В.В. Морозов, К.В. Хижняк

ОЦЕНКА СТОИМОСТИ АМЕРИКАНСКОГО ДВУСТОРОННЕГО ОПЦИОНА МАРГРАБЕ С КОНЕЧНЫМ СРОКОМ ДЕЙСТВИЯ*

1. Введение

Американский опцион представляет собой ценную бумагу, держатель которой (инвестор) имеет право ее предъявления в любой момент времени $t \in [0,T]$. Рассматривается опцион обмена любого из двