \infty$. Функция

$$J_0(tk_0 r) e^{-2k_0 h \alpha_1 t}$$

быстро осциллирует при $t^2 - \delta_1 < 0$, при $t^2 - \delta_1 > 0$ экспоненциально убывает, а функция $d_l(t)$ меняется медленно.

Асимптотика интеграла I_l определяется суммой вкладов в интеграл окрестностей точек, в которых фаза φ стационарна — $\partial\varphi/\partial t = 0$, и окрестностей точек, в которых подынтегральная функция или ее производные разрывны [5]. Найдем вклад в асимптотику I_l окрестности точки стационарной фазы:

$$t_l = \sqrt{\delta_1} \frac{r}{R_l},$$

где

$$R_l = \sqrt{r^2 + (2lh)^2}.$$

Фаза

$$\varphi = k_0 (tr + 2hl \sqrt{\delta_1 - t^2})$$

при $t = t_l$ принимает значение

$$\varphi(t_l) = k_0 \sqrt{\delta_1} R_l.$$

В окрестностях точек $t=0$, $t=+1$, $t=+\sqrt{\delta_1}$, $t=+\sqrt{\delta_2}$ подынтегральная функция или ее производные имеют разрыв. Можно показать, что вклад окрестности точки $t=0$ равен нулю, а вклад окрестностей точек $t=+1$, $t=+\sqrt{\delta_1}$, $t=+\sqrt{\delta_2}$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с окрестностью точки стационарной фазы.

Окончательно получаем, что асимптотика интеграла I_l определяется формулой

$$I_l = -ie^{i\varphi(t_l)} d_l(t_l) / \sqrt{k_0 r |\varphi''(t_l)|}, \quad (3)$$

где

$$\varphi''(t_l) = -k_0 \frac{R_l^2}{\sqrt{\delta_1(2lh)^2}} < 0.$$

Заметим, что интеграл I_l при $l=0$ не имеет точки стационарной фазы. Используя формулу (3) и объединяя две суммы в (2) в одну, окончательно получаем асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$ функции G_1

$$G_1 = -\frac{i}{\sqrt{k_0 r}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi(t_m)}}{\sqrt{|\varphi''(t_m)|}} (1 + \rho_1^{-1}(t_m)) q^m(t_m) \sqrt{l_m} A(t_m).$$

Можно показать, что полученный ряд для функции G_1 сходится. При $m \rightarrow \infty$ общий член имеет порядок p^m/m ($p < 1$).

Таким образом, в статье предложен метод асимптотического вычисления поля вертикального диполя в диэлектрической трехслойной среде при $\omega \rightarrow \infty$. Этот метод может быть применен для диэлектрических слоистых сред с большим числом слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численное исследование поля вертикального диполя в слоистой диэлектрической среде // Электромагнитные зондирования Земли и Луны. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 14—22.
2. Ваньян Л. Л., Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численное исследование возможностей зондирования Луны по измерениям поля вертикального электрического диполя // Электромагнитные зондирования Земли и Луны. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 23—35.
3. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.
4. Уэйт Дж. Р. Геоматетизм. М.: Недра, 1987.
5. Focke I. Asymptotische Entwicklungen Mittels der Methode der stationären Phase. Berlin: Akad. — Verl., 1954.

Н. И. Березина

О ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ АСИМПТОТИКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Использование мощных искусственных источников электромагнитного поля для низкочастотных зондирований Земли позволяет

в настоящее время измерять электромагнитное поле на расстояниях от источника, сравнимых с длиной волны в воздухе. Так как численное исследование электромагнитного поля на больших расстояниях от источника связано с вычислительными трудностями, представляет интерес получение асимптотических формул для компонент поля.

Исследованию асимптотического поведения электромагнитного поля в слоистых средах посвящен ряд работ [1—7]. При этом обычно выделяют две асимптотические области — дальнюю зону, где выполнены соотношения $k_0 R \ll 1$, $kR \gg 1$ (k_0 , k — волновые числа в воздухе и среде соответственно, R — расстояние до источника) и допустимо применение квазистационарного приближения для уравнений Максвелла [1—3], и волновую зону, где $k_0 R \gg 1$ [4—5].

В настоящей работе для компонент электромагнитного поля бесконечного кабеля, лежащего на поверхности слоистой проводящей среды, получены асимптотические выражения, справедливые во всей области, где расстояние от источника велико по сравнению с длиной волны в среде, в том числе в дальней и волновой зонах.

Рассмотрим одномерную математическую модель строения среды, состоящую из конечного числа слоев с постоянными значениями проводимости в каждом слое, лежащих на проводящем подстилающем основании с проводимостью σ_N . Источником электромагнитного поля является бесконечный кабель, параллельный оси Ox , проходящий через точку $y=0$, $z=0$ и возбуждающий в среде гармоническое электромагнитное поле с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Плоскость $z=0$ совпадает с поверхностью слоистой среды. В области $z > 0$ волновое число $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$; в области $z < 0$ волновое число $k^2(z) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + i\omega \mu_0 \sigma(z)$. $\sigma(z) > 0$; $k(z) = k_N$ при $z \gg H$.

В области над источником отличны от нуля три компоненты электромагнитного поля, которые имеют следующий вид:

$$E_x = i\omega \mu_0 \int_0^{\infty} \frac{2e^{-\eta_0 z}}{\eta_0 + Y(\eta_0)} \cos \lambda y d\lambda,$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (1)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

где $\eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, $\text{Re } \eta_0 \geq 0$.

Функция $Y(\eta_0) = y(\eta_0, 0)$, где $y(\eta_0, z)$ — решение задачи Коши

$$y'_z(\eta_0, z) + y^2(\eta_0, z) = \lambda^2 - k^2(z) \quad (2)$$

В окрестностях точек $t=0$, $t=+1$, $t=+\sqrt{\delta_1}$, $t=+\sqrt{\delta_2}$ подынтегральная функция или ее производные имеют разрыв. Можно показать, что вклад окрестности точки $t=0$ равен нулю, а вклад окрестностей точек $t=+1$, $t=+\sqrt{\delta_1}$, $t=+\sqrt{\delta_2}$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с окрестностью точки стационарной фазы.

Окончательно получаем, что асимптотика интеграла I_l определяется формулой

$$I_l = -ie^{i\varphi(t_l)} d_l(t_l) / \sqrt{k_0 r |\varphi''(t_l)|}, \quad (3)$$

где

$$\varphi''(t_l) = -k_0 \frac{R_l^2}{\sqrt{\delta_1(2lh)^2}} < 0.$$

Заметим, что интеграл I_l при $l=0$ не имеет точки стационарной фазы. Используя формулу (3) и объединяя две суммы в (2) в одну, окончательно получаем асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$ функции G_1

$$G_1 = -\frac{i}{\sqrt{k_0 r}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi(t_m)}}{\sqrt{|\varphi''(t_m)|}} (1 + \rho_1^{-1}(t_m)) q^m(t_m) \sqrt{l_m} A(t_m).$$

Можно показать, что полученный ряд для функции G_1 сходится. При $m \rightarrow \infty$ общий член имеет порядок p^m/m ($p < 1$).

Таким образом, в статье предложен метод асимптотического вычисления поля вертикального диполя в диэлектрической трехслойной среде при $\omega \rightarrow \infty$. Этот метод может быть применен для диэлектрических слоистых сред с большим числом слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численное исследование поля вертикального диполя в слоистой диэлектрической среде // Электромагнитные зондирования Земли и Луны. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 14—22.
2. Ваньян Л. Л., Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численное исследование возможностей зондирования Луны по измерениям поля вертикального электрического диполя // Электромагнитные зондирования Земли и Луны. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 23—35.
3. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.
4. Уэйт Дж. Р. Геоматетизм. М.: Недра, 1987.
5. Focke I. Asymptotische Entwicklungen Mittels der Methode der stationären Phase. Berlin: Akad. — Verl., 1954.

Н. И. Березина

О ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ АСИМПТОТИКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Использование мощных искусственных источников электромагнитного поля для низкочастотных зондирований Земли позволяет

в настоящее время измерять электромагнитное поле на расстояниях от источника, сравнимых с длиной волны в воздухе. Так как численное исследование электромагнитного поля на больших расстояниях от источника связано с вычислительными трудностями, представляет интерес получение асимптотических формул для компонент поля.

Исследованию асимптотического поведения электромагнитного поля в слоистых средах посвящен ряд работ [1—7]. При этом обычно выделяют две асимптотические области — дальнюю зону, где выполнены соотношения $k_0 R \ll 1$, $kR \gg 1$ (k_0, k — волновые числа в воздухе и среде соответственно, R — расстояние до источника) и допустимо применение квазистационарного приближения для уравнений Максвелла [1—3], и волновую зону, где $k_0 R \gg 1$ [4—5].

В настоящей работе для компонент электромагнитного поля бесконечного кабеля, лежащего на поверхности слоистой проводящей среды, получены асимптотические выражения, справедливые во всей области, где расстояние от источника велико по сравнению с длиной волны в среде, в том числе в дальней и волновой зонах.

Рассмотрим одномерную математическую модель строения среды, состоящую из конечного числа слоев с постоянными значениями проводимости в каждом слое, лежащих на проводящем подстилающем основании с проводимостью σ_N . Источником электромагнитного поля является бесконечный кабель, параллельный оси Ox , проходящий через точку $y=0$, $z=0$ и возбуждающий в среде гармоническое электромагнитное поле с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Плоскость $z=0$ совпадает с поверхностью слоистой среды. В области $z > 0$ волновое число $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$; в области $z < 0$ волновое число $k^2(z) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + i\omega \mu_0 \sigma(z)$. $\sigma(z) > 0$; $k(z) = k_N$ при $z \gg H$.

В области над источником отличны от нуля три компоненты электромагнитного поля, которые имеют следующий вид:

$$E_x = i\omega \mu_0 \int_0^{\infty} \frac{2e^{-\eta_0 z}}{\eta_0 + Y(\eta_0)} \cos \lambda y d\lambda,$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (1)$$

$$H_z = \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

где $\eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$, $\text{Re } \eta_0 \geq 0$.

Функция $Y(\eta_0) = y(\eta_0, 0)$, где $y(\eta_0, z)$ — решение задачи Коши

$$y'_z(\eta_0, z) + y^2(\eta_0, z) = \lambda^2 - k^2(z) \quad (2)$$

с начальным условием

$$y(\eta_0, H) = \sqrt{\lambda^2 - k_N^2}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k_N^2} \geq 0$$

и условиями непрерывности $y(\eta_0, z)$ на границах разрыва $k(z)$.

Подынтегральная функция $f(\eta_0) = \frac{2}{\eta_0 + Y(\eta_0)}$ в (1) является четной функцией λ и имеет на действительной оси единственную особую точку $\lambda = k_0$, которая является точкой ветвления [8].

Используя разложение функции $f(\eta_0)$ в ряд по степеням η_0 [5]

$$f(\eta_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \eta_0^j, \quad (3)$$

для интеграла

$$I(y, z=0) = \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{2e^{-\eta_0 z}}{\eta_0 + Y(\eta_0)} \cos \lambda y d\lambda$$

имеем следующее асимптотическое разложение:

$$I(y, z=0) \cong \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} J_{2m+1}(y, z=0), \quad (4)$$

где

$$J_{2m+1}(y, z) = \int_0^{\infty} \eta_0^{2m+1} e^{-\eta_0 z} \cos \lambda y d\lambda, \quad (5)$$

и вычисляются в явном виде через функции Ханкеля, в частности

$$J_{-1}(y, z=0) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k_0 r), \quad (6)$$

$$J_1(y, z=0) = -\frac{\pi i}{2} \frac{k_0}{r} H_1^{(1)}(k_0 r), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

При $m \geq 1$, $J_{2m+1}(y, z=0)$ могут быть вычислены по следующей рекуррентной формуле:

$$J_{2m+1}(y, z=0) = \frac{1}{r^2} \{2m(2m+1)J_{2m-1} + (2m-1)(2m+1)k_0^2 J_{2m-3}\}. \quad (7)$$

Так как $H_0^{(1)}(k_0 r)$ и $H_1^{(1)}(k_0 r)$ — функции, ограниченные в интервале (ε, ∞) , где ε — любое положительное число, то из (7) следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$J_{2m+1}(y, z=0) = O\left(\frac{1}{r^{m+1}}\right), \quad m \geq 0. \quad (8)$$

Покажем, что при действительном k_0 справедливо соотношение

$$I(y, z=0) = \sum_{m=0}^{m_0} \alpha_{2m+1} J_{2m+1}(y, z=0) + O\left(\frac{1}{r_0^{m_0+2}}\right). \quad (9)$$

В самом деле, в окрестности $\lambda = k_0$ функция

$$v(\eta_0) = \frac{2}{\eta_0 + Y(\eta_0)} - \sum_{j=0}^{2m_0+1} \alpha_j \eta_0^j = q(\lambda) \eta_0^{2m_0+2}, \quad (10)$$

где $q(\lambda)$ — непрерывная функция, имеющая при $\lambda \neq k_0$ производные любого порядка. Разобьем отрезок интегрирования на три интервала $(0, k_0 - \delta)$, $(k_0 - \delta, k_0 + \delta)$, $(k_0 + \delta, \infty)$, где δ — сколь угодно малое положительное число. Используя (8) и малость δ для оценки интеграла в окрестности $(k_0 - \delta, k_0 + \delta)$ и известную оценку для преобразования Фурье дифференцируемой функции [9], получим требуемую оценку (9).

