В.В. Морозов, К.В. Хижняк

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ ОТ РАЗНОСТИ И СУММЫ ДВУХ АКТИВОВ*

1. Введение

Бесконечный американский колл-опцион представляет собой ценную бумагу, держатель которой (инвестор) имеет право ее предъявления в любой момент времени. Рассматривается колл-опцион обмена одной акции на другую (опцион Марграбе [1]), а также пакетный опцион на покупку портфеля, содержащего акции двух видов. Опционы этого вида с конечным сроком действия изучались в [2]. В данной статье получены верхние оценки их стоимостей по методу из [3], где рассматривался альтернативный опцион на максимум из двух активов. Оценки построены на основе интегральных формул для стоимостей опционов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени t, а стоимости активов $S_i(t)$, $i=1,2$, удовлетворяют уравнениям геометрического броуновского движения

$$dS_i(t) = S_i(t)(\alpha_i dt + \sigma_i dz_i(t)), \tag{1}$$

где α_i – средняя доходность, $\sigma_i > 0$ – волатильность i-го актива, а $z_i(t)$, $i=1,2$, – стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции $\rho \in (-1,1)$. Пусть $\delta_i > 0$ – интенсивность выплат дивидендов по i-му активу. Предположим, что получаемые по активу дивиденды немедленно реинвестируются, т.е. на них покупается актив того же вида. Будем считать выполненным условие риск-нейтральности: $r = \alpha_i + \delta_i$, $i=1,2$.

Пусть в начальный момент времени 0 выпускается опцион Маргрnativeбе, позволяющий инвестору в любой момент $t \geq 0$ обменять акцию второго вида на акцию первого вида по цене исполнения $K \geq 0$. Платёж по нему равен $f(S(t)) = (S_1(t) - S_2(t) - K)_+$, где $a_+ = \max(a,0)$ для любого действительного числа a и $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$. Для пакетного опциона платеж равен $f(S(t)) = (S_1(t) + S_2(t) - K)_+$. В случае его предъявления в момент $t \geq 0$ инвестор приобретает портфель из двух акций по цене $K \geq 0$.

Обозначим через $S = (S_1, S_2) = S(0)$ вектор начальных стоимостей активов. Стоимость опциона $F(S)$ в начальный момент времени может

---

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект 11-01-00778а.

быть определена как верхняя грань средних приведенных платежей, взятая по всем решающим правилам предъявления:

$$F(S) = \sup_{\tau} \mathrm{E}\left[\exp(-r\tau) f(S(\tau)) \mid S(0) = S\right], \tag{2}$$

где E – символ математического ожидания, а τ – решающее правило предъявления опциона (марковский момент) [5]. Если для некоторой траектории процесса $S(t)$ решающее правило принимает значение ∞, то в этом случае значение платежа предполагается равным нулю. Оптимальное решающее правило имеет вид $\tau^0 = \min\{t \mid F(S(t)) = f(S(t))\}$ [5]. Инвестор, использующий правило τ^0, предъявляет опцион в момент первого достижения процессом $S(t)$ множества $\mathcal{E} = \{S \in \mathbb{R}_+^2 \mid F(S) = f(S)\}$, называемого множеством немедленного исполнения опциона.

В п.3 изучаются свойства множеств $\mathcal{E}$ для опционов обоих видов. В частности, показано, что их границы задаются неубывающими выпуклыми функциями. В п.4 аппроксимация $\mathcal{E}$ многоугольными множествами позволила получить верхние оценки для стоимостей $F(S)$.

3. Множества немедленного исполнения

Уравнения (1) имеют решения $S_i(t) = S_i \exp(\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i z_i(t),\ t \ge 0,$ где $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \sigma_i^2/2,\ i = 1,2.$ Определим величины

$$S_i^* = \frac{\beta_{\mathrm{i}} K}{\beta_{\mathrm{i}} - 1}, \quad \beta_i = \frac{-\tilde{\alpha}_i + \sqrt{(\tilde{\alpha}_i)^2 + 2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2}, \quad i = 1,2,$$

где S_i^* – порог, определяющий оптимальное решающее правило предъявления американского опциона на i-й актив.

