

## **О МОДЕЛИ ГРИНА РАЗРУШЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ**

При взлете и посадке с крыла самолета сходят вихри, которые образуют два вихревых жгута. Эти вихри могут представлять опасность для самолетов, следующих за пролетевшим [9, 7]. Моделирование движения и разрушения вихрей необходимо для оценки вихревой опасности. Для компьютерного моделирования движения вихрей часто используется метод дискретных вихрей [5, 6], при этом разрушение вихрей учитывается следующим образом: их циркуляция считается не постоянной, а зависящей от времени. Одной из моделей, учитывающих зависимость циркуляции от времени, является модель, предложенная Дж. Грином [1]. Модель Грина описывает разрушение точечных вихрей. В настоящей работе исследуется обобщение модели Грина для случая цилиндрических вихрей, которое применялось для вычисления времени освобождения посадочной глиссады от вихрей. Полученное время освобождения, использовалось для построения оценки эффективности систем вихревого прогноза, например, таких как система определения вихревого интервала (AVOSS) [8].

### **Условные обозначения**

- $l'$  – расстояние между вихревыми жгутами.
- $l$  – размах крыла
- $\Gamma$  – циркуляция вихря
- $\rho$  – плотность воздуха
- $u$  – скорость движения вихрей
- $C_D$  – коэффициент вязкости для твердого тела
- $r_{ij}$  – расстояние между вихрями с номерами  $i$  и  $j$
- $r_0$  – радиус вихря
- $\nu^*$  – коэффициент турбулентной вязкости
- $I$  – импульс, создаваемый двумя цилиндрическими вихрями

## Модель движения вихрей

Для описания движения вихрей, сходящих с крыла самолета, при его посадке, введем следующую систему координат. Пусть  $Ox$  совпадает с направлением движения самолета и направлена вдоль ВПП. Ось  $Oy$  направим вертикально вверх, а ось  $Oz$  направим так, чтобы три оси образовывали правую тройку. Направление оси  $Ox$  совпадает с направлением движения самолета. Пусть  $\vec{k}, \vec{j}$  – единичные орты вдоль осей  $Oy$  и  $Oz$ . Будем рассматривать вихри в плоскости  $x = const$ , перпендикулярной оси  $Ox$ .

Пусть  $(y_i(t), z_i(t))$  – координаты точки пересечения оси  $i$ -го вихря с рассматриваемой плоскостью, а  $\Gamma_i = \Gamma_i(t)$  – циркуляция  $i$ -го вихря, зависящая от времени  $t$ ,  $i = 1, 2$ . Циркуляция  $\Gamma_i$  считается положительной, если вдоль оси  $i$ -го вихря в направлении оси  $Ox$  частицы среды движутся вокруг оси вихря по часовой стрелке.

Предполагается, что воздушная среда представляет собой идеальную несжимаемую жидкость. Тонкий (концентрированный) вихрь с координатами  $(y_i, z_i)$  в соответствии с законом Био-Савара [2] создает движение частиц со скоростью

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} (-\vec{k}(z - z_i) + \vec{j}(y - y_i))$$

где  $r^2 = (z - z_i)^2 + (y - y_i)^2$ . Из закона Био-Савара следуют уравнения движения тонких вихрей.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Gamma_j \frac{z_i - z_j}{r_{ij}^2}, \\ \frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}, \\ y_i(0) = y_i^0, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad i = 1, 2 \end{array} \right.$$

где  $y_i(0) = y_i^0$ ,  $z_i(0) = z_i^0$ ,  $i = 1, 2$ , координаты вихрей в начальный момент времени,

$r_{ij} = \sqrt{(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$  – расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м вихрями. Во всех уравнениях циркуляция рассматривалась не постоянной, а зависящей от времени.

## 2. Модель Грина затухания вихрей

В модели Грина [1] учитываются три типа сил, действующих на вихревой след и приводящих к его ослаблению и разрушению: сила вязкости, турбулентность воздушной среды и выталкивающая сила Архимеда, возникающая при погружении вихрей в более плотные слои атмосферы. Последней силой будем пренебрегать, а первые две определим подробнее.