Покажем теперь, что для коэффициентов α_j в разложении (3) справедлива оценка

$$\alpha_j = O\left(\frac{1}{x^{j+1}}\right), \quad j \geq 0, \quad (11)$$

где

$$x = \min \left\{ |x_N|, \left| \frac{1}{H} \int_0^H \sqrt{k_0^2 - k^2(z)} dz \right| \right\},$$

$$x_N = \sqrt{k_0^2 - k_N^2}, \quad \operatorname{Re} x_N \geq 0.$$

Для этого сделаем аналогичную оценку коэффициентов разложения функции $y(\eta_0, z)$:

$$y(\eta_0, z) \cong \sum_{m=0}^{\infty} y_{2m}(z) \eta_0^{2m}. \quad (12)$$

Можно показать, что коэффициенты $y_{2m}(z)$ в (12) являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} y_0'(z) + y_0^2(z) = k_0^2 - k^2(z), \\ y_0(H) = x_N, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} y_2'(z) + 2y_0(z)y_2(z) = 1, \\ y_2(H) = \frac{1}{2x_N}, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} y_{2m}'(z) + 2y_0(z)y_{2m}(z) = f_{2m}(z), \\ y_{2m}(H) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-3) \cdot \frac{1}{x_N^{2m-1}}, \\ m \geq 2 \end{cases} \quad (15)$$

где

$$f_{2m}(z) = - \sum_{\substack{i+j=m \\ i,j \geq 1}} \xi_{ij} y_{2i}(z) y_{2j}(z), \quad \xi_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 2, & i \neq j. \end{cases}$$

Используя известное представление для решения задач (13)—(15)

$$y_{2m}(z) = - \int_z^H f_{2m}(t) e^{c \int_z^t y_0(\tau) d\tau} dt + y_0(H) e^{c \int_z^H y_0(\tau) d\tau}, \quad (16)$$

где

$$c = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \geq 1, \end{cases}$$

и тот факт, что $\operatorname{Re} y_0(z) < 0$, можно показать, что

$$\int_0^H e^{\int_0^t y_0(\tau) d\tau} dt = O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (17)$$

Тогда из (13)—(16) имеем

$$\begin{aligned} y_0(z) &= O(x), \\ y_{2m}(z) &= O\left(\frac{1}{x^{2m-1}}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

откуда для коэффициентов α_j разложения функции $f(\eta_0)$ следует оценка (11).

Из (9) с учетом (11) имеем

$$I(y, z=0) = \sum_{m=0}^{m_0} \alpha_{2m+1} J_{2m+1}(y, z=0) + O\left(\frac{1}{(xr)^{m_0+2}}\right). \quad (19)$$

Таким образом, асимптотическое разложение (19) справедливо при условии, что $xr \gg 1$, т. е. на расстояниях от источника, больших по сравнению со «средней» длиной волны в слоистой среде.

Выпишем первые члены асимптотического разложения для компонент электромагнитного поля (1). Из (13)—(15) имеем

$$f(\eta_0) = \frac{2}{y_0(0)} - \frac{2}{y_0^2(0)} \eta_0 + \frac{2}{y_0(0)} \left(-\frac{y_2(0)}{y_0(0)} + \frac{1}{y_0^2(0)} \right) \eta_0^2 + \dots, \quad (20)$$

где $y_0(0)$ — решение задачи Коши (13). Как следует из (13), $y_0(0)$ с точностью до множителя $i\omega\mu_0$ совпадает с адмитансом плоской волны, нормально падающей на слоистую среду, отвечающим квазистационарному приближению для электромагнитного поля.

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\pi\omega\mu_0 k_0}{y_0^2(0) r} H_1^{(1)}(k_0 r) + O\left(\frac{1}{(xr)^2}\right), \\ H_y &= \frac{\pi i}{y_0(0) r} k_0 H_1^{(1)}(k_0 r) + O\left(\frac{1}{(xr)^2}\right), \\ H_z &= \frac{\pi i}{y_0^2(0) r} k_0^2 H_2^{(1)}(k_0 r) + O\left(\frac{1}{(xr)^2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) имеем

$$E_x / H_y \approx \frac{i\omega\mu_0}{y_0(0)} = Z(\omega), \quad (22)$$

где $Z(\omega)$ — квазистационарный импеданс нормально падающей плоской волны. Таким образом, на расстояниях от источника, больших по сравнению со «средней» длиной волны в среде, импеданс электромагнитного поля кабеля на поверхности земли хорошо аппроксимируется полем плоской волны, что согласуется с известными результатами [10].

В таблице приведены минимальные значения расстояний от источника, при которых значения компонент электромагнитного поля, вычисленные по точным формулам (1) с использованием процедуры численного интегрирования, с точностью до 1% совпадают со значениями компонент поля, вычисленными по асимптотическим формулам (21), для кабеля, лежащего на полупространстве с проводимостью σ_E . Для всех приведенных в таблице моделей среды сравнение расчетов для точных и асимптотических формул было проведено для расстояний от источника порядка $k_0 r \sim 2 \div 10$. Во всем диапазоне расстояний было получено совпадение результатов, точность которого быстро возрастала по мере удаления от источника.

В таблице приведены также минимальные расстояния, для которых при точных расчетах отношение E_x/H_y с точностью до 1% совпадает с импедансом плоской волны.

Таблица

| $\frac{\sigma E}{1}$ [ом·м] | γ [гц] | Выход на асимптотику | | Выход на импеданс плоской волны | |
|--------------------------------|------------------|----------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
| | | k_{gr} | kr | k_{gr} | kr |
| 1 | 3,2 204,8 | 0,0002 0,002 | 15,1 20,1 | 0,0007 0,002 | 5,0 20,1 |
| 0,01 | 3,2 204,8 | 0,001 0,003 | 8,0 20,1 | 0,001 0,002 | 8,0 12,1 |
| 0,0001 | 3,2 204,8 | 0,02 0,14 | 12,9 12,9 | 0,02 0,14 | 12,9 12,9 |

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность В. И. Дмитриеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1959. № 7. С. 946—955.
2. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1961. № 1. С. 107—110.
3. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. // Изв. АН СССР. Сер. физика Земли. 1970. № 2. С. 44—51.
4. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных М.: ИЛ, 1950.
5. Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численное исследование поля вертикального диполя в слоистой диэлектрической среде // Электромагнитные зондирования Земли и Луны. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 14—22.
6. Красовский Ю. П., Щепкин Г. Г. // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 3: С. 705—717.
7. Щепкин Г. Г. // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 3. С. 548—558.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978.
9. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
10. Леонтович М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. М.; Л., 1948. С. 47—56.

В. И. Дмитриев, Н. И. Несмеянова

**МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ
НИЗКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

К трехмерным моделям, наиболее полно отражающим реальную физическую ситуацию, относятся такие, которые учитывают неоднородную структуру вмещающей среды, произвольные трехмерные включения в ней. Численное исследование таких моделей наталкивается на значительные трудности. В то же время в низкочастотной электродинамике можно выделить достаточно широкий

класс моделей проводящих сред, в рамках которых можно учесть влияние слоистых сред с произвольным числом локальных включений. Тела однородны, не пересекают границ слоев и сами не пересекаются.

В проводящих средах для затухающих полей может быть применен метод последовательных приближений, когда задача решается сначала для одного тела, а влияние других тел и их взаимодействие учитывается итерациями. Этот метод достаточно хорошо сходится, а время решения задачи зависит от числа итераций и скорости счета одного шага итерации. Рассмотрим один из алгоритмов решения задачи [1].

Пусть имеется горизонтально-однородная слоистая среда с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(M)$ и проводимостью $\sigma(M)$, которые являются функциями координаты z в декартовой системе координат (x, y, z) , введенной так, чтобы границы слоев совпадали с плоскостями $z = \text{const}$. В слоистой среде произвольно расположены однородные тела V_l с волновыми числами k_l , ограниченные гладкими поверхностями Q_l ($l=1, \dots, L$). В среде возбуждается гармоническое во времени электромагнитное поле ($e^{-i\omega t}$), источники которого расположены вне тел, в области Q^p .

Требуется определить векторы напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , удовлетворяющие системе уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \bar{\epsilon}(M) \mathbf{E} + \mathbf{j}, \quad \bar{\epsilon}(M) = \epsilon(M) + i \frac{\sigma(M)}{\omega}, \end{aligned} \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных компонент поля на всех границах разрыва проводимости $\sigma(M)$ и условиям на бесконечности в проводящих средах

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \mathbf{E} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \mathbf{H} = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть известны тензоры Грина $\hat{G}_E(M, M_0)$ и $\hat{G}_H(M, M_0)$ системы уравнений Максвелла для горизонтально-слоистой среды с $\bar{\epsilon}_n(z)$. \hat{G}_E и \hat{G}_H удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } \hat{G}_E = i\omega \mu \hat{G}_H, \\ \text{rot } \hat{G}_H = -i\omega \bar{\epsilon}_n \hat{G}_E + \hat{\delta}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \delta \text{ — дельта-функция.}$$

Если внутри каждого тела переписать (1) в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \bar{\epsilon}_n \mathbf{E} + \mathbf{j} + i\omega (\bar{\epsilon}_n - \bar{\epsilon}_l) \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (3)$$

Таблица

| $\frac{\sigma E}{1}$ [ом·м] | γ [гц] | Выход на асимптотику | | Выход на импеданс плоской волны | |
|--------------------------------|------------------|----------------------|--------------|---------------------------------|--------------|
| | | k_{gr} | kr | k_{gr} | kr |
| 1 | 3,2 204,8 | 0,0002 0,002 | 15,1 20,1 | 0,0007 0,002 | 5,0 20,1 |
| 0,01 | 3,2 204,8 | 0,001 0,003 | 8,0 20,1 | 0,001 0,002 | 8,0 12,1 |
| 0,0001 | 3,2 204,8 | 0,02 0,14 | 12,9 12,9 | 0,02 0,14 | 12,9 12,9 |

В заключение автор пользуется возможностью выразить благодарность В. И. Дмитриеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1959. № 7. С. 946—955.
2. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1961. № 1. С. 107—110.
3. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. // Изв. АН СССР. Сер. физика Земли. 1970. № 2. С. 44—51.
4. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных М.: ИЛ, 1950.
5. Дмитриев В. И., Федорова Э. А. Численное исследование поля вертикального диполя в слоистой диэлектрической среде // Электромагнитные зондирования Земли и Луны. М.: Изд-во МГУ, 1975. С. 14—22.
6. Красовский Ю. П., Щепкин Г. Г. // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 3: С. 705—717.
7. Щепкин Г. Г. // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 3. С. 548—558.
8. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978.
9. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
10. Леонтович М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. М.; Л., 1948. С. 47—56.

В. И. Дмитриев, Н. И. Несмеянова

**МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ
НИЗКОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

К трехмерным моделям, наиболее полно отражающим реальную физическую ситуацию, относятся такие, которые учитывают неоднородную структуру вмещающей среды, произвольные трехмерные включения в ней. Численное исследование таких моделей наталкивается на значительные трудности. В то же время в низкочастотной электродинамике можно выделить достаточно широкий

класс моделей проводящих сред, в рамках которых можно учесть влияние слоистых сред с произвольным числом локальных включений. Тела однородны, не пересекают границ слоев и сами не пересекаются.

В проводящих средах для затухающих полей может быть применен метод последовательных приближений, когда задача решается сначала для одного тела, а влияние других тел и их взаимодействие учитывается итерациями. Этот метод достаточно хорошо сходится, а время решения задачи зависит от числа итераций и скорости счета одного шага итерации. Рассмотрим один из алгоритмов решения задачи [1].

