В.В. Морозов, Д.Л. Муравей

СТОИМОСТЬ ОПЦИОНА “LOOKBACK” КАК РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

1. Введение

Опцион европейского типа представляет собой ценную бумагу, покупатель которой имеет право ее предъявления в фиксированный момент времени T с целью получения платежа. Известно [1], что в рамках стандартной диффузионной модели рынка Блэка-Мертона-Шоулса для расчета стоимости опциона применяются два подхода: мартингальный и дифференциальный. В первом подходе стоимость находится вычислением интеграла, представляющего собой среднюю дисконтированную величину платежа по опциону. При втором подходе решается краевая задача для уравнения с частными производными параболического типа. В данной статье для опциона “lookback” показано, что использование преобразования Лапласа при решении краевой задачи позволяет представить стоимость опциона в виде определенного интеграла, который выражается через функцию распределения времени первого достижения процессом броуновского движения заданного уровня.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени t, а стоимость акции $S(t)$ удовлетворяет уравнению геометрического броуновского движения

$$dS(t) = S(t)(\alpha dt + \sigma dz(t)). \qquad (1)$$

Здесь $z(t)$ – стандартный винеровский процесс, $z(0) = 0$, а константы α и σ^2 – математическое ожидание и дисперсия доходности акции $dS(t)/S(t)$. Предположим, что на каждом отрезке времени $[t, t+dt]$ владельцу акции выплачиваются дивиденды в размере $S(t)\delta dt$, где величина $\delta \geq 0$ характеризует интенсивность этих выплат. Будем рассматривать риск-нейтральную модель рынка, для которой $r = \alpha + \delta$, что означает равенство доходности инвестора по депозитному банковскому вкладу и средней доходности акции (включая дивиденды). Предположим, что по-

* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ «Поддержка научных школ», проект НШ-693.2008.1, и гранта РФФИ, проект 08-01-00249.

лучаемые дивиденды немедленно реинвестируются, т.е. на них покупаются новые акции.

Пусть в момент времени $t=0$ выпускается опцион “lookback” на покупку акции в момент T с ценой исполнения $m(T)=\min\limits_{0\le t\le T} S(t)$. Платёж по опциону равен $S(T)-m(T)$. Обозначим через $S=S(t)$, $m=m(t)$ текущую стоимость акции в момент t и ее минимальную стоимость на отрезке $[0,t]$. Стоимость опциона $C(S,m,t)$ может быть определена как приведенная на момент времени t средняя дисконтированная величина платежа по опциону:

$$C(S,m,t)=E[e^{-r(T-t)}(S(T)-m(T))], \tag{2}$$

где E – символ математического ожидания.

В [2] с использованием мартингального подхода получена формула для функции $C(S,m,t)$. В п.4 эта функция будет найдена в другом виде как решение третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности. Сравнение обеих формул позволит найти интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\nu^2\cos\nu x+(1-\mu)\nu\sin\nu x}{(\nu^2+(1-\mu)^2)(\nu^2+\mu^2)}\exp\left(-\frac{\tau\sigma^2\nu^2}{2}\right)d\nu \tag{3}$$

при произвольных x, μ и положительном τ.

3. Формулировка краевой задачи. Из формулы Ито и уравнения Беллмана [1] можно вывести, что функция $C(S,m,t)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C''_{SS}+\alpha S C'_S + C'_t - rC = 0,\ S>m, \\ C(S,m,T)=S-m,\ S>m, \\ C'_m(S,m,t)=0,\ S=m,\ t\ge 0. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что функция $C(S,m,t)$ однородна по переменным S, m, т.е. $C(\lambda S,\lambda m,t)=\lambda C(S,m,t)$ при любых $\lambda>0$. Действительно, из уравнения (1) можно вывести, что $S(T)=S\exp(\tilde\alpha(T-t)+\sigma(z(T)-z(t)))$, где $\tilde\alpha=\alpha-\sigma^2/2$.

Запишем $m(T)$ в виде $m(T)=\min(m,\min\limits_{t\le t'\le T} S\exp(\tilde\alpha(T-t')+\sigma(z(T)-z(t'))))$.

Однородность функции $C(S,m,t)$ теперь вытекает из формулы (2).