Предполагается, что оба вихря, составляющие вихревой след, движутся параллельно на расстоянии  $l'$  и заключены в эллипс с полуосями  $1.73 \frac{l'}{2}$  и  $2.09 \frac{l'}{2}$ .

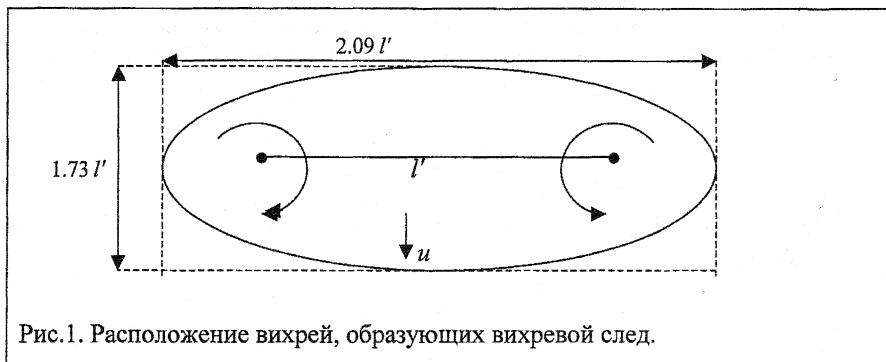


Рис. 1. Расположение вихрей, образующих вихревой след.

Перемещение эллипса в вязкой воздушной среде рассматривается как движение твердого тела, на которое действует сила сопротивления  $C_D \rho u^2 2.09 \frac{l'}{2}$ . В [3] показано, что  $0.2 \leq C_D \leq 1.4$ . При параллельном движении двух вихрей, находящихся на расстоянии  $l'$ , скорость их перемещения связана с их циркуляцией  $\Gamma$  соотношением  $\Gamma = -2\pi l' u$ . Оно вытекает из первого уравнения системы уравнений движения вихрей, где следует взять  $\frac{dy_1}{dt} = u$ ,  $z_1 - z_2 = -l'$ ,  $r_{12} = l'^2$ . При этом не учитывается влияние земли, и отраженные вихри не рассматриваются.

Обозначим через  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  случайные составляющие скорости ветра по направлениям  $Ox, Oy, Oz$ , со средними значениями  $\overline{\xi_x} = \overline{\xi_y} = \overline{\xi_z} = 0$ . Случайные величины  $\xi_x, \xi_y$  и  $\xi_z$  предполагаются независимыми. Дисперсия случайной величины  $\xi_x + \xi_y + \xi_z$  равна  $\overline{\xi_x^2} + \overline{\xi_y^2} + \overline{\xi_z^2}$ . Определим величину  $q$ , как  $q = \sqrt{\overline{\xi_x^2} + \overline{\xi_y^2} + \overline{\xi_z^2}}$ .

Силу вязкости, действующую на вихрь, можно записать в виде

$$C_D \frac{\rho}{2} u^2 2.09l' = C_D \frac{\rho}{2} \frac{\Gamma^2 2.09l'}{(2\pi l')^2} = C_D \frac{\rho \Gamma^2 2.09}{8l' \pi^2}. \quad (1)$$

Турбулентная воздушная среда – второй фактор, вызывающий ослабление вихревого следа. В [4] показано, что под воздействием турбулентности циркуляция  $\Gamma$  меняется по закону

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -0.82 \frac{q}{l'} \Gamma. \quad (2)$$

Сумма правых частей (1) и (2) представляет собой уравнение, соответствующее упрощенной модели Грина

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -C_D \frac{\Gamma^2 2.09}{8l'^2 \pi^2} - 0.82 \frac{q}{l'} \Gamma. \quad (3)$$

Рассмотрим обобщение этой модели для случая цилиндрических вихрей. Рассмотрим единичный слой пространства, расположенный между двумя плоскостями, параллельными плоскости  $yOz$ . Для того, чтобы вывести уравнение для  $\Gamma$  с учетом силы вязкости, необходимо получить формулу для суммарного импульса частиц рассматриваемого слоя, который создается двумя вихрями без учета влияния земли. Найдем величину этого импульса для начального расположения вихрей в плоскости  $xOz$ . Пусть два цилиндрических вихря радиуса  $r_0$  имеют координаты  $\left(0, -\frac{l'}{2}\right)$  и  $\left(0, \frac{l'}{2}\right)$  в плоскости  $yOz$  и имеют циркуляции равные  $\Gamma$  и  $-\Gamma$  соответственно. Скорость перемещения частиц среды под воздействием каждого из этих вихрей равна