Пусть имеется горизонтально-однородная слоистая среда с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(M)$ и проводимостью $\sigma(M)$, которые являются функциями координаты z в декартовой системе координат (x, y, z) , введенной так, чтобы границы слоев совпадали с плоскостями $z = \text{const}$. В слоистой среде произвольно расположены однородные тела V_l с волновыми числами k_l , ограниченные гладкими поверхностями Q_l ($l=1, \dots, L$). В среде возбуждается гармоническое во времени электромагнитное поле ($e^{-i\omega t}$), источники которого расположены вне тел, в области Q^p .

Требуется определить векторы напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , удовлетворяющие системе уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \tilde{\epsilon}(M) \mathbf{E} + \mathbf{j}, \quad \tilde{\epsilon}(M) = \epsilon(M) + i \frac{\sigma(M)}{\omega}, \quad (1)$$

условиям непрерывности касательных компонент поля на всех границах разрыва проводимости $\sigma(M)$ и условиям на бесконечности в проводящих средах

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \mathbf{E} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \mathbf{H} = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть известны тензоры Грина $\hat{G}_E(M, M_0)$ и $\hat{G}_H(M, M_0)$ системы уравнений Максвелла для горизонтально-слоистой среды с $\tilde{\epsilon}_n(z)$. \hat{G}_E и \hat{G}_H удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } \hat{G}_E = i\omega \mu \hat{G}_H, \\ \text{rot } \hat{G}_H = -i\omega \tilde{\epsilon}_n \hat{G}_E + \hat{\delta}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \delta \text{ — дельта-функция.}$$

Если внутри каждого тела переписать (1) в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \tilde{\epsilon}_n \mathbf{E} + \mathbf{j} + i\omega (\tilde{\epsilon}_n - \tilde{\epsilon}_l) \mathbf{E}, \quad (3)$$

решение системы (1) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}^0(M) + i\omega \sum_{l=1}^L \iiint_{V_l} (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_l) \hat{G}_E(M, M_0) \mathbf{E}_l(M_0) dv_{M_0}, \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(M) = \mathbf{H}^0(M) + i\omega \sum_{l=1}^L \iiint_{V_l} (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_l) \hat{G}_H(M, M_0) \mathbf{E}_l(M_0) dv_{M_0}.$$

При решении (4) может быть применен итерационный процесс (s — номер итерации)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l^{(s)} - i\omega \iiint_{V_l} (\tilde{\varepsilon}_n - \tilde{\varepsilon}_l) \hat{G}_E \mathbf{E}_l^{(s)} dv_{M_0} = \mathbf{E}^0 + i\omega \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^L \iiint_{V_q} (\tilde{\varepsilon}_n - \\ - \tilde{\varepsilon}_q) \hat{G}_E \mathbf{E}_q^{(s-1)} dv_{M_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, для рассматриваемого класса моделей вычисление одной итерации сводится к решению задачи дифракции на одном теле, расположенном в слоистой среде. Эти задачи являются трехмерными и векторными и требуют применения тензорного аппарата. Были развиты методы решения, разработаны и реализованы алгоритмы на основе метода интегральных уравнений [1, 2].

В то же время на низких частотах в проводящих средах можно изучать основные закономерности поведения электромагнитных полей, проведя некоторое сглаживание поверхностей включений, чтобы их можно было заменить телами вращения. Это позволяет перейти в класс моделей сред, обладающих симметрией вращения, и использовать для решения задачи развитые там методики.

В настоящей работе развит итерационный подход для решения граничных задач низкочастотной электродинамики с произвольным числом локальных тел вращения в слоистой среде. При этом вычисление одной итерации проводится на основе метода численного решения задач электродинамики неоднородных сред с симметрией вращения, предложенного в работах [3, 4]. Оси вращения тел выбираются таким образом, чтобы при вычислении одной итерации — решении задачи на одном теле вращения — рассматривалась задача для класса сред, обладающих симметрией вращения. Так, например, если вмещающая среда однородна, то тела ориентированы произвольно (рис. 1). Если вмещающая среда плоскопараллельная, то оси вращения тел z_l параллельны оси OZ , связанной со слоистой средой (рис. 2).

Таким образом, на каждом шаге итерации решается задача дифракции произвольного поля на одном теле вращения, расположенном в слоистой среде. Методом работы [5] трехмерная векторная задача сведена к скалярным задачам относительно m -х гармоник азимутальных компонент поля. Построены матрицы фундаментальных решений (МФР) для однородной среды [5] и для плоскопараллельной слоистой среды [4], с использованием которых

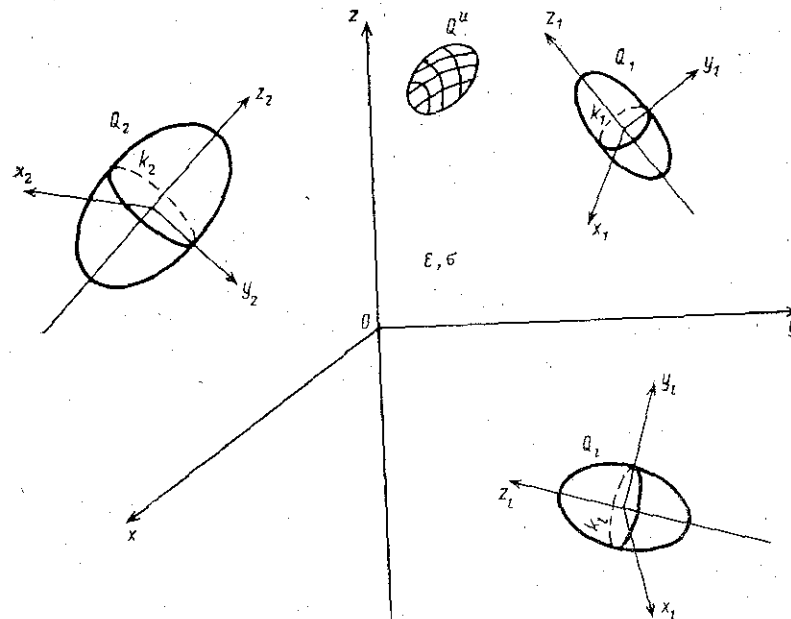


Рис. 1

строились решения в виде потенциалов простого слоя (для l -го тела):

$$W(M) = \int_{\Gamma_l} \hat{g}_l(M, M_0) \eta_1^l(M_0) dl_{M_0}, \quad M \in Q_l,$$

$$W(M) = \int_{\Gamma_l} \hat{g}_l(M, M_0) \eta_2^l(M_0) dl_{M_0}, \quad M \in \bar{Q}_l. \quad (6)$$

Здесь $W(M) = (E_\phi^{(m), l}, H_\phi^{(m), l})$ — вектор-решение скалярной задачи, $\hat{g}_l(M, M_0)$ — МФР для однородной среды с параметрами l -го тела, $\hat{g}_l(M, M_0)$ — МФР вмещающей плоскопараллельной среды, $\eta_1^l = (\eta_1^{(1), l}, \eta_1^{(2), l})$ — неизвестные вектор-функции на внутренней поверхности l -го тела, $\eta_2^l = (\eta_2^{(1), l}, \eta_2^{(2), l})$ — неизвестные вектор-функции на внешней поверхности l -го тела, Γ_l — образующая l -го тела.

Представление (6) удовлетворяет всем условиям задачи, за исключением условий на контуре Γ_l . Удовлетворяя граничным условиям, получим систему интегральных уравнений по контуру Γ_l :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_l} \{ \hat{K}_{11}(M, M_0) \eta_1^l(M_0) + \hat{K}_{12}(M, M_0) \eta_2^l(M_0) \} dl_{M_0} = W^0(M), \\ 2\pi \{ \hat{Z}_l^m(M) \eta_1^l(M) + \hat{Z}^m(M) \eta_2^l(M) \} + \end{aligned} \quad (7)$$

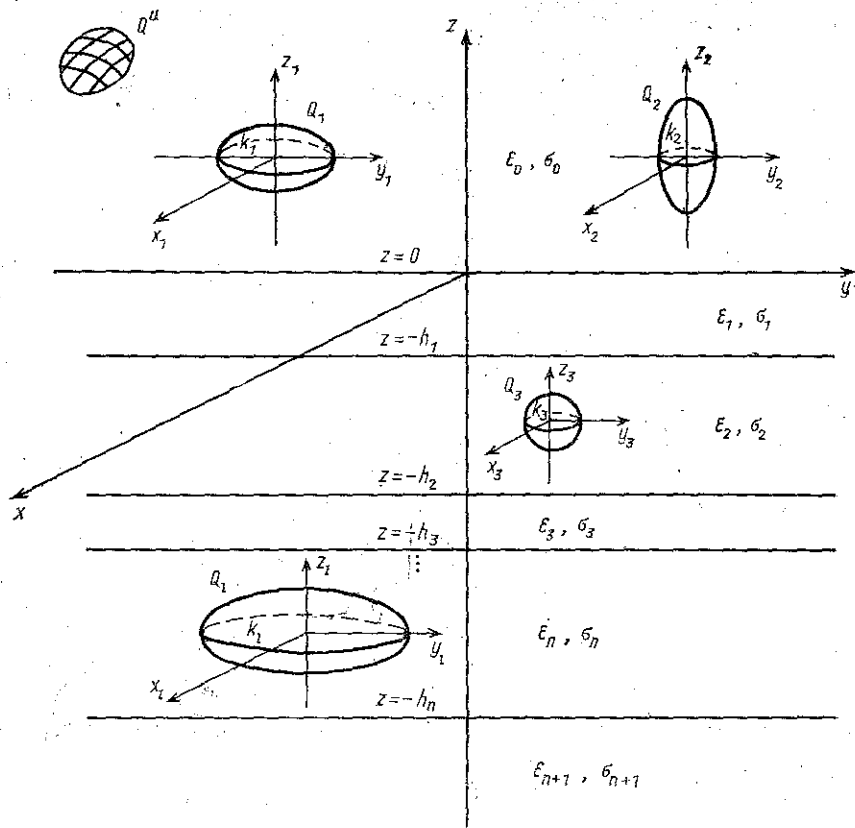


Рис. 2

$$+ \int_{\Gamma_l} \{ \hat{K}_{21}(M, M_0) \eta_1'(M_0) + \hat{K}_{22}(M, M_0) \eta_2'(M_0) \} dl_{M_0} = \hat{Z}^m \frac{\partial \bar{W}^0(M)}{\partial v_l},$$

где

$$\hat{K}_{11}(M, M_0) = + \hat{g}_l(M, M_0), \quad \hat{K}_{12} = - \hat{g}_l(M, M_0),$$

$$\hat{K}_{22}(M, M_0) = - \hat{Z}^m \frac{\partial \hat{g}}{\partial v_l},$$

$$\hat{K}_{21}(M, M_0) = \hat{Z}^m \frac{\partial \hat{g}_l}{\partial v_l} + \frac{m}{\omega \rho_l} \left[\frac{1}{\alpha_l} \right] \frac{\partial \hat{g}_l}{\partial z_l} + \hat{g}_l \left(\frac{m}{\omega \rho_l^2} \left[\frac{1}{\alpha_l} \right] \cos(v_l z_l) - \left[\hat{Z} \right] \frac{\cos(v_l \hat{\rho}_l)}{\rho_l} \right),$$

$$\hat{Z}^m = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu}{\alpha_l} \\ -\epsilon_l & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_l = k_l^2 \rho_l^2 - m^2,$$

(ρ_l, Φ_l, z_l) — цилиндрическая система координат, связанная с l -м телом, ν_l, τ_l — векторы внешней нормали и касательной к образующей Γ_l , $\bar{W}^0(M) = \{ (E_\Phi^0)^{(m)}, (H_\Phi^0)^{(m)} \}$ — m -е гармоники азимутальных компонент поля во вмещающей среде без включений.

Отметим, что полученные интегральные уравнения являются одномерной системой уравнений I рода. Информация о неоднородной структуре вмещающей среды и средах, заполняющих тела, содержится в соответствующих матрицах фундаментальных решений, из которых строятся ядра интегральных операторов.

Если учесть влияние всех тел и переписать систему (7) в компактной форме, то

$$\hat{A}^{(m, l)}(M) \bar{\Psi}_l^m(M) + \int_{\Gamma_l} \hat{K}^{(m, l)}(M, M_0) \bar{\Psi}_l^m(M_0) dl_{M_0} = (\bar{\Psi}_l^0)^{(m)}(M) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^L P_q^{(m)}(M). \quad (8)$$

Здесь

$$\bar{\Psi}_l^m(M) = \{ \eta_1^{(1, l)}, \eta_1^{(2, l)}, \eta_2^{(1, l)}, \eta_2^{(2, l)} \},$$

$$\hat{A}^{(m, l)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\pi \hat{Z}_l^m & 2\pi \hat{Z}_l^m \end{pmatrix}, \quad \hat{K}^{(m, l)} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{pmatrix},$$

$$(\bar{\Psi}_l^0) = \left\{ \bar{W}^0(M), \hat{Z}^m \frac{\partial \bar{W}^0}{\partial v_l} \right\},$$

$$P_q^{(m)}(M) = \left\{ \bar{W}^q(M), \hat{Z}^m \frac{\partial \bar{W}^q}{\partial v_l} \right\},$$

где $\bar{W}^q(M)$ — m -е гармоники азимутальных компонент поля от токов, наведенных на q -м теле. При решении задачи был задан следующий итерационный процесс (s — номер итерации):

$$\hat{A}^{(m, l)}(M) \bar{\Psi}_l^{m, s}(M) + \int_{\Gamma_l} \hat{K}^{(m, l)}(M, M_0) \bar{\Psi}_l^{m, s}(M_0) dl_{M_0} = (\bar{\Psi}_l^0(M))^{(m)} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^L P_q^{(m, (s-1))}(M).$$

В проводящих средах, если тела достаточно удалены друг от друга, предлагаемый итерационный метод сходится достаточно хорошо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Позднякова Е. Е. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью // Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. Смагин С. И. Решение трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн методом потенциалов // Численные методы в интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1980. С. 109—123.
3. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики, для неоднородных сред с осевой симметрией // Вычислительные методы и программирование. Т. 28. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 232—238.
4. Дмитриев В. И., Несмеянов Н. И. Метод численного исследования квазистационарного поля над слоистой средой с осесимметричным поднятием // Вычислительная математика и программное обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 176—181.
5. Захаров Е. В., Несмеянов Н. И. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на телах вращения, расположенных в слоистой среде // Вычислительная математика и программное обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 182—186.

С. Н. Давыдычева

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В КВАЗИТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В связи с развитием в последние годы методов электроразведки земной коры с использованием искусственных источников поля большое значение приобретает математическое моделирование трехмерных электромагнитных полей в проводящих средах. Задача расчета поля произвольных источников в горизонтально-слоистой проводящей среде полностью решена, однако часто структура земных недр не укладывается в эту модель. Попытки рассмотрения трехмерной модели среды приводят к сложным задачам, численное решение которых пока возможно только со значительными ограничениями на размер, форму неоднородностей и т. д. В связи с этим большой интерес представляют квазитрехмерные задачи — определение поля трехмерного источника в двумерно-неоднородной среде.

В настоящей работе предлагается способ решения такой задачи методом интегральных уравнений. Рассмотрим модель Земли, описываемую следующим распределением проводимости:

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma(z), & M=(x, y, z) \in T, \\ \sigma_T(y, z), & M \in T, \end{cases}$$

где $T = \{-d \leq y \leq d, H_0 \leq z \leq H\}$ — прямоугольник, а $\sigma(z)$ — проводимость слоисто-однородной среды, заданная функцией

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0, & z < z_1 = 0, \\ \sigma_n, & z_n < z < z_{n+1}, n=1, 2, \dots, N-1, \\ \sigma_N, & z > z_N. \end{cases}$$

Магнитная проницаемость всюду постоянна и равна μ . Такая модель позволяет исследовать поле над сильно вытянутыми по горизонтали неоднородностями.

Предполагаем, что в произвольных точках пространства находятся источники, создающие электромагнитное поле $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$, изменяющееся во времени по закону $e^{-i\omega t}$. При этом в слоистой среде создается так называемое нормальное поле $\mathbf{E}^{(n)}$, $\mathbf{H}^{(n)}$. Наличие неоднородности T приводит к появлению аномального поля, и суммарное поле \mathbf{E} , как показано в [1], удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (\mathbf{H} выражается через \mathbf{E} из уравнений Максвелла):

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}^{(n)}(M) + \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2(z)} \text{grad div} \right) \iiint_V \hat{G}(M, M_0) (k_T^2(M_0) - k^2(z_0)) \mathbf{E}(M_0) dV_0, \quad (1)$$

$$M = (x, y, z) \in V,$$

где $V = (-\infty, +\infty) \times T$, k — волновое число, причем $k^2 = i\omega\mu\sigma$ (в квазистационарном приближении), $\hat{G}(M, M_0)$ — тензор Грина:

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{Bmatrix} G(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G(M, M_0) & 0 \\ \partial g(M, M_0)/\partial x & \partial g(M, M_0)/\partial y & G_1(M, M_0) \end{Bmatrix},$$

компоненты которого согласно [2] представимы в виде

$$G(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) u_a^0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ G_1(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) u_a^0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \quad (2)$$

$$g(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) \left[u_a^1 - \frac{du_a^0}{dz} \right] (\lambda, z, z_0) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где u_a^δ — фундаментальная функция слоистой среды, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_a^\delta}{dz^2} - \gamma^2(z) u_a^\delta = 0, & z \neq z_0, \\ \left[\frac{1}{a(z)} \frac{du_a^\delta}{dz} \right]_{z=z_i} = -2 \frac{1-\delta}{a(z_0)} \Delta(z-z_0), \\ [u_a^\delta]_{z=z_i} = -2\delta \Delta(z-z_0), & i=0, 1, 2, \dots, N, \delta=0 \text{ или } 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Позднякова Е. Е. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью // Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. Смагин С. И. Решение трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн методом потенциалов // Численные методы в интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1980. С. 109—123.
3. Захаров Е. В. Метод решения граничных задач электродинамики, для неоднородных сред с осевой симметрией // Вычислительные методы и программирование. Т. 28. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 232—238.
4. Дмитриев В. И., Несмеянов Н. И. Метод численного исследования квазистационарного поля над слоистой средой с осесимметричным поднятием // Вычислительная математика и программное обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 176—181.
5. Захаров Е. В., Несмеянов Н. И. Метод решения задач дифракции электромагнитных волн на телах вращения, расположенных в слоистой среде // Вычислительная математика и программное обеспечение ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1985. С. 182—186.

С. Н. Давыдычева

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В КВАЗИТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В связи с развитием в последние годы методов электроразведки земной коры с использованием искусственных источников поля большое значение приобретает математическое моделирование трехмерных электромагнитных полей в проводящих средах. Задача расчета поля произвольных источников в горизонтально-слоистой проводящей среде полностью решена, однако часто структура земных недр не укладывается в эту модель. Попытки рассмотрения трехмерной модели среды приводят к сложным задачам, численное решение которых пока возможно только со значительными ограничениями на размер, форму неоднородностей и т. д. В связи с этим большой интерес представляют квазитрехмерные задачи — определение поля трехмерного источника в двумерно-неоднородной среде.

В настоящей работе предлагается способ решения такой задачи методом интегральных уравнений. Рассмотрим модель Земли, описываемую следующим распределением проводимости:

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma(z), & M=(x, y, z) \in T, \\ \sigma_T(y, z), & M \in T, \end{cases}$$

где $T = \{-d \leq y \leq d, H_0 \leq z \leq H\}$ — прямоугольник, а $\sigma(z)$ — проводимость слоисто-однородной среды, заданная функцией

$$\sigma(z) = \begin{cases} \sigma_0, & z < z_1 = 0, \\ \sigma_n, & z_n < z < z_{n+1}, n=1, 2, \dots, N-1, \\ \sigma_N, & z > z_N. \end{cases}$$

Магнитная проницаемость всюду постоянна и равна μ . Такая модель позволяет исследовать поле над сильно вытянутыми по горизонтали неоднородностями.

Предполагаем, что в произвольных точках пространства находятся источники, создающие электромагнитное поле $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$, изменяющееся во времени по закону $e^{-i\omega t}$. При этом в слоистой среде создается так называемое нормальное поле $\mathbf{E}^{(n)}$, $\mathbf{H}^{(n)}$. Наличие неоднородности T приводит к появлению аномального поля, и суммарное поле \mathbf{E} , как показано в [1], удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (\mathbf{H} выражается через \mathbf{E} из уравнений Максвелла):

$$\mathbf{E}(M) = \mathbf{E}^{(n)}(M) + \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{k^2(z)} \text{grad div} \right) \iiint_V \hat{G}(M, M_0) (k_T^2(M_0) - k^2(z_0)) \mathbf{E}(M_0) dV_0, \quad (1)$$

$$M = (x, y, z) \in V,$$

где $V = (-\infty, +\infty) \times T$, k — волновое число, причем $k^2 = i\omega\mu\sigma$ (в квазистационарном приближении), $\hat{G}(M, M_0)$ — тензор Грина:

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{Bmatrix} G(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G(M, M_0) & 0 \\ \partial g(M, M_0)/\partial x & \partial g(M, M_0)/\partial y & G_1(M, M_0) \end{Bmatrix},$$

компоненты которого согласно [2] представимы в виде

$$G(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) u_a^0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ G_1(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) u_a^0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \quad (2)$$

$$g(M, M_0) = \int_0^\infty J_0(\lambda \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}) \left[u_a^1 - \frac{du_a^0}{dz} \right] (\lambda, z, z_0) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где u_a^δ — фундаментальная функция слоистой среды, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_a^\delta}{dz^2} - \gamma^2(z) u_a^\delta = 0, & z \neq z_0, \\ \left[\frac{1}{a(z)} \frac{du_a^\delta}{dz} \right]_{z=z_i} = -2 \frac{1-\delta}{a(z_0)} \Delta(z-z_0), \\ [u_a^\delta]_{z=z_i} = -2\delta \Delta(z-z_0), & i=0, 1, 2, \dots, N, \delta=0 \text{ или } 1. \end{cases}$$

Здесь $\eta^2(z) = \lambda^2 - k^2(z)$, $\Delta(z) = \{1, z=0; 0, z \neq 0\}$. Способ аналитического вычисления u_a^0 для кусочно-постоянной функции $a(z)$ описан в [2].

Пользуясь однородностью модели вдоль оси x , можно понизить размерность области интегрирования в (1), перейдя к фурье-образам полей [2, 3]. Применим к (1) преобразование Фурье

$$F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{izx} dx.$$

Тогда, так как в (1) интеграл по x_0 типа свертки, получим, расписав по компонентам, систему уравнений типа Фредгольма II рода относительно фурье-образов электрического поля $e = F[E]$

$$\left\{ \begin{aligned} e_x(M) &= e_x^{(n)}(M) + (k^2(z) - \xi^2) \iint_T \tilde{G} a e_x ds_0 - \xi^2 \frac{\partial}{\partial z} \iint_T \tilde{g} a e_x ds_0 - \\ &- i\xi \left[\frac{\partial}{\partial y} \iint_T \left(\tilde{G} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial z} \right) a e_y ds_0 - \frac{\partial}{\partial z} \iint_T \tilde{G}_1 a e_z ds_0 \right], \\ e_y(M) &= e_y^{(n)}(M) - i\xi \frac{\partial}{\partial y} \iint_T \left(\tilde{G} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial z} \right) a e_x ds_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iint_T \tilde{g} a e_y ds_0 + \\ &+ \left(k^2(z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_T \tilde{G} a e_x ds_0 + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \iint_T \tilde{G}_1 a e_z ds_0, \\ e_z(M) &= e_z^{(n)}(M) - i\xi \left(\frac{\partial}{\partial z} \iint_T \tilde{G} a e_x ds_0 + \left(k^2(z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \iint_T \tilde{g} a e_x ds_0 \right) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \iint_T \tilde{G} a e_y ds_0 + \left(k^2(z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \iint_T \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} e_y + \tilde{G}_1 e_z \right) a ds_0, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$M = (y, z) \in T.$$

Здесь $\alpha = (k_T^2(y_0, z_0) - k^2(z_0)) / (2\pi k^2(z))$, а фурье-образы функций Грина определяются из (2):

$$\begin{aligned} \tilde{G}(M, M_0) &= F[G]/2 = \int_0^{\infty} \cos \lambda (y_0 - y) u_{\alpha}^0(V\lambda^2 + \xi^2, z, z_0) d\lambda, \\ \tilde{G}_1(M, M_0) &= F[G_1]/2 = \int_0^{\infty} \cos \lambda (y_0 - y) u_{\alpha}^0(V\lambda^2 + \xi^2, z, z_0) d\lambda, \\ \tilde{g}(M, M_0) &= F[g]/2 = \int_0^{\infty} \cos \lambda (y_0 - y) \left[u_{\alpha}^1 - \frac{du_{\alpha}^0}{dz} \right] \times \\ &\times (V\lambda^2 + \xi^2, z, z_0) \frac{d\lambda}{\lambda^2 + \xi^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

причем ни в (1), ни в (3) нельзя вносить дифференциальные операторы под знак интеграла, так как производные G, G_1 и их фурье-образов имеют неинтегрируемую особенность при $M_0 = M$.

Заметим, что в частном случае, когда $E^{(n)}$ не зависит от x $e^{(n)}$, и, следовательно, решение системы (3) отлично от нуля только при $\xi = 0$. При этом она распадается на две независимые системы: относительно e_x (E -поляризация), исследованную в [4], и относительно e_y, e_z (H -поляризация), исследованную в [5].

Проведем редукцию (3) к системе линейных алгебраических уравнений, разбив область T на одинаковые прямоугольники T_m так, что вдоль оси y их будет q , а вдоль оси z — p :

$$T = \bigcup_{m=1}^{pq} T_m, \quad T_m = \{y_{i_q} - h_y/2 \leq y \leq y_{i_q} + h_y/2;$$

$$z_{i_p} - h_z/2 \leq z \leq z_{i_p} + h_z/2\},$$

где $h_y = 2d/q$, $h_z = (H - H_0)/p$ — шаги сетки по осям y и z , $y_{i_q} = (i_q - 0.5)h_y - d$, $z_{i_p} = (i_p - 0.5)h_z + H_0$ — центры T_m , а индекс m пробегает значения от 1 до pq :

$$m = i_p + (i_q - 1)p, \quad i_q = 1, 2, \dots, q, \quad i_p = 1, 2, \dots, p.$$

Считая e и a постоянными в T_m и равными $e(y_{i_q}, z_{i_p})$, $a(y_{i_q}, z_{i_p})$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $e(y_{i_q}, z_{i_p})$. Вследствие того, что $\tilde{G}, \tilde{G}_1, \tilde{g}$ зависят от разностей $y - y_0$, она будет содержать клеточно-теплицевую матрицу:

| | | | | | | | | | |
|------------|------------|------------|---------|---------|---------|---------|-----------|-----------|-----------|
| g^0 | e^0 | f^0 | g^1 | e^1 | f^1 | \dots | g^{q-1} | e^{q-1} | f^{q-1} |
| e^0 | a^0 | b^0 | e^1 | a^1 | b^1 | \dots | e^{q-1} | a^{q-1} | b^{q-1} |
| h^0 | c^0 | d^0 | h^1 | c^1 | d^1 | \dots | h^{q-1} | c^{q-1} | d^{q-1} |
| g^{-1} | e^{-1} | f^{-1} | g^0 | e^0 | f^0 | | . | . | . |
| e^{-1} | a^{-1} | b^{-1} | e^0 | a^0 | b^0 | | . | . | . |
| h^{-1} | c^{-1} | d^{-1} | h^0 | c^0 | d^0 | | . | . | . |
| . | . | . | | | | | . | . | . |
| . | . | . | | | | | . | . | . |
| h^{-q+1} | e^{-q+1} | f^{-q+1} | \dots | \dots | \dots | | g^0 | e^0 | f^0 |
| e^{-q+1} | a^{-q+1} | b^{-q+1} | \dots | \dots | \dots | | e^0 | a^0 | b^0 |
| h^{-q+1} | c^{-q+1} | d^{-q+1} | \dots | \dots | \dots | | h^0 | c^0 | d^0 |

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \mathcal{G}_x^1 \\ \alpha^1 \mathcal{G}_y^1 \\ \alpha^1 \mathcal{G}_z^1 \\ \alpha^2 \mathcal{G}_x^2 \\ \alpha^2 \mathcal{G}_y^2 \\ \alpha^2 \mathcal{G}_z^2 \\ \vdots \\ \alpha^q \mathcal{G}_x^q \\ \alpha^q \mathcal{G}_y^q \\ \alpha^q \mathcal{G}_z^q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{G}_x^1 \\ \mathcal{G}_y^1 \\ \mathcal{G}_z^1 \\ \mathcal{G}_x^2 \\ \mathcal{G}_y^2 \\ \mathcal{G}_z^2 \\ \vdots \\ \mathcal{G}_x^q \\ \mathcal{G}_y^q \\ \mathcal{G}_z^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{G}_x^{(n)1} \\ -\mathcal{G}_y^{(n)1} \\ -\mathcal{G}_z^{(n)1} \\ -\mathcal{G}_x^{(n)2} \\ -\mathcal{G}_y^{(n)2} \\ -\mathcal{G}_z^{(n)2} \\ \vdots \\ -\mathcal{G}_x^{(n)q} \\ -\mathcal{G}_y^{(n)q} \\ -\mathcal{G}_z^{(n)q} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Здесь \mathcal{G} , $\alpha \mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{(n)}$ — вектор-столбцы длиной p , например:

$$\mathcal{G}_x^{iq} = \begin{pmatrix} e_x(y_{i_q}, z_1) \\ e_x(y_{i_q}, z_2) \\ \vdots \\ e_x(y_{i_q}, z_p) \end{pmatrix}; \quad \alpha^{iq} \mathcal{G}_x^{iq} = \begin{pmatrix} \alpha(y_{i_q}, z_1) e_x(y_{i_q}, z_1) \\ \alpha(y_{i_q}, z_2) e_x(y_{i_q}, z_2) \\ \vdots \\ \alpha(y_{i_q}, z_p) e_x(y_{i_q}, z_p) \end{pmatrix}$$

а a^i , b^i , ..., h^i — субматрицы размерности $p \times p$, элементы которых представляют собой интегралы от \tilde{C} , \tilde{G}_1 , \tilde{g} по прямоугольникам T_m , на которые действуют соответствующие дифференциальные операторы. Интегрирование по y_0 не представляет сложности. Для интегрирования по z_0 воспользуемся формулой, полученной в [5]:

$$\int_{z_{i_p} - h_z/2}^{z_{i_p} + h_z/2} u_n^\delta(z_{j_p}, z_0) dz_0 = u_n^\delta(z_{j_p}, z_{i_p}) (e^{\gamma h_z/2} - e^{-\gamma h_z/2}) / \gamma, \quad i_p \neq j_p. \quad (6)$$

В окрестности точки z_{j_p} , где $u_n^\delta(z_{j_p}, z_0)$ имеет скачок или излом, необходимо прежде выделить фундаментальную функцию однородного пространства с проводимостью $\sigma(z_{j_p})$. К остатку, который будет уже гладким, применима формула (6).

Применяя к интегралам от \tilde{C} , \tilde{G}_1 , \tilde{g} соответствующие дифференциальные операторы, получим

$$\begin{aligned} a_{j_p i_p}^{i q - j q} &= \int_0^\infty \sin \lambda y \left[\left(\frac{k^2 \xi^2}{\lambda^2} u_\mu^0 - \frac{du_\sigma^1}{dz} \right) \frac{e^-}{\eta} + \delta_{j_p i_p} \left(1 - \frac{k^2 \xi^2}{\lambda^2 \eta^2} \right) e^+ \right] \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + \xi^2} - \\ &\quad - \pi \delta_{j_p i_p} \left[\operatorname{sgn} y \left(\frac{k^2}{k^2 - \xi^2} + \frac{\xi^2}{k^2 - \xi^2} \varphi(y) \right) \right] \Big|_{\underline{y}}, \\ b_{j_p i_p}^{i q - j q} &= \int_0^\infty \cos \lambda y \left[-\frac{du_\sigma^0}{dz} + \delta_{i_p j_p} \right] \frac{e^-}{\eta} d\lambda, \\ c_{j_p i_p}^{i q - j q} &= \int_0^\infty \cos \lambda y \left[-u_\sigma^1 + \delta_{j_p i_p} \right] \frac{e^-}{\eta} d\lambda, \\ d_{j_p i_p}^{i q - j q} &= \int_0^\infty \sin \lambda y \left[u_\sigma^0 \frac{e^-}{\eta} - \delta_{j_p i_p} \frac{e^+}{\eta^2} \right] \frac{\lambda^2 + \xi^2}{\lambda} d\lambda - \\ &\quad - \pi \delta_{j_p i_p} [\operatorname{sgn} y (1 - \varphi(y))] \Big|_{\underline{y}}, \\ e_{j_p i_p}^{i q - j q} &= i \xi \left\{ \int_0^\infty \cos \lambda y \left[\left(k^2 u_\mu^0 + \frac{du_\sigma^1}{dz} \right) \frac{e^-}{\eta (\lambda^2 + \xi^2)} - \delta_{i_p j_p} \frac{e^+}{\eta^2} \right] d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \pi \delta_{i_p j_p} \xi / 2 \sqrt{\xi^2 - k^2} \varphi(y) \right] \Big|_{\underline{y}}, \\ f_{j_p i_p}^{i q - j q} &= -i \xi \int_0^\infty \sin \lambda y \left[\frac{du_\sigma^0}{dz} - \delta_{i_p j_p} \right] \frac{e^- d\lambda}{\eta \lambda}, \\ g_{j_p i_p}^{i q - j q} &= -i \xi \int_0^\infty \sin \lambda y \left[u_\sigma^1 - \delta_{i_p j_p} \right] \frac{e^- d\lambda}{\eta \lambda}, \\ h_{j_p i_p}^{i q - j q} &= \int_0^\infty \sin \lambda y \left[\left(k^2 \lambda^2 u_\mu^0 - \xi^2 \frac{du_\sigma^1}{dz} \right) \frac{e^-}{\eta (\lambda^2 + \xi^2)} + \right. \\ &\quad \left. + (\xi^2 - k^2) \delta_{i_p j_p} \frac{e^+}{\eta^2} \right] \frac{d\lambda}{\lambda} - \pi \delta_{i_p j_p} \left[\operatorname{sgn} y \frac{k^2 - \xi^2}{k^2} (1 - \varphi(y)) \right] \Big|_{\underline{y}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$f(y) \Big|_{\underline{y}} = f(\bar{y}) - f(\underline{y}), \quad \bar{y} = y_{i_p} - y_{j_p} + h_y/2, \quad \underline{y} = y_{i_p} - y_{j_p} - h_y/2,$$

$$\varphi(y) = \exp(-|y| \sqrt{\xi^2 - k^2}), \quad k = k(z_{jp}), \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2 - k^2} \operatorname{Re} \eta \geq 0,$$

$$e^\pm = \exp(\eta h_z/2) \pm \exp(-\eta h_z/2), \quad u_a^\delta = u_a^s(\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}, z_{jp} - 0, z_{jp}).$$

Все подынтегральные функции в (7) в силу характера u_a^δ убывают экспоненциально, поэтому можно заменить верхний предел конечным числом с оценкой остатка интегрирования [5].

Нетрудно убедиться из (7), что выполняются равенства

$$a^{-r} = a^r; \quad d^{-r} = d^r; \quad f^{-r} = f^r; \quad h^{-r} = h^r; \quad g^{-r} = g^r;$$

$$b^{-r} = -b^r; \quad c^{-r} = -c^r; \quad e^{-r} = -e^r.$$

Кроме этого, вследствие принципа взаимности

$$a_{ji}^r = a_{ij}^r, \quad d_{ji}^r = d_{ij}^r, \quad e_{ji}^r = e_{ij}^r, \quad g_{ji}^r = g_{ij}^r,$$

$$c_{ji}^r = -b_{ij}^r, \quad h_{ji}^r = -f_{ij}^r,$$

если только $k(z_i) = k(z_j)$. Эти виды симметрии и клеточная теплицевость матрицы в (5) позволяют существенно ускорить ее вычисление. Заметим, что если всюду внутри T $\sigma_T(y, z)$ и, следовательно, α не зависят от y , то общая матрица системы (5) обладает теми же симметриями. Это можно использовать для экономии памяти ЭВМ и при ее обращении (существуют эффективные алгоритмы обращения таких матриц).

Предложенный метод позволяет исследовать одновременно несколько вариантов распределения проводимости внутри T . Так как интегралы (7) не зависят от $\sigma_T(y, z)$, достаточно вычислить их один раз, а при расчете второго и последующих вариантов время счета тратится только на обращение новой матрицы.

Получив значения $e(M)$ внутри T , нетрудно, используя соотношения (3), вычислить $e(M)$ в любой точке пространства. Электрическое поле $E(M)$ вычисляется посредством обратного преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Плешко В. Ю. // Вычислительные методы и программирование. Т. 36. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 27—35.
2. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.
3. Приходько Л. Л. // Актуальные проблемы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 129—136.
4. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Т. 32. С. 200—215.
5. Дмитриев В. И., Давыдычева С. Н. // Актуальные проблемы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 121—128.

Е. В. Захаров, Е. В. Никитина

МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛЕНТОЧНЫМИ СТРУКТУРАМИ

В современной прикладной электродинамике возрос интерес к структурам с анизотропными свойствами. Известно, что соответствующие задачи дифракции являются одними из наиболее сложных. В работе [1] развит общий метод численного анализа задач дифракции электромагнитных волн для одного класса анизотропных объектов в виде гладких поверхностей произвольной формы с идеальной проводимостью в определенном направлении. Данный метод является также эффективным в случае, когда для гладкой анизотропной поверхности применимы ленточные модели.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитных волн ($e^{-i\omega t}$ — зависимость от времени, λ — длина волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число) на идеально проводящей ленточной структуре. Ленточная структура S образована из узких полос P различной конфигурации длиной l с фиксированной шириной d , геометрия которых описывается с помощью различных криволинейных ортогональных координат $\{\tau, \nu, q\}$, нормированных на волновое число Π : $\{0 \leq \tau \leq kl; |\nu| \leq kd/2; q = q_0\}$, причем $d \ll l, d \ll \lambda$.

Задача дифракции формулируется следующим образом. Известно первичное поле E^0, H^0 . Оно наводит на ленточной структуре S поверхностные токи с плотностью J , которым соответствует вторичное поле E, H . Вторичное поле удовлетворяет однородной системе уравнений Максвелла, условиям излучения на бесконечности и условию на ребре вблизи кромок полос. Полное поле удовлетворяет на S граничному условию на идеальном проводнике.

В рамках ленточной модели сделаем следующие допущения: в силу малости поперечных волновых размеров полос ограничимся рассмотрением продольной компоненты плотности тока $J_\tau = J(\tau, \nu)$, пренебрегая поперечной компонентой J_ν , при этом в силу условий на ребре вблизи кромок $\nu = \pm h, h = kd/2$, положим $J(\tau, \nu) = I(\tau)/\pi\sqrt{h^2 - \nu^2}$, где $I(\nu)$ — линейная плотность полного продольного тока. Подобные приближения для узких ленточных проводников использованы, например, в [2] при исследовании спиральных и кольцевых антенн.

Подставляя выражение для вторичного поля

$$E = \operatorname{grad} \operatorname{div} A + k^2 A$$

через векторный потенциал

$$A(P_0) = 1/4\pi \iint_S \tau_P J(P) e^{ikR_{PP_0}} / R_{PP_0} d\sigma$$

в граничное условие на S

$$E_\tau(P_0) + E_\tau^0(P_0) = 0,$$

$$\varphi(y) = \exp(-|y| \sqrt{\xi^2 - k^2}), \quad k = k(z_{jp}), \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2 - k^2} \operatorname{Re} \eta \geq 0,$$

$$e^\pm = \exp(\eta h_z/2) \pm \exp(-\eta h_z/2), \quad u_a^\pm = u_a^\pm(\sqrt{\lambda^2 + \xi^2}, z_{jp} - 0, z_{jp}).$$

Все подынтегральные функции в (7) в силу характера u_a^\pm убывают экспоненциально, поэтому можно заменить верхний предел конечным числом с оценкой остатка интегрирования [5].

Нетрудно убедиться из (7), что выполняются равенства

$$a^{-r} = a^r; \quad d^{-r} = d^r; \quad f^{-r} = f^r; \quad h^{-r} = h^r; \quad g^{-r} = g^r;$$

$$b^{-r} = -b^r; \quad c^{-r} = -c^r; \quad e^{-r} = -e^r.$$

Кроме этого, вследствие принципа взаимности

$$a_{ji}^r = a_{ij}^r, \quad d_{ji}^r = d_{ij}^r, \quad e_{ji}^r = e_{ij}^r, \quad g_{ji}^r = g_{ij}^r,$$

$$c_{ji}^r = -b_{ij}^r, \quad h_{ji}^r = -f_{ij}^r,$$

если только $k(z_i) = k(z_j)$. Эти виды симметрии и клеточная теплицевость матрицы в (5) позволяют существенно ускорить ее вычисление. Заметим, что если всюду внутри T $\sigma_T(y, z)$ и, следовательно, α не зависят от y , то общая матрица системы (5) обладает теми же симметриями. Это можно использовать для экономии памяти ЭВМ и при ее обращении (существуют эффективные алгоритмы обращения таких матриц).

Предложенный метод позволяет исследовать одновременно несколько вариантов распределения проводимости внутри T . Так как интегралы (7) не зависят от $\sigma_T(y, z)$, достаточно вычислить их один раз, а при расчете второго и последующих вариантов время счета тратится только на обращение новой матрицы.

Получив значения $e(M)$ внутри T , нетрудно, используя соотношения (3), вычислить $e(M)$ в любой точке пространства. Электрическое поле $E(M)$ вычисляется посредством обратного преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Плешко В. Ю. // Вычислительные методы и программирование. Т. 36. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 27—35.
2. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Изд-во МГУ, 1969.
3. Приходько Л. Л. // Актуальные проблемы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 129—136.
4. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Т. 32. С. 200—215.
5. Дмитриев В. И., Давыдычева С. Н. // Актуальные проблемы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 121—128.

Е. В. Захаров, Е. В. Никитина

МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛЕНТОЧНЫМИ СТРУКТУРАМИ

В современной прикладной электродинамике возрос интерес к структурам с анизотропными свойствами. Известно, что соответствующие задачи дифракции являются одними из наиболее сложных. В работе [1] развит общий метод численного анализа задач дифракции электромагнитных волн для одного класса анизотропных объектов в виде гладких поверхностей произвольной формы с идеальной проводимостью в определенном направлении. Данный метод является также эффективным в случае, когда для гладкой анизотропной поверхности применимы ленточные модели.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитных волн ($e^{-i\omega t}$ — зависимость от времени, λ — длина волны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число) на идеально проводящей ленточной структуре. Ленточная структура S образована из узких полос P различной конфигурации длиной l с фиксированной шириной d , геометрия которых описывается с помощью различных криволинейных ортогональных координат $\{\tau, \nu, q\}$, нормированных на волновое число Π : $\{0 \leq \tau \leq kl; |\nu| \leq kd/2; q = q_0\}$, причем $d \ll l, d \ll \lambda$.

Задача дифракции формулируется следующим образом. Известно первичное поле E^0, H^0 . Оно наводит на ленточной структуре S поверхностные токи с плотностью J , которым соответствует вторичное поле E, H . Вторичное поле удовлетворяет однородной системе уравнений Максвелла, условиям излучения на бесконечности и условию на ребре вблизи кромок полос. Полное поле удовлетворяет на S граничному условию на идеальном проводнике.

В рамках ленточной модели сделаем следующие допущения: в силу малости поперечных волновых размеров полос ограничимся рассмотрением продольной компоненты плотности тока $J_\tau = J(\tau, \nu)$, пренебрегая поперечной компонентой J_ν , при этом в силу условий на ребре вблизи кромок $\nu = \pm h, h = kd/2$, положим $J(\tau, \nu) = I(\tau)/\pi\sqrt{h^2 - \nu^2}$, где $I(\nu)$ — линейная плотность полного продольного тока. Подобные приближения для узких ленточных проводников использованы, например, в [2] при исследовании спиральных и кольцевых антенн.

Подставляя выражение для вторичного поля

$$E = \operatorname{grad} \operatorname{div} A + k^2 A$$

через векторный потенциал

$$A(P_0) = 1/4\pi \iint_S \tau_P J(P) e^{ikR_{PP_0}} / R_{PP_0} d\sigma$$

в граничное условие на S

$$E_\tau(P_0) + E_\tau^0(P_0) = 0,$$

где $P_0 \in L$, $L: (0 \leq \tau \leq kl; \nu = 0; q = q_0)$, — средняя линия на полосах Π , перейдем к интегродифференциальному уравнению I рода относительно неизвестной линейной плотности продольных токов $I(\tau)$. В безразмерных переменных уравнение имеет вид

$$\sum_{m=1}^M \left\{ \lim_{q \rightarrow q_0^n} \frac{1}{\pi h_{\tau_0}^n} \frac{\partial}{\partial \tau_0} \int_{\Pi_m} I^m(\tau) \frac{\partial \Psi(P'_0, P)}{\partial \tau} \frac{h_{\nu}}{\sqrt{h^2 - \nu^2}} d\tau d\nu - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi_m} I^m(\tau) \Phi(P_0, P) \frac{h_{\tau} h_{\nu}}{\sqrt{h^2 - \nu^2}} d\tau d\nu \right\} = 4\pi E_{\tau_0}^0(P_0). \quad (1)$$

Здесь $\{\Pi_m\}$ — совокупность полос, образующих ленточную структуру S , $m, n = 1, 2, \dots, M$,

$$\Psi(P_0, P) = e^{iR_{PP_0}/R_{PP_0x}}$$

$$\Phi(P_0, P) = \Psi(P_0, P) \cos(\tau_0 \hat{x} \tau),$$

$$P_0 = (\tau_0, 0, q_0^n), \quad P_0 \in \Pi_{n^x}$$

$$P = (\tau, \nu, q_0^m), \quad P \in \Pi_m,$$

$$P'_0 = (\tau_0, 0, q).$$

$h_{\tau_0}, h_{\tau}, h_{\nu}$ — коэффициенты Ламэ.

Рассмотрим алгоритм численного решения уравнения (1), построенный на основе методов интерполяции и коллокации. Каждую полосу Π_m разобьем равномерно по переменной τ^m на N_m сегментов

$$[\tau_{i-1}^m, \tau_i^m], \quad \tau_i^m = kl_m/N_m, \quad i = 1, 2, \dots, N_m.$$

Используем кусочно-постоянную аппроксимацию искомым функций $I^m(\tau)$, выбирая узлы интерполяции в средних точках сегментов разбиения и заменяя значения функций $I^m(\tau)$ на данных сегментах величиной $I_i^m = I^m(\tau_{i-1/2}^m)$. Проведем коллокацию уравнения (1) в узлах интерполяции и перейдем к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов I_i^m :

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{N_m} A_{ki}^{nm} I_i^m = f_k^n, \quad (2)$$

$n = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, \dots, N_m$, где в правой части стоят величины

$$f_k^n = 4\pi E_{\tau_0}^0(P_k^n)$$

и матричные коэффициенты имеют вид

$$A_{ki}^{nm} = \frac{1}{\pi h_{\tau_0}^n} \frac{\partial}{\partial \tau^n} \int_{-h}^h \frac{h_{\nu} d\nu}{\sqrt{h^2 - \nu^2}} \int_{\tau_{i-1}^m}^{\tau_i^m} \frac{\partial \Psi(P_k^n, P)}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_{-h}^h \frac{h_{\nu} d\nu}{\sqrt{h^2 - \nu^2}} \int_{\tau_{i-1}^m}^{\tau_i^m} \Phi(P_k^n, P) h_{\tau} d\tau,$$

$P = (\tau, \nu, q_0^m)$ и $P_k^n = (\tau_{k-1/2}^n, 0, q_0^n)$ — точки коллокации.

При вычислении матричных коэффициентов системы (2) аналитически выделим сингулярную особенность в интегродифференциальном выражении, вычислим интеграл со слабой особенностью по малой области Ω размером $h \times h$ с точностью до величин $O(h^2)$, а интегрирование регулярных выражений по координате ν с весом $1/\sqrt{h^2 - \nu^2}$ проведем по квадратурной формуле Гаусса—Кристоффеля с одним узлом, также имеющей погрешность $O(h^2)$. В результате получим формулы для определения матричных коэффициентов

$$A_{ki}^{nm} = D_{ki}^{nm} + Q_{ki}^{nm} + \delta_{ik} \cdot \delta_{mn} \cdot D + O(h^2), \quad (3)$$

где

$$D_{ki}^{nm} = \frac{\partial}{\partial \tau} [\Psi(P, P_i^m) - \Psi(P, P_{i-1}^m)] \Big|_{\tau = \tau_{k-1/2}^n}$$

$$P = (\tau, 0, q_0^n); \quad P_i^m = (\tau_i^m, 0, q_0^m),$$

где Q_{ki}^{nm} — квадратурная формула для вычисления с заданной точностью $O(h^2)$ одномерных интегралов

$$- \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(P_k^n, P) h_{\tau} d\tau, \quad P = (\tau, 0, q_0^n)$$

по интервалу $[\tau_{i-1}^m, \tau_i^m]$ при $\delta_{ik} \cdot \delta_{mn} = 0$ и по интервалам $[\tau_{i-1}^m, \tau_{i-1/2}^m - h]$, $[\tau_{i-1/2}^m + h, \tau_i^m]$ при $\delta_{ik} \cdot \delta_{mn} = 1$ и где комплексная величина D имеет значение

$$\operatorname{Re} D = 1/\pi \iint_{\Omega} 1/\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{h^2 - y^2} dx dy = C,$$

$$\operatorname{Im} D = 1/\pi \iint_{\Omega} 1/\sqrt{h^2 - y^2} dx dy = 2h,$$

$$\Omega: \{|x| \leq h; |y| \leq h\},$$

а константу

$$C = \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\text{Arc sin}(tg \psi)}{\sin \psi} d\psi$$

можно оценить следующим образом:

$$C \approx \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 1/2 + 2/3 \cdot \text{Arc tg}(1/\sqrt{2}) + 1/6 \cdot \pi/\sqrt{2}.$$

Возможен такой случай, когда ленточная структура используется для моделирования сплошных поверхностей и выполнение условий на ребре вблизи кромок полос не обязательно. Если не рассматривать особенное поведение токов вблизи кромок, ввести линейную плотность $\bar{I}(\tau)$, где $J(\tau, \nu) \approx \bar{I}(\tau)/2h$, получить относительно функций $\bar{I}(\tau)$ интегродифференциальное уравнение, для которого аналогичным образом построить алгоритм численного решения, то в результате придем к системе (2), матричные коэффициенты которой также будут вычисляться по формулам (3) с точностью $O(h^2)$, но при значении константы $C = 2 \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, причем $\bar{C} - C < 1$.

Матрица системы (2) имеет преобладающие диагональные элементы A_{ii}^{mm} . При шаге разбиения 2θ по координате τ эти элементы можно оценить следующим образом:

$$|A_{ii}^{mm}| \sim 2/\theta^2 + \theta/4h + h + 1/2 + C.$$

Если на единицу длины волны вдоль полос приходится более пяти разбиений ($N_m \geq 5l/\lambda$; $\theta \leq 0.6$), а ширина полос $d \leq \lambda/10$ ($h \leq 0.3$), то

$$|A_{ii}^{mm}| \geq 10 + C,$$

откуда следует, что значения интерполяционных коэффициентов для плотностей $I(\tau)$ и $\bar{I}(\tau)$, полученные при решении системы (2) с различными константами C и \bar{C} в формулах (3), где $|C - \bar{C}| < 1$, будут близки. В рамках рассмотренного приближения локальное распределение поверхностных токов на ленточных проводниках существенно не влияет на характер распределения полного линейного тока на ленточной структуре. Для характеристики поверхностной плотности токов на ленточной структуре удобно использовать отношение $I(\tau)/h$, которое определяет плотность $J(\tau, 0)$ на средней линии L полос Π ($J(\tau, 0) = I(\tau)/\pi h$ или $J(\tau, 0) = \bar{I}(\tau)/2h$).

Построенные здесь ленточные структуры позволяют моделировать самые разнообразные варианты анизотропии на гладких поверхностях при произвольных геометрии, форме и размерах проводящих областей. Данная методика также может быть легко перенесена на случай конечной проводимости.

Характерным параметром ленточной структуры является ее поперечный размер d , который в виде нормированной величины $h = kd/2$ входит в уравнение (1) и систему (2) с матрицей (3). Кроме того этот параметр должен быть малым.

С целью выяснения границы допустимых значений параметра $d \leq d_{\max}$ для ленточных моделей рассмотрим в качестве модельной задачу дифракции плоской электромагнитной волны на круговом цилиндре конечной длины с идеальной проводимостью вдоль образующей.

Представим цилиндрическую поверхность в виде совокупности полос

$$\Pi_m: \{|\tau| \leq kl/2; |\nu| \leq h; q = kr\}, \quad (4)$$

$$m = 1, 2, \dots, M,$$

где l — длина и r — радиус цилиндра, а координаты $\{\tau, \nu, q\}$ связаны с цилиндрическими координатами $\{z, \rho, \varphi\}$: $z = \tau/k, \rho = q/k$,

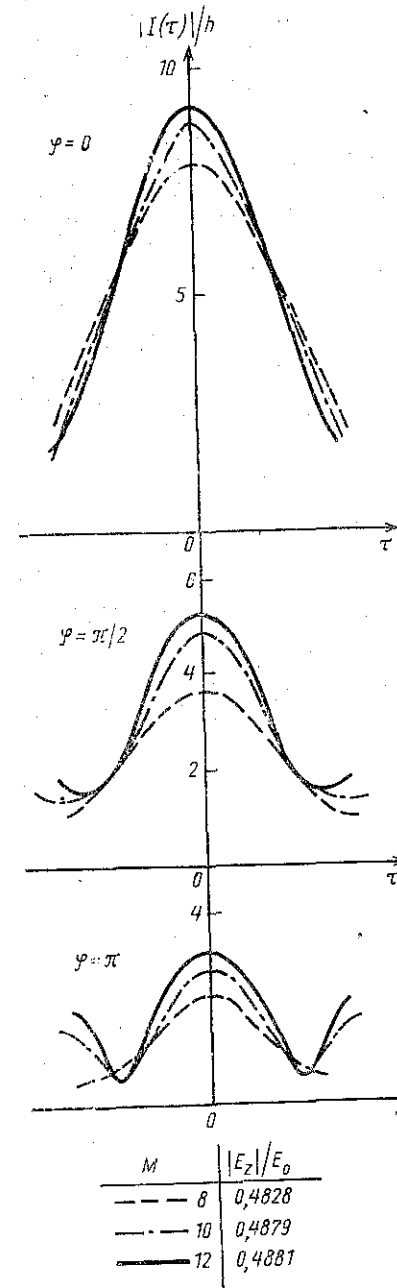


Рис. 1

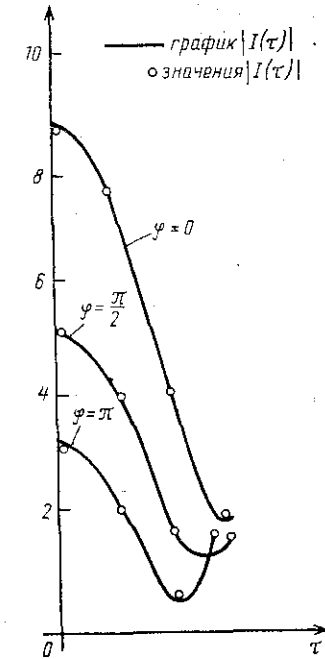


Рис. 2

$\varphi = \nu/r + m \cdot 2\pi/M$, $h_r = h_\nu = 1$, $k = 2\pi/\lambda$, $h = k\pi r/M$ — параметр ленточной структуры.

В данной задаче в силу цилиндрической геометрии анизотропно проводящей поверхности матрица системы линейных алгебраических уравнений (2) представляет собой двухуровневую клеточно-циркулянтную матрицу с теплицевыми клетками, полностью определяемыми по элементам первой строки. Для такой матрицы применимы специальные методы вычислений, экономящие время и память ЭВМ [3]. Это позволяет в процессе численного анализа рассматривать алгебраические системы (2) достаточно больших размеров $N = N_m \cdot M$ и, следовательно, изменять параметр $d = 2\pi r/M$ в широких пределах.

Ниже приведены результаты вычислений для цилиндра с размерами $l = \lambda$, $2\pi r = \lambda$, на который падает плоская волна $E^0 = (E_z^0, 0, 0)$, $E_z^0 = E_0 e^{ikr \cos \varphi}$, с применением ленточных структур (4), имеющих поперечные размеры $d = \lambda/M$ при $M \geq 8$. Поскольку поверхность цилиндра сплошная, то на ленточных проводниках рассмотрены наряду с токами, обладающими особенностями вблизи кромок, также и токи, не имеющие разрывов на кромках.

На рис. 1 представлены распределения токов на полосах структуры (4) $I^m(\tau)/h$, а также значения вторичного поля E_z на оси цилиндра $z=0$, $\rho=0$. Из анализа численной сходимости величин, характеризующих поверхностную плотность тока на проводнике, и значений вторичного поля, соответствующих этим токам, следует, что данная ленточная структура достаточно хорошо моделирует анизотропно проводящую цилиндрическую поверхность при значениях параметра $d \leq d_{\max}$, где $d_{\max} \sim \lambda/10$.

На рис. 2 продемонстрировано практически полное совпадение результатов для различных линейных токов $I^m(\tau)$ и $\bar{I}^m(\tau)$, соответствующих различным вариантам распределения поверхностных токов на ленточных проводниках вблизи кромок.

Для сравнения на рис. 3 приведены аналогичные результаты для ленточных структур (4), полностью не покрывающих поверхность цилиндра и состоящих из различного числа M полос Π с

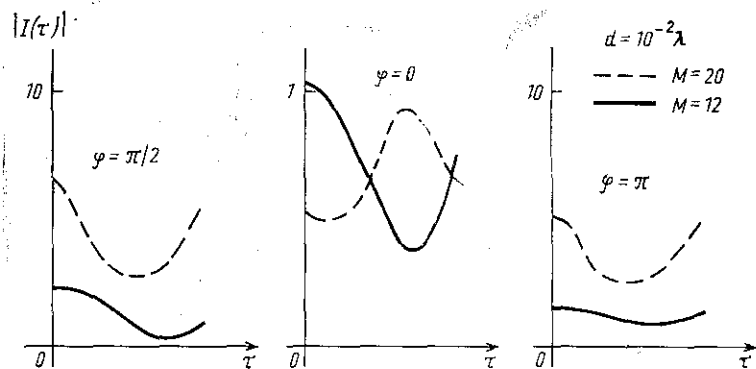


Рис. 3

фиксированной шириной d , где $d \ll \lambda/M$. В этом случае имеет место качественно иная картина распределения линейных токов и не наблюдается численной сходимости с ростом M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на поверхностях с анизотропной проводимостью // ДАН СССР, 1985. Т. 280, № 2. С. 333—336.
2. Дмитриев В. И., Чебышев В. В. Численное исследование плоского спирального излучателя в слоистой среде // Математические модели в прикладной электродинамике. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 85—94.
3. Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

Э. А. Альховский, И. В. Бережная, А. С. Ильинский,
А. Г. Кондратьев

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЗЕМЛИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА И ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Задача нахождения электродинамических характеристик вибратора, расположенного над землей, является одной из ключевых задач теории антенн. Существующие алгоритмы расчета [1, 2] справедливы лишь для ограниченной области электрических параметров земли и в ряде случаев не могут быть использованы.

Настоящая работа посвящена разработке алгоритма расчета электродинамических характеристик вертикального и горизонтального вибраторов, расположенных вблизи земли без ограничений на ее параметры.

Рассмотрим вибратор, представляющий собой идеально проводящий тонкостенный цилиндр, расположенный над плоской однородной землей с параметрами ϵ_1 , μ_0 , σ_1 . Вибратор питается идеальным источником тока $E_{ст} = U_0 \delta(N - N_p)$, где U_0 — разность потенциалов в точке питания, N_p — точка питания; L , a — длина и радиус вибратора.

Электромагнитное поле E и H удовлетворяет уравнениям Максвелла (временная зависимость — $e^{i\omega t}$)

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= i\omega \epsilon E + j_{ст}, \\ \text{rot } E &= -i\omega \mu H, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_c - i\sigma/\omega, \quad \mu = \mu_0, \quad \epsilon_c = \begin{cases} \epsilon_0, & z > 0, \\ \epsilon_1, & z < 0, \end{cases} \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_0, & z > 0, \\ \sigma_1, & z < 0. \end{cases}$$

На поверхности земли $z=0$ касательные составляющие E и H непрерывны:

$$[E_\tau]_{z=0} = 0, \quad [H_\tau]_{z=0} = 0, \quad (2)$$

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ
НА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ
В СЛУЧАЕ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ**

Дифракция электромагнитного излучения оптического диапазона на периодических структурах играет большое значение в технике. При решении различных практических задач фокусировки лазерного излучения, фазовых корректоров, ответвителей, делителей пучка обычно пользуются приближением Кирхгофа или Френеля. Однако не всегда приближения Кирхгофа и Френеля дают адекватную эксперименту картину дифракции. В работе [1] показано, что в случае, когда период решетки сравним с длиной падающей волны, приближения Кирхгофа и Френеля не дают правильной картины дифракции.