Для рассматриваемых колл-опционов основные свойства множеств $\mathcal{E}$ были получены в [2] при конечном сроке их действия. В утверждениях 1 и 2, приводимых без доказательств, эти свойства формулируются для бесконечных опционов.

Утверждение 1. *Для колл-опциона Марграбе множество немедленного исполнения $\mathcal{E}$ выпукло и удовлетворяет следующим условиям:*

1) Если $S \in \mathcal{E}$, то точка $(S_1, \lambda S_2) \in \mathcal{E}$ для любого числа $\lambda \in [0,1]$.

2) Если $S \in \mathcal{E}$, то точка $\lambda S \in \mathcal{E}$ для любого числа $\lambda \ge 1$.

3) Если $S \in \mathcal{E}$, то $S_1 > S_2 + K$.

4) $\mathcal{E} \cap \{S \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_2 = 0\} = \{S \in \mathbb{R}_+^2 \mid S_1 \in [S_1^*, \infty),\ S_2 = 0\}$.

Утверждение 2. *Для пакетного колл-опциона множество немедленного исполнения* $\mathcal{E}$ *выпукло и*

$$\mathcal{E}\cap\{S\in\mathbb{R}_+^2 \mid S_i=0\}=\{S\in\mathbb{R}_+^2 \mid S_{3-i}\in[S_{3-i}^*,\infty),\ S_i=0\},\ i=1,2.$$

Из утверждения 1 следует, что для опциона МаргрAбе границу множества $\mathcal{E}$ внутри $\mathbb{R}_+^2$ можно задать неубывающей выпуклой функцией $S_1=G(S_2)$. Заметим, что $G(0)=S_1^*$. Нетрудно показать, что график функции G имеет асимптоту $S_1=cS_2+w$, где $c=\inf\limits_{S_2>0}G(S_2)/S_2$ и $w\geq 0$. Функция G выпукла и, следовательно, имеет правую производную G', удовлетворяющую неравенству $S_2G'(S_2)/G(S_2)\leq 1$ для всех $S_2\geq 0$. Чтобы найти параметры асимптоты c и w, а также производную $G'(0)$, нам потребуется интегральная формула для стоимости опциона [2]

$$F(S)=\int_0^\infty \exp(-rt)\int_{M(t)}\left(\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\delta_i S_i\exp(\tilde{\alpha}_i t+\sigma_i\sqrt{t}x_i)-rK\right)\psi(x)dxdt, \qquad (3)$$

где $M(t)=\left\{x=(x_1,x_2)\mid S_1\exp(\tilde{\alpha}_1 t+\sigma_1\sqrt{t}x_1)\geq G(S_2\exp(\tilde{\alpha}_2 t+\sigma_2\sqrt{t}x_2))\right\}$, а

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

– двумерная нормальная плотность. Правую часть в (3) представим в виде комбинации интегралов:

$$F(S)=\delta_1 J_{11}-\delta_2 J_{12}-rJ_{10}, \qquad (4)$$

где $J_{1j}=(jS_1+(1-j)K)\int_0^\infty\exp(-rt)\int_{M(t)}\exp(j(\tilde{\alpha}_1 t+\sigma_1\sqrt{t}x_1))\psi(x)dxdt,\ j=0,1,$

$$J_{12}=S_2\int_0^\infty\exp(-rt)\int_{M(t)}\exp(\tilde{\alpha}_2 t+\sigma_2\sqrt{t}x_2)\psi(x)dxdt.$$

Интегралы J_{10} и J_{11} использовались в [4]. В интеграле J_{1j} показатель экспоненты равен

$$-rt+j(\tilde{\alpha}_1 t+\sigma_1\sqrt{t}x_1)-\frac{(x_1-\rho x_2)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{x_2^2}{2}=$$

$$=-rt+j\alpha_1 t-\frac{\left(x_1-\rho x_2-j\sigma_1\sqrt{t}(1-\rho^2)\right)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{\left(x_2-j\rho\sigma_1\sqrt{t}\right)^2}{2}.$$