$$\vec{v}_1 = \frac{\Gamma}{2\pi \max \left[ \left( y^2 + \left( z + \frac{l'}{2} \right)^2 \right), r_0^2 \right]} \left( -\vec{k} \left( z + \frac{l'}{2} \right) + \vec{j}y \right),$$

$$\vec{v}_2 = \frac{-\Gamma}{2\pi \max \left[ \left( y^2 + \left( z - \frac{l'}{2} \right)^2 \right), r_0^2 \right]} \left( -\vec{k} \left( z - \frac{l'}{2} \right) + \vec{j}y \right)$$

Формула для импульса имеет вид  $\vec{I} = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(z, y) dy dz$ , где  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  — скорость частиц в точке  $(y, z)$ . Импульс — это векторная величина, рассмотрим ее компоненту вдоль оси  $Oz$

$$I_z = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma y}{2\pi \max \left[ \left( y^2 + \left( z - \frac{l'}{2} \right)^2 \right), r_0^2 \right]} - \frac{\Gamma y}{2\pi \max \left[ \left( y^2 + \left( z + \frac{l'}{2} \right)^2 \right), r_0^2 \right]} dy dz.$$

Подынтегральная функция является нечетной по  $y$ , поэтому  $I_z = 0$ . Пусть  $v(y, z)$  — проекция скорости  $\vec{v}(y, z)$  на ось  $Oy$ . Вдоль оси  $Oy$  компонента импульса равна  $I = I_y = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v dy dz$ , где

$$v = v(y, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{z - \frac{l'}{2}}{\max \left[ \left( y^2 + \left( z - \frac{l'}{2} \right)^2 \right), r_0^2 \right]} - \frac{z + \frac{l'}{2}}{\max \left[ \left( y^2 + \left( z + \frac{l'}{2} \right)^2 \right), r_0^2 \right]} \right).$$

### 3. Импульс, создаваемый двумя цилиндрическими вихрями

**Теорема.** Импульс, создаваемый двумя цилиндрическими вихрями одинакового радиуса, не зависит от величины этого радиуса и равен  $I = -\rho \Gamma l'$ , где  $l'$  — расстояние между центрами вихрей.

*Доказательство.* Рассмотрим сначала непересекающиеся цилиндрические вихри.

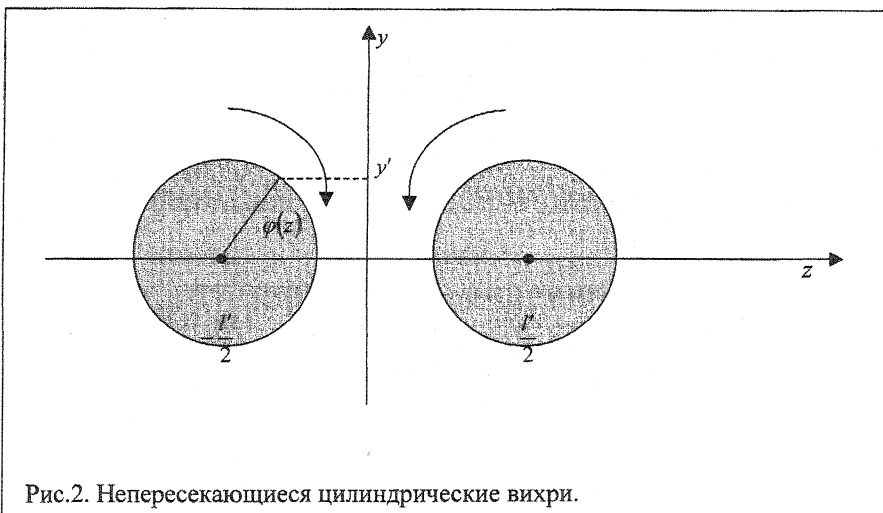


Рис.2. Непересекающиеся цилиндрические вихри.

Найдем величину  $I = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(z, y) dy dz$ . Обозначим внутрененный интеграл через

$$a(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v(z, y) dy.$$

Случай 1. Пусть  $z \notin \left(-\frac{l'}{2} - r_0, -\frac{l'}{2} + r_0\right) \cup \left(\frac{l'}{2} - r_0, \frac{l'}{2} + r_0\right)$ . Тогда

$$a(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{z - \frac{l'}{2}}{\left(z - \frac{l'}{2}\right)^2 + y^2} - \frac{z + \frac{l'}{2}}{\left(z + \frac{l'}{2}\right)^2 + y^2} \right] dy =$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \pi \operatorname{sgn}\left(z - \frac{l'}{2}\right) - \pi \operatorname{sgn}\left(z + \frac{l'}{2}\right) \right] = \begin{cases} 0, & z \in \left(-\infty, -\frac{l'}{2} - r_0\right) \\ -\Gamma, & z \in \left[-\frac{l'}{2} + r_0, \frac{l'}{2} - r_0\right] \\ 0, & z \in \left(\frac{l'}{2} + r_0, \infty\right) \end{cases}.$$

Случай 2. Пусть  $z \in \left[-\frac{l'}{2} - r_0, -\frac{l'}{2} + r_0\right]$ . Положим  $y' = \sqrt{r_0^2 - \left(z - \frac{l'}{2}\right)^2}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 a(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \int_{|y| \geq y'} \frac{z - \frac{l'}{2}}{\left(z - \frac{l'}{2}\right)^2 + y^2} dy + \int_{|y| \leq y'} \frac{z - \frac{l'}{2}}{r_0^2} dy - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z + \frac{l'}{2}}{\left(z + \frac{l'}{2}\right)^2 + y^2} dy \right] = \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{2\left(z - \frac{l'}{2}\right)}{\left|z - \frac{l'}{2}\right|} \operatorname{arctg} \frac{y}{\left|z - \frac{l'}{2}\right|} \Big|_{y'}^{\infty} + \frac{2\left(z - \frac{l'}{2}\right)y'}{r_0^2} - \pi \frac{z + \frac{l'}{2}}{\left|z + \frac{l'}{2}\right|} \right] = \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{z - \frac{l'}{2}}{\left|z - \frac{l'}{2}\right|} (\pi - 2\varphi(z)) + \frac{2}{r_0^2} \left(z - \frac{l'}{2}\right) \sqrt{r_0^2 - \left(z - \frac{l'}{2}\right)^2} - \pi \right],
 \end{aligned}$$

где  $\varphi(z)$  — величина угла между радиусом левого круга, проведенным в точку  $(y', z)$ , и осью  $Oz$ .

Случай 3. Пусть  $z \in \left[\frac{l'}{2} - r_0, \frac{l'}{2} + r_0\right]$ . Аналогично получим

$$a(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ -\frac{z + \frac{l'}{2}}{\left|z + \frac{l'}{2}\right|} (\pi - 2\varphi(z)) - \frac{2}{r_0^2} \left(z + \frac{l'}{2}\right) \sqrt{r_0^2 - \left(z + \frac{l'}{2}\right)^2} - \pi \right].$$

На объединении отрезков  $\left[-\frac{l'}{2} - r_0, -\frac{l'}{2} + r_0\right] \cup \left[\frac{l'}{2} - r_0, \frac{l'}{2} + r_0\right]$  функция  $\varphi(z)$  четная, а  $a(z) + \frac{\Gamma}{2}$  нечетная. Поэтому

$$\int_{-\frac{l'}{2} - r_0}^{-\frac{l'}{2} + r_0} a(z) dz + \int_{\frac{l'}{2} - r_0}^{\frac{l'}{2} + r_0} a(z) dz = -4 \frac{\Gamma}{2} r_0 = -2\Gamma r_0.$$

С другой стороны, из формулы, полученной для  $a(z)$  в случае 1 получаем

$$\int_{-l'/2+r_0}^{l'/2-r_0} a(z) dz = -\Gamma l' + 2\Gamma r_0.$$

Поэтому  $\int_{-\infty}^{\infty} a(z) dz = -\Gamma l'$  и  $I = -\rho \Gamma l'$ .

Рассмотрим теперь пересекающиеся цилиндрические вихри.