Сделаем замену переменных $S/m=e^x$, $t=T-\tau$. Используя однородность $C(S,m,t)$, введём функцию $V(x,\tau)=C(x,1,t)\exp(-\mu x-\lambda\tau)$, где

$$\mu = -\frac{\tilde{\alpha}}{\sigma^2},\ \lambda = -r - \frac{\mu^2\sigma^2}{2}.$$

В результате краевая задача (3) переходит в задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2} V''_{xx} = V'_\tau,\ x > 0,\ \tau > 0, \\ V(x,0) = \exp((1-\mu)x) - \exp(-\mu x),\ x > 0, \\ V'_x(0,\tau) = (1-\mu)V(0,\tau),\ \tau \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

Решение последней задачи будем искать в виде $V(x,\tau) = V_0(x,\tau) + V_1(x,\tau)$, где функция $V_0(x,\tau) = \exp\left((1-\mu)x + \dfrac{(1-\mu)^2\sigma^2\tau}{2}\right)$ удовлетворяет ограничениям задачи (5) с начальным условием $V_0(x,0) = \exp((1-\mu)x)$. Отсюда следует, что функция $V_1(x,\tau)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{2} V''_{1xx} = V'_{1\tau},\ x > 0,\ \tau > 0, \\ V_1(x,0) = -\exp(-\mu x),\ x > 0, \\ V'_{1x}(0,\tau) = (1-\mu)V_1(0,\tau),\ \tau \ge 0. \end{cases} \tag{6}$$

4. Решение краевой задачи

Из формулы, полученной в [2] для $C(S,m,t)$, после указанных замен находим

$$V_1(x,\tau) = \frac{2(1-\mu)}{2\mu-1}\exp\left((1-\mu)x + \frac{(1-\mu)^2\sigma^2\tau}{2}\right)\Phi\left(-\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}} - (1-\mu)\sigma\sqrt{\tau}\right) -$$

$$- \frac{1}{2\mu-1}\exp\left(\mu x + \frac{\mu^2\sigma^2\tau}{2}\right)\Phi\left(-\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}} - \mu\sigma\sqrt{\tau}\right) - \tag{7}$$

$$- \exp\left(-\mu x + \frac{\mu^2\sigma^2\tau}{2}\right)\Phi\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}} - \mu\sigma\sqrt{\tau}\right),$$

где $\mu \neq 1/2$, $\Phi(y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\phi(z)dz$, $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ – функция и плотность стандартного нормального распределения. Если $\mu = 1/2$ (т.е. $r=\delta$), то формула для $V_1(x,\tau)$ получается из (7) предельным переходом при $\mu \to 1/2$. Можно проверить, что функция (7) является решением краевой задачи (6). Для этого полезно использовать представление (7) в виде линейной комбинации трёх решений уравнения теплопроводности, принадлежащих к семейству решений, зависящих от параметра λ_0:

$$\exp(\beta(\lambda_0)x+\lambda_0\tau)\Phi\left(-\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}+\beta(\lambda_0)\sigma\sqrt{\tau}\right),\ \beta(\lambda_0)=\pm\frac{\sqrt{2\lambda_0}}{\sigma},\ \lambda_0\geq 0.$$

Другую формулу для функции $V_1(x,\tau)$ получим, применяя преобразование Лапласа

$$W(x,z)=\int\limits_0^{+\infty}\exp(-zt)V_1(x,\tau)d\tau,\ z=\xi+i\eta,\ \xi>0.$$

Тогда система (6) перейдёт в дифференциальное уравнение с параметром z:

$$\begin{cases}\frac{\sigma^2}{2}W''_{xx}(x,z)-zW(x,z)=-V_1(x,0)=\exp(-\mu x),\\ W_x(0,z)-(1-\mu)W(0,z)=0,\end{cases}$$

решая которое методом вариации постоянной, находим

$$W(x,z)=\frac{\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\sqrt{2z}}{\sigma}-(1-\mu)\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{2z}}{\sigma}\right)}{\left(z-\frac{(1-\mu)^2\sigma^2}{2}\right)\left(z-\frac{\mu^2\sigma^2}{2}\right)}+\frac{\exp(-\mu x)}{\frac{\mu^2\sigma^2}{2}-z}.$$

Далее, воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{N-i\infty}^{N+i\infty}\exp(\tau z)W(x,z)dz,\ N>\frac{\mu^2\sigma^2}{2},$$