После замены $x_1-\rho x_2-j\sigma_1\sqrt{t}(1-\rho^2)=y\sqrt{1-\rho^2},\qquad x_2-j\rho\sigma_1\sqrt{t}=u$

область интегрирования в новых переменных y и u будет задаваться неравенством $y \geq -d_{1j}$, где

$$d_{1j} = \frac{-\ln(G(S_2 \exp((\tilde{\alpha}_2 + j\rho\sigma_1\sigma_2)t + \sigma_2\sqrt{t}u))/S_1) + (\tilde{\alpha}_1 + j\sigma_1^2)t + \rho\sigma_1\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Тогда, используя тождество $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ для функции $\Phi(y)$ нормального распределения и плотность $\varphi(y) = \Phi'(y) = \exp(-y^2/2)/\sqrt{2\pi}$, получим

$$J_{1j} = (jS_1 + (1-j)K)\int_0^{\infty} \exp(-(j\delta_1 + (1-j)r)t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d_{1j})\varphi(u)dudt,\ j = 0,1. \quad (5)$$

В интеграле J_{12} показатель экспоненты равен

$$-rt + \tilde{\alpha}_2 t + \sigma_2\sqrt{t}x_2 - \frac{(x_1 - \rho x_2)^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{x_2^2}{2} = -\delta_2 t - \frac{\left(x_1 - \rho x_2\right)^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{\left(x_2 - \sigma_2\sqrt{t}\right)^2}{2}.$$

Замена переменных $x_1 - \rho x_2 = y\sqrt{1-\rho^2},\ \ x_2 - \sigma_2\sqrt{t} = u$ в интеграле J_{12} приводит к формуле

$$J_{12} = S_2\int_0^{\infty} \exp(-\delta_2 t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d_{12})\varphi(u)dudt, \quad (6)$$

где $d_{12} = \dfrac{-\ln(G(S_2 \exp((\tilde{\alpha}_2 + \sigma_2^2)t + \sigma_2\sqrt{t}u))/S_1) + (\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \rho\sigma_1\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$

Введем обозначения

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2,\ \tilde{\alpha} = \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\sigma^2}{2},\ \hat{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2,$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{(\tilde{\alpha})^2 + 2\delta_2\sigma^2}}{\sigma^2},\ \gamma_{1,2} = \frac{-\hat{\alpha} \pm \sqrt{(\hat{\alpha})^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2},$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{(\tilde{\alpha}_i + \rho\sigma_1\sigma_2) + (-1)^j\sqrt{(\tilde{\alpha}_i + \rho\sigma_1\sigma_2)^2 + 2\delta_{3-i}\sigma_i^2}}{\sigma_i^2},\ i = 1,2,\ j = 1,2.$$

Нам потребуются следующие тождества и интегралы:

$$\tilde{\alpha} - \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 = \hat{\alpha} - \sigma^2,\quad (\tilde{\alpha} + \sigma^2)^2 + 2\delta_1\sigma^2 = (\tilde{\alpha})^2 + 2\delta_2\sigma^2,\ (\hat{\alpha})^2 + 2r\sigma^2 =$$
$$= (\tilde{\alpha} + (i-1)\sigma^2 + (-1)^i(\sigma_i^2 - \rho\sigma_1\sigma_2))^2 + 2(\delta_{3-i} + \alpha_i - \sigma_i^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)\sigma^2,\ i = 1,2;$$

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\delta t + c\sqrt{t}u)}{\sqrt{t}}\varphi\left(au + b\sqrt{t} + \frac{d}{\sqrt{t}}\right)\varphi(u)dudt = \frac{1}{\sqrt{\eta}}\exp\left(-\frac{d\left(b + ac + \sqrt{\eta}\right)}{a^2 + 1}\right),$$