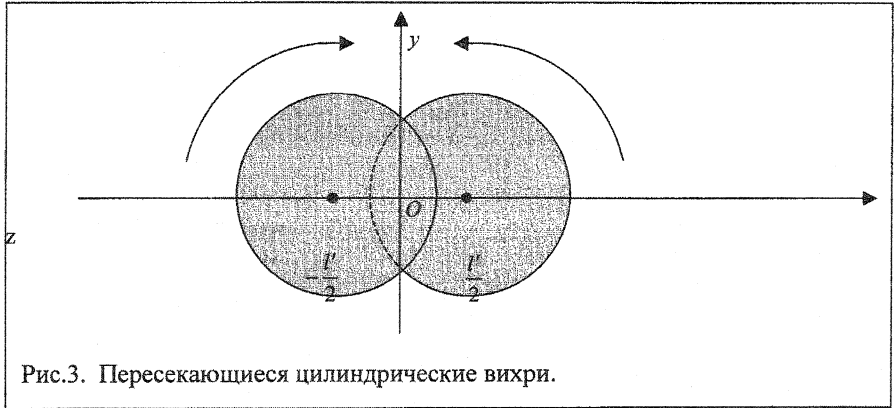


Рис.3. Пересекающиеся цилиндрические вихри.

Положим

$$f_1(y, z) = \frac{z - \frac{l'}{2}}{\max \left[ y^2 + \left( z - \frac{l'}{2} \right)^2, r_0^2 \right]},$$

$$f_2(y, z) = \frac{z + \frac{l'}{2}}{\max \left[ y^2 + \left( z + \frac{l'}{2} \right)^2, r_0^2 \right]},$$

$$f(y, z) = f_1(y, z) - f_2(y, z).$$

Поскольку  $f(y, z) = f(-y, z) = f(y, -z) = f(-y, -z)$ , то достаточно рассмотреть поведение функции  $f(y, z)$ , только в первой координатной четверти и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) dy dz = 4 \int_{y, z \geq 0} f(y, z) dy dz.$$



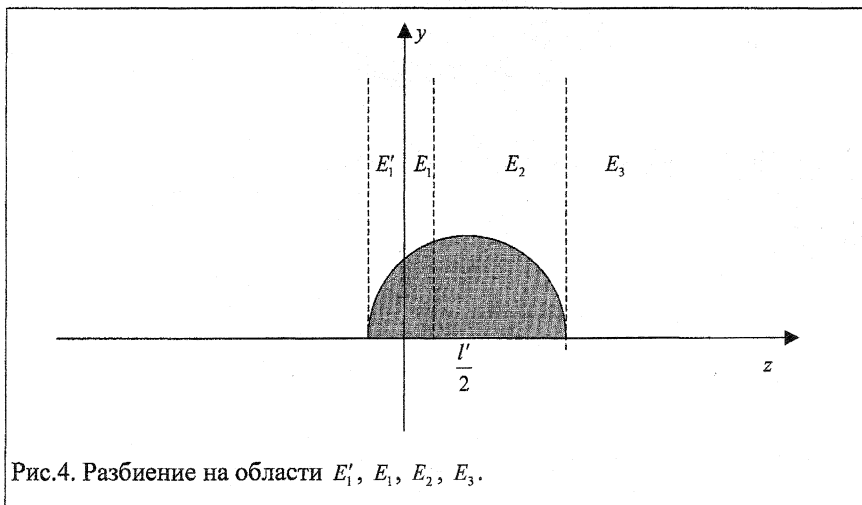
Рассмотрим на плоскости следующие области:

$$E_1 = \left\{ (z, y) \mid 0 \leq z \leq r_0 - \frac{l'}{2}, y \geq 0 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (z, y) \mid r_0 - \frac{l'}{2} \leq z \leq \frac{l'}{2} + r_0, y \geq 0 \right\},$$

$$E_3 = \left\{ (z, y) \mid \frac{l'}{2} + r_0 \leq z \leq +\infty, y \geq 0 \right\},$$

$$E_1' = \left\{ (z, y) \mid \frac{l'}{2} - r_0 \leq z \leq \frac{l'}{2} - r_0, y \geq 0 \right\}.$$



Отсюда

$$\int_{y, z \geq 0} f(y, z) dy dz = \int_{E_1 \cup E_2 \cup E_3} f(y, z) dy dz$$

Из формулы, полученной для  $a(z)$  в случае 1 следует, что

$$\int_{E_3} f(y, z) dy dz = 0$$

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(y, z) dy dz = \int_{E_1 \cup E_2} f_1(y, z) - f_2(y, z) dy dz$$

Так как функция  $f_1$  нечетная относительно  $z = \frac{l'}{2}$ , т.е.  $f_1(y, z) = f(y, l' - z)$ ,

то  $\int_{E_1 \cup E_2 \cup E_1'} f_1(y, z) dy dz = 0$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \cup E_2} f_1(y, z) dy dz &= \int_{E_1 \cup E_2 \cup E_1'} f_1(y, z) dy dz - \int_{E_1'} f_1(y, z) dy dz = - \int_{E_1'} f_1(y, z) dy dz, \\ &- \int_{E_1 \cup E_2} f_2(y, z) dy dz = - \int_{E_1} f_2(y, z) dy dz - \int_{E_2} f_2(y, z) dy dz, \\ &- \int_{E_1'} f_1(y, z) dy dz = \int_{E_1} f_2(y, z) dy dz \end{aligned}$$

При замене переменных  $z' = -z$ , функция  $f_1$  перейдет в  $f_2$ , а область  $E_1'$  перейдет в  $E_1$ . Таким образом,

$$\int (f_1 - f_2) dy dz = -4 \int_{E_2} f_2 dy dz = -4 \frac{\pi}{2} \left( \frac{l'}{2} + r_0 - d \right) = -2\pi l',$$

$$I = \frac{\rho \Gamma}{2\pi} (-2\pi l') = -\Gamma \rho l',$$

т.е. импульс не зависит от радиуса вихря. Теорема доказана.

Из полученного равенства  $I = -\Gamma \rho l'$  следует уравнение для  $\Gamma$ :

$$\frac{dI}{dt} = -\rho l' \frac{d\Gamma}{dt}. \quad (4)$$

Если в уравнение (4) подставить формулу (3) и решить его с начальными условиями  $\Gamma(0) = \Gamma_0$ , то получим зависимость циркуляции от времени

$$\Gamma(t) = \frac{0.82 \frac{q}{l'} e^{-0.82 \frac{q}{l'} t}}{\frac{1}{\Gamma_0} \left( 0.82 \frac{q}{l'} \right) + \left( C_D \frac{2.09}{8l'^2 \pi^2} \right) - \left( C_D \frac{2.09}{8l'^2 \pi^2} \right) e^{-0.82 \frac{q}{l'} t}}$$

Для случая вязкой несжимаемой среды уменьшение скорости движения частиц под воздействием прямолинейного концентрированного вихря учитывается при помощи множителя  $\left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right)$ , на который следует умножить, полученную зависимость.

Авторы благодарят А.С. Белоцерковского за ценные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. G.C. Green, An Approximate Model of Vortex Decay in the Atmosphere. Journal of Aircraft, Vol.23, July 1986.
2. Л.Н.Седов, Механика сплошной среды. Т. II. – М.: Наука, 1976.
3. B.W. Jr. McCormick, Aerodynamics of V/STOL Flight, Academic Press, New York, 1967.
4. J.J. Robinson, A Simulation-Based Study of the Impact of Aircraft Wake Turbulence Weight Categories on Airport Capacity. Air Traffic Management Research Boeing Commercial Airplane Group.
5. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K., Method of Discrete Vortices. Boca Raton: CRC Press, 1994.
6. Белоцерковский С.М., Скоболов Б.Ю. Метод дискретных вихрей и турбулентность. Препринт № 10-93. Институт теоретической и прикладной механики. Новосибирск, 1993.
7. Computing the Danger Zone Radius around a Vortex, Kalyadina T.V., Morozov V.V., Computational Mathematics and Modeling, Volume 14, Number 4, October-December, 2003.
8. D.A. Hinton. Aircraft Vortex Spacing System (AVOSS) Conceptual Design. NASA TM-110184, August 1995.
9. R.A. Stuever, G.C. Green, An Analysis of Relative Wake-Vortex Hazards for Typical Transport Aircraft. 32<sup>nd</sup> Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, January 10-13, 1994/Reno, NV. AIAA 94-0810.