В настоящей работе предложена более сложная модель дифракции, основанная на приближенном решении уравнений Максвелла, для наклонного падения плоской волны на решетку. Рассмотрим отражательную идеально проводящую поверхность, периодическую в направлении оси OY и однородную вдоль оси OX . Сечение этой поверхности плоскостью $x=0$ показано на рис. 1. Решетка состоит из $2N + 1$ элементов, начало координат расположено в центральном элементе решетки, параметры решетки приведены на рис. 1.

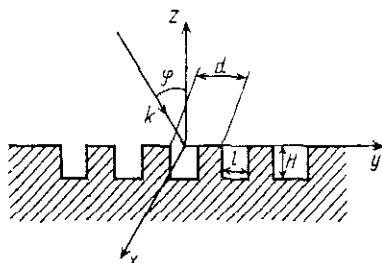


Рис. 1. Бинарная отражательная решетка

Пусть на решетку из бесконечности падает плоская электромагнитная волна $e^{-ikz \cos \varphi + iky \sin \varphi - i\omega t}$. Считаем, что в этой системе возбуждено плоское электромагнитное поле ($\partial/\partial x=0$) магнитной поляризации, т. е.

$$\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}, \vec{H} = \{H_x, 0, 0\}, H_x = u(y, z),$$

$$E_y = -1/ik \cdot \partial u / \partial z, E_z = 1/ik \cdot \partial u / \partial y.$$

Функция $u(y, z) = u(M)$, где $M = \{y, z\}$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad M \in D, \quad (1)$$

где область D определяется из условия

$$D = \{-\infty < y < \infty, z > 0, jd - l/2 < y < jd + l/2, \\ -H < z \leq 0, j = \overline{-N, N}\}.$$

На поверхности решетки функция $u(M)$ должна удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

где n — нормаль к поверхности решетки. Функция $u(M)$ в области D представима в виде

$$u(y, z) = e^{-ikz \cos \varphi + iky \sin \varphi} + u_p(y, z), \quad (3)$$

где $u_p(y, z)$ — рассеянное поле.

В бесконечности функция $u_p(y, z)$ удовлетворяет условию излучения

$$u_p \sim O(1/\sqrt{r}), \quad \frac{\partial u_p}{\partial r} - iku_p \sim o(1/\sqrt{r}), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

По определению диаграммой рассеяния решетки называется функция, удовлетворяющая следующему условию:

$$P(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4u_p(z=r \cos \theta, y=r \sin \theta) / iH_0^{(1)}(kr).$$

Применяя вторую формулу Грина к функциям $u_p(y, z)$ и $v(y, z, y_0, z_0) = iH_0^{(1)}(k\sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2})/4$ в области $D_0 = \{-\infty < y < \infty, z > 0\}$ и учитывая, что функции $u_p(y, z)$ и $v(y, z, y_0, z_0)$ в области D_0 удовлетворяют уравнению Гельмгольца и на бесконечности — условию излучения, можно показать, что диаграмма рассеяния решетки рассчитывается по формуле

$$P(\theta) = A(\theta) \cdot P_0(\theta), \quad \alpha = kd(\sin \theta + \sin \varphi)/2,$$

$$A(\theta) = \sin((2N+1)\alpha) / ((2N+1)\sin \alpha),$$

$$P_0(\theta) = \int_{-d/2}^{d/2} \{ \frac{\partial u_p(y+jd, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + ik \cos \theta u_p(y+jd, z=0) \} e^{-iky \sin \theta} dy.$$

При вычислении диаграммы рассеяния решетки делается следующее приближение. Считается, что поле на оси OY за границей решетки равно нулю. Это приближение правомерно, так как решетка состоит из очень большого числа элементов и основное излучение происходит в центральной части решетки, а на концах решетки оно незначительно. Рассматриваем диаграмму рассеяния $P(\theta)$, нормированную на число элементов в решетке.

Функция $A(\theta)$ сильно осциллирующая, причем с ростом числа элементов решетки возрастает число ее осцилляций. В направлениях, удовлетворяющих условию

$$\sin \theta + \sin \varphi = n\lambda/d, \quad n \in Z, \quad (3')$$

функция $A(\theta)$ имеет ярко выраженные максимумы, значения которых равны единице. Число этих максимумов равно

$$1 + [d(1 + \sin \varphi)/\lambda] + [d(1 - \sin \varphi)/\lambda].$$

Так как требуется рассчитывать диаграмму рассеяния для конечной решетки с большим числом элементов, то приближенно можно считать, что рассеянное поле для такой решетки совпадает с рассеянным полем для бесконечной решетки. Подобное приближение правомерно, так как в работе [2] показано, что для больших конечных решеток поле в центральной части решетки совпадает с полем для бесконечной решетки. Поэтому при расчете диаграммы рассеяния одиночного элемента решетки $P_0(\theta)$ считаем, что $u_p(y, z) \approx \bar{u}_p(y, z)$, где $\bar{u}_p(y, z)$ — рассеянное поле для бесконечной решетки.

Рассеянное поле $\bar{u}_p(y, z)$ для бесконечной решетки в области ищем в виде

$$\bar{u}_p(y, z) = e^{iky \sin \varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{i\gamma_n z + i\alpha_n y}, \quad (4)$$

где $\alpha_n = \pi n/d$, $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \mu_n^2}$, $\text{Im} \gamma_n > 0$, $\mu_n = \alpha_n + k \sin \varphi$, R_n — амплитуды парциальных волн, периодичных по y и распространяющихся по z с постоянной распространения γ_n .

Учитывая, что $\bar{u}_p(y, z)$ рассчитывается по формуле (4), получим представление диаграммы рассеяния одиночного элемента решетки

$$P_0(\theta) = 2i \left\{ k \cos \theta \sin \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n d R_n / (\alpha_n d + 2\alpha) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n d R_n \sin(l(z + \pi n)/d) / (\alpha_n d + 2\alpha) + kd \cos \theta (\sin \alpha - \sin(l\alpha/d))/2\alpha \right\}$$

Таким образом, для расчета диаграммы рассеяния нужно знать амплитуды парциальных волн R_n (коэффициенты рассеяния), которые будут определяться из следующей краевой задачи для полного поля.

В силу симметричности и периодичности решетки полное поле ищем в области $\hat{D} = D_1 + D_2$, где

$$D_1 = \{-d/2 < y < d/2, z > 0\}, \quad D_2 = \{-l/2 < y < l/2, -H < z < 0\}.$$

В области D_1 поле $u(y, z)$ представимо в виде

$$u(y, z) = e^{iky \sin \varphi} \left\{ e^{-ikz \cos \varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{i\gamma_n z + i\alpha_n y} \right\}.$$

В области D_2 поле $u(y, z)$ представимо в виде

$$u(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ a_n e^{-i\Gamma_n(z+H)} + b_n e^{i\Gamma_n(z+H)} \} \cos \beta_n y,$$

где $\Gamma_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}$, $\text{Im} \Gamma_n > 0$. Учитывая выполнение условия (2) на границах $z = -H$, $-l/2 \leq y \leq l/2$ и $y = \pm l/2$, $-H \leq z \leq 0$, получим, что $a_n = b_n$, $\beta_n = 2\pi n/l$, $n \in Z$. Для полного решения задачи нужно потребовать выполнения (2) на границе $z = 0$, $-d/2 \leq y \leq \leq -l/2$, $l/2 \leq y \leq d/2$ и непрерывности $u(y, z)$ и ее нормальной производной на границе $z = 0$, $-l/2 \leq y \leq l/2$.

Краевая задача для полного поля $u(y, z)$ редуцируется к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов R_n и a_n , откуда и определяются коэффициенты рассеяния R_n , необходимые для расчета диаграммы рассеяния решетки:

$$\begin{cases} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Gamma_s a_s A_{ms} (e^{-i\Gamma_s H} - e^{i\Gamma_s H}) / d + \\ + a_m \Delta_m (e^{-i\Gamma_m H} + e^{i\Gamma_m H}) = 2\lambda_{m0}, \\ R_m = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n a_n (e^{-i\Gamma_n H} - e^{i\Gamma_n H}) \lambda_{nm} / \gamma_m d + \\ + k \delta_m \cos \varphi / \gamma_m, \\ A_{ms} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} \lambda_{sn} / \gamma_n, \quad m \in Z, \\ \lambda_{mn} = \begin{cases} 2(-1)^m \mu_n \sin(\mu_n l/2) / (\mu_n^2 - \beta_m^2), \\ |\mu_n| \neq |\beta_m|, \\ l/2, |\mu_n| = |\beta_m| \neq 0, \\ l, |\mu_n| = |\beta_m| = 0, \end{cases} \\ \delta_m = \begin{cases} 0, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0, \end{cases} \quad \Delta_m = \begin{cases} l/2, & m \neq 0, \\ l, & m = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Полученная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_n решается методом «усечений», который позволяет строить приближенные решения исходной задачи с любой степенью точности.

Было проведено численное исследование диаграммы рассеяния решетки по мощности. Для создания делителей пучка лазерного излучения требуется конструировать такие решетки, которые делили бы падающий пучок на заданное число пучков по интенсивности. В случае нормального падения волны на решетку всегда можно поделить падающий пучок на три равных пучка по интенсивности, т. е. для любого значения d/λ можно подобрать соответствующую высоту H/λ . Однако на практике это не совсем удобно, так как отраженный пучок нулевой гармоники будет совпадать с направлением падающей волны. Поэтому удобнее рассматривать случаи, когда падающая волна направлена под углом к решетке и отра-

женные пучки не совпадают с направлением падающей волны. При наклонном падении волны на решетку не при любом значении d/λ можно подобрать высоту канавки H/λ такую, что падающий пучок поделится на три равных пучка.

На рис. 2 и 3 приведена зависимость интенсивности излучения отраженных пучков порядков 0, -1, -2 от высоты канавки для $d/\lambda = 1.22$ и $d/\lambda = 1.31$ и угла падения $\varphi = \pi/4$. Как видно из рисунков, для $d/\lambda = 1.22$ падающий пучок делится на три равных пучка при $H/\lambda = 0.279$, для $d/\lambda = 1.31$ не существует таких H/λ , при которых падающий пучок поделится на три равных пучка по интенсивности.

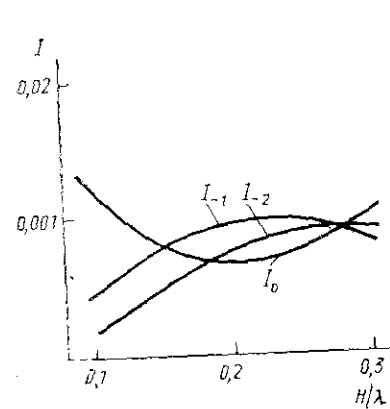


Рис. 2. Зависимость интенсивности излучения I_0, I_{-1}, I_{-2} рассеянного поля решетки от высоты канавки при $d/\lambda = 1.22$, $\varphi = \pi/4$

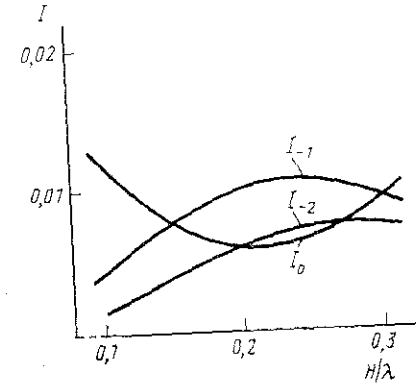


Рис. 3. Зависимость интенсивности излучения I_0, I_{-1}, I_{-2} рассеянного поля решетки от высоты канавки при $d/\lambda = 1.31$, $\varphi = \pi/4$

В заключение можно отметить, что созданный на основе рассматриваемой модели алгоритм позволяет эффективно вычислять диаграмму рассеяния решетки. Предложенная в работе модель является перспективной для расчета делителей пучка, ответвителей, реальных просветляющих покрытий и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончарский А. В., Дмитриев И. В., Попов В. В. Исследование границ применимости метода Кирхгофа при решении задачи синтеза плоской оптической решетки // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1989, № 2. С. 33—39.
2. Скорохватова И. В. Метод расчета возбуждения конечной волноводной решетки // Численные методы электродинамики. Вып. 2. М.: Изд-во МГУ, 1977. С. 7—22.