где $\eta = (b+ac)^2 + (-c^2 + 2\delta)(a^2+1) > 0$,

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta \exp(-\delta t)\Phi\left(au + b\sqrt{t} + \frac{d}{\sqrt{t}} \right)\varphi(u)dudt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(a^2+1)\delta}} - 1 \right)\exp\left(-\frac{d\left(b + \sqrt{b^2 + 2(a^2+1)\delta}\right)}{a^2+1} \right) \quad (d > 0,\ \delta > 0).$$

Теорема 1. *Пусть функция* G *задает границу множества* $\mathcal{E}$ *немедленного исполнения колл-опциона Марграбе. Тогда* $G'(0) = \varepsilon_{11}/(\beta_1 - 1)$.

Доказательство. Подставим в формулу (4) соотношение $S_1 = G(S_2)$ и обе части полученного уравнения $G(S_2) - S_2 - K = \delta_1 J_{11} - \delta_2 J_{12} - rJ_{10}$ продифференцируем по переменной S_2, которую затем устремим к нулю.

В результате получим

$$G'(0) - \delta_1 J'_{11}(0) + rJ'_{10}(0) = 1 - \delta_2 J'_{12}(0), \text{ где } J'_{1j}(0) \overset{def}{=} \lim_{S_2 \to 0+} J'_{1j}(S_2),\ j = 0,1,2. \quad (7)$$

Найдем $\delta_2 J'_{12}(0)$. Имеем:

$$J'_{12}(S_2) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(-\delta_2 t)\Phi(d_{12})\varphi(u)dudt + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty S_2 \exp(-\delta_2 t)\varphi(d_{12})d'_{12}\varphi(u)dudt, \quad (8)$$

где

$$d'_{12} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}\left[-\frac{G'(\cdot)\exp((\tilde{\alpha}_2 + \sigma_2^2)t + \rho\sigma_2\sqrt{t}u)}{G(\cdot)} + \frac{G'(S_2)}{G(S_2)} \right].$$

При фиксированных t и u предельное значение подынтегральной функции второго интеграла в (8) равно нулю. В первом интеграле в (8) подынтегральная функция имеет интегрируемую мажоранту $\exp(-\delta_2 t)\varphi(u)$. Используя неравенство $S_2 G'(S_2)/G(S_2) \le 1$, нетрудно показать, что второй интеграл в (8) также имеет интегрируемую мажоранту $D_1 \exp(-\delta_2 t)\varphi(u)/\sqrt{t}$, где D_1 – положительная константа. Поэтому интегралы в (8) сходятся по S_2 равномерно. Отсюда

$$\delta_2 J'_{12}(0) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta_2 \exp(-\delta_2 t)\Phi\left(\frac{(\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \rho\sigma_1\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}(1-\rho^2)} \right)\varphi(u)dudt = 1 - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}}.$$

В работе [3] показано, что левая часть уравнения (7) равна $2G'(0)(r - \alpha_1\beta_1)/(\beta_1\sigma_1^2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}))$. Но $r - \alpha_1\beta_1 = \sigma_1^2\beta_1(\beta_1 - 1)/2$. Поэтому из (7) находим $G'(0) = \varepsilon_{11}/(\beta_1 - 1)$.■

Теорема 2. *Параметры c и w, определяющие асимптоту графика функции G, задаются формулами* $c=\theta_1/(\theta_1-1)$, $w=\gamma_1 K/(\theta_1-1)$.

Замечание. При $K=0$ формула для коэффициента c получена в [6], где доказано, что в этом случае $G(S_2)=cS_2$.