получаем решение прямой задачи (6):

$$V_1(x,\tau) = I = -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\nu^2 \cos \nu x + (1-\mu)\nu \sin \nu x}{(\nu^2 + (1-\mu)^2)(\nu^2 + \mu^2)} \exp\left(-\frac{\tau\sigma^2\nu^2}{2}\right) d\nu + R(x,\tau),$$

где

$$R(x,\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \le \mu \le 1, \\ -\dfrac{\exp(\mu^2\sigma^2\tau/2)(\exp(\mu x) + (2\mu - 1)\exp(-\mu x))}{2\mu - 1}, & \mu < 0, \\ \dfrac{2(1-\mu)\exp((1-\mu)x + (1-\mu)^2\sigma^2\tau/2)}{2\mu - 1}, & \mu > 1. \end{cases}$$

Подстановкой проверяется, что найденная функция $V_1(x,\tau)$ действительно является решением задачи (6).

5. Связь с распределением времени первого достижения

Интеграл (3) можно найти, если известен интеграл

$$J(x,\tau) = \int_0^{+\infty} \frac{\nu \sin \nu x}{\nu^2 + \mu^2} \exp\left(-\frac{\tau\sigma^2\nu^2}{2}\right) d\nu, \tag{8}$$

поскольку тогда исходный интеграл можно представить как комбинацию интегралов $J(x,\tau)$ и $J'_x(x,\tau)$ с разными параметрами. В свою очередь, интеграл $J(x,\tau)$ можно записать в виде

$$J(x,\tau) = \frac{\pi}{2}\exp\left(-|\mu| x + \frac{\mu^2\sigma^2\tau}{2}\right)(1 - G(x,\tau)), \tag{9}$$

где функция $G(x,\tau)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 G''_{xx} - |\tilde{\alpha}| G'_x - G'_\tau = 0, \\ G(x,0) = 0, \; x > 0, \\ G(0,\tau) = 1, \; \tau \ge 0. \end{cases} \tag{10}$$

В самом деле, из (9) и (10) для функции $J(x,\tau)$ получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 J''_{xx} = J'_{\tau}, \\ J(x,0) = \frac{\pi}{2}\exp(-|\mu|x),\ x>0, \\ J(0,\tau)=1,\ \ \tau \ge 0. \end{cases} \tag{11}$$

Решение задачи (11) в форме интеграла (8) получается применением преобразования Лапласа.

Покажем, что дифференциальное уравнение в (10) возникает в задаче нахождения распределения времени T_x первого достижения уровня $x>0$ процессом броуновского движения $X(\tau)=|\tilde{\alpha}|\tau+\sigma z(\tau)$, $\tau \ge 0$, где $z(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, $z(0)=0$. Действительно, плотность распределения $g(x,\tau)$ случайной величины T_x удовлетворяет уравнению Колмогорова-Чэпмена $g(x,\tau)=E\big(g(x-dx,\tau-d\tau)\big)$. Из него, используя формулу Ито, получим, что $g(x,\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{2}\sigma^2 g''_{xx}-|\tilde{\alpha}|g'_x-g'_{\tau}=0$, а функция распределения величины T_x

$$G(x,\tau)=P(T_x\le\tau)=\int_0^{\tau} g(x,t)dt$$

является решением задачи (10). При этом $G(x,\tau)$ можно записать в виде (см. [3]) $G(x,\tau)=\Phi\left(p_1\right)+\exp\left(2|\mu|x\right)\Phi\left(p_2\right)$, где

$$p_1=-\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}+|\mu|\sigma\sqrt{\tau},\ p_2=-\frac{x}{\sigma\sqrt{\tau}}-|\mu|\sigma\sqrt{\tau}.$$

Из (9) находим

$$J(x,\tau)=\frac{\pi}{2}\exp\left(\frac{\mu^2\sigma^2\tau}{2}\right)\left[\exp(-|\mu|x)\Phi\left(-p_1\right)-\exp(|\mu|x)\Phi\left(p_2\right)\right].$$

Отметим, что в известном справочнике [4] эта формула отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Факты. Модели. Т.3. Теория. – М.: ФАЗИС, 1998.

2. Gerber H.U., Shiu E.S.W. Pricing lookback options and dynamic guarantees. North American Actuarial Journal. 2003. V.7. N.1. PP. 48-66.

3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1963.

4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 5-е изд. – М.: Наука, 1971.