Доказательство. Положим $S_1=G(S_2)$ и устремим S_2 к бесконечности. Выпишем разложения вида $d_{1j}\approx h_{1j}-k_{1j}/S_2$, $j=0,1,2$:

$$d_{10}\approx\frac{\hat{\alpha}t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{w}{cS_2}\cdot\frac{\exp(-\tilde{\alpha}_2 t-\sigma_2\sqrt{t}u)-1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{11}\approx\frac{(\tilde{\alpha}+\sigma^2)t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{w}{cS_2}\cdot\frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2+\rho\sigma_1\sigma_2)t-\sigma_2\sqrt{t}u)-1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{12}\approx\frac{\tilde{\alpha}t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{w}{cS_2}\cdot\frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2+\sigma_2^2)t-\sigma_2\sqrt{t}u)-1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Отсюда $\Phi(d_{1j})\approx\Phi(h_{1j})-(k_{1j}/S_2)\varphi(h_{1j})$, $j=0,1,2$. Определим интегралы

$$H_{1j}=\int_0^\infty\delta_1\int_{-\infty}^\infty\frac{\exp(-\delta_1 t-j((\tilde{\alpha}_2+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\sigma_2\sqrt{t}u))}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}\varphi(h_{11})\varphi(u)\,du\,dt,\ \ j=0,1,$$

$$I_{1j}=\int_0^\infty(j\delta_1+(1-j)r)\exp(-(j\delta_1+(1-j)r)t)\int_{-\infty}^\infty\Phi(h_{1j})\varphi(u)\,du\,dt,\ \ j=0,1,$$

$$H_{12}=\delta_2\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\exp(-\delta_2 t)(\exp(-(\tilde{\alpha}_2+\sigma_2^2)t-\sigma_2\sqrt{t}u)-1)}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}\varphi(h_{12})\varphi(u)\,du\,dt,$$

$$I_{12}=\int_0^\infty\delta_2\exp(-\delta_2 t)\int_{-\infty}^\infty\Phi(h_{12})\varphi(u)\,du\,dt,\ \ h_{10}=\frac{\hat{\alpha}t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$h_{1j}=\frac{(\tilde{\alpha}+(2-j)\sigma^2)t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{t}u}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},\ j=1,2.$$

Используя введенные тождества и формулы для интегралов, находим

$$I_{10}=-\frac{\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2},\ I_{11}=\frac{1-\theta_2}{\theta_1-\theta_2},\ H_{10}=\frac{2\delta_1}{\sigma^2(\theta_1-\theta_2)},\ H_{11}=\frac{2\delta_1}{\sigma^2(\gamma_1-\gamma_2)},$$

$$I_{12}=-\frac{\theta_2}{\theta_1-\theta_2},\ H_{12}=\frac{2\delta_2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}-\frac{1}{\theta_1-\theta_2}\right).$$

Подставим $S_1=G(S_2)$ в интегралы J_{1j} и выпишем следующие разложения с точностью до первого порядка относительно $1/S_2$:

$$\frac{\delta_1 J_{11}}{S_2}\approx\left(c+\frac{w}{S_2}\right)I_{11}-\frac{w(H_{11}-H_{10})}{S_2},\ \ \frac{\delta_2 J_{12}}{S_2}\approx I_{12}-\frac{w}{cS_2}H_{12},\ \ \frac{rJ_{10}}{S_2}\approx\frac{KI_{10}}{S_2}.$$

Подставим $S_1 = G(S_2)$ в уравнение (4) и разделим его на S_2. Используя последние разложения, получим равенство

$$\left(c+\frac{w}{S_2}\right)(1-I_{11}) = 1 - I_{12} - \frac{w(H_{11}-H_{10})}{S_2} + \frac{w}{cS_2}H_{12} + \frac{K(1-I_{10})}{S_2} + o\left(\frac{1}{S_2}\right).$$

Отсюда $c(1-I_{11}) = 1 - I_{12}$, $\quad w\left(1 - I_{11} + H_{11} - H_{10} - \frac{H_{12}}{c}\right) = K(1-I_{10})$ или

$$c = \frac{\theta_1}{\theta_1 - 1}, \quad w\left(\frac{\theta_1 - 1}{\theta_1 - \theta_2} + \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} - \frac{1}{\theta_1 - \theta_2}\right)\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{c}\right)\right) = K\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что

$$\delta_1 - \frac{\delta_2}{c} = \frac{\sigma^2(\theta_1 - 1)}{2}, \quad \frac{\theta_1 - 1}{\theta_1 - \theta_2} - \frac{2}{\sigma^2}\frac{1}{\theta_1 - \theta_2}\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{c}\right) = \frac{\sigma^2\theta_1^2 + 2\tilde{\alpha}\theta_1 - 2\delta_2}{\sigma^2\theta_1(\theta_1 - \theta_2)} = 0.$$

Из второго уравнения в (9) находим $w = \gamma_1 K/(\theta_1 - 1)$.■

Для пакетного колл-опциона границу множества $\mathcal{E}$ внутри $\mathbb{R}_+^2$ можно задать определенной на отрезке $[0, S_2^*]$ невозрастающей выпуклой функцией $S_1 = G(S_2)$, для которой $G(0) = S_1^*$, $G(S_2^*) = 0$. Найдем производные $G'(0)$ и $G'(S_2^*)$. Интегральная формула для стоимости опциона в данном случае выглядит так: $F(S) = \delta_1 J_{11} + \delta_2 J_{12} - rJ_{10}$. Подставим в нее $S_1 = G(S_2)$, продифференцируем уравнение по S_2 и перейдем к пределу при $S_2 \to 0+$. В результате находим $G'(0) - \delta_1 J_{11}'(0) + rJ_{10}'(0) = -1 + \delta_2 J_{12}'(0)$. Отсюда $G'(0) = -\varepsilon_{11}/(\beta_1 - 1)$. Аналогично $G'(S_2^*) = -\varepsilon_{21}/(\beta_2 - 1)$.

4. Верхние оценки стоимостей опционов

В [7] из условия отсутствия арбитража показано, что на множестве немедленного исполнения $\mathcal{E}$ любого опциона, выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_j^2 S_j^2 F_{S_j S_j}''(S) + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 F_{S_1 S_2}''(S) + \sum_{j=1}^{2}\alpha_j S_j F_{S_j}'(S) - rF(S) \le 0.$$

В частности, для точек множества $\mathcal{E}$ опциона Марграбе, где $F(S) = S_1 - S_2 - K$, справедливо неравенство $\delta_1 S_1 - \delta_2 S_2 - rK \ge 0$. Из этого неравенства и построений предыдущего пункта вытекает, что функция $\bar{G}(S_2) = \max(G'(0)S_2 + S_1^*, cS_2 + w, (\delta_2 S_2 + rK)/\delta_1)$ не превосходит функцию $G(S_2)$ (см. рис. 1). Поэтому если в определении множества M функцию G заменить на $\bar{G}$, то получим множество $\bar{M}$, содержащее M.

В точках множества $\bar{M}$ подынтегральная функция в (3) принимает положительные значения. Заменяя в (3) M на $\bar{M}$, находим верхнюю оценку стоимости опциона $\overline{F}(S)$. Пусть интегралы $\overline{J}_{ij}$ получены заменой в интегралах J_{ij} (см. (5) и (6)) в формулах для d_{ij} функции G на функцию $\overline{G}$. Тогда $\overline{F}(S) = \delta_1 \overline{J}_{11} - \delta_2 \overline{J}_{12} - r\overline{J}_{10}$.

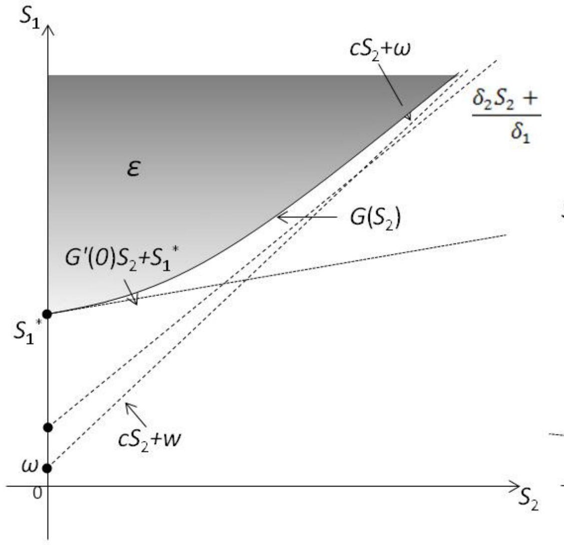

Рис. 1 Область немедленного исполнения опциона Марграбе

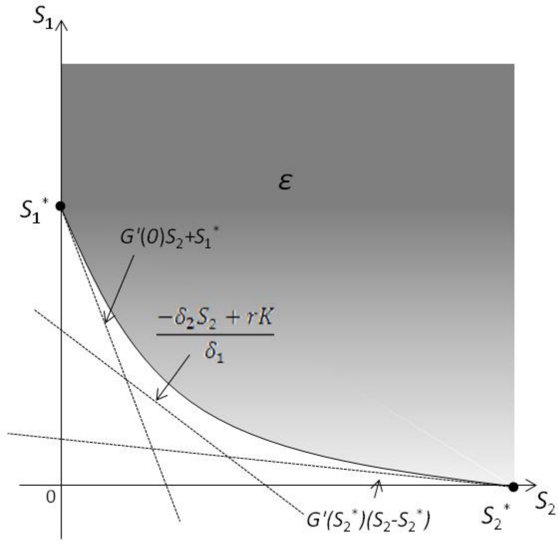

Рис. 2 Область немедленного исполнения пакетного опциона

Для пакетного опциона аналогично можно показать, что функция $\overline{G}(S_2) = \max(G'(0)S_2 + S_1^*,\ G'(S_2^*)(S_2 - S_2^*), (-\delta_2 S_2 + rK)/\delta_1)$ не превосходит функцию $G(S_2)$ (см. рис. 2). После замены функции G на функцию $\overline{G}$ в интегралах J_{ij} получим верхнюю оценку $\overline{F}(S) = \delta_1 \overline{J}_{11} + \delta_2 \overline{J}_{12} - r\overline{J}_{10}$.

5. Пример

Возьмем следующие значения параметров:

$$r = 0{,}05;\ \delta_1 = \delta_2 = 0{,}01;\ \sigma_1 = 0{,}2;\ \sigma_2 = 0{,}1;\ \rho = 0{,}5;\ K = 3.$$

Тогда $c = 3{,}186$; $w = 15{,}694$; $S_1^* = 21{,}95$; $S_2^* = 16{,}83$. В таблице представлены верхние оценки для стоимости $F(S)$ рассматриваемых опционов.

Таблица

Оценки	$S_1 = 22,\ S_2 = 7$	$S_1 = 12,\ S_2 = 7$	$S_1 = 7,\ S_2 = 7$	$S_1 = 7,\ S_2 = 12$
$\overline{F}(S)$ Марграбе	13,398	5,774	2,697	2,166
$\overline{F}(S)$ пакетный	22,99	14,601	10,4655	15,5483

Отметим, что нижние оценки для опциона Марграбе, полученные Д.Л. Муравьем с использованием дифференциального метода, равны соответственно 13,262; 5,717; 2,678 и 2,162.

Литература

1. Margrabe W. The value to exchange one asset for another. Journal of Finance. V. 33. P. 177−186.

2. Broadie M., Detemple J. The valuation of American options on multiple assets// Mathematical Finance. 1997. V. 7. P. 241−285.

3. Vasin A.A., Morozov V.V. Investment decisions under uncertainty and evaluation of American options// International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 2006. V. 15. N. 3. P. 323−336.

4. Морозов В.В., Хижняк К.В. Верхняя оценка бесконечного американского альтернативного опциона на два актива//Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. М: МАКС Пресс, 2011, № 39. С. 98–106.

5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Факты. Модели. Т.3. Теория. М.: ФАЗИС, 1998.

6. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Martingale approach to pricing American options// AUSTIN Bulletin. 1994. V. 24. P. 195–200.

7. Wilmott P., Dewynne J., Howison S. Option pricing. Mathematical models and computation. Oxford: Oxford Financial Press, 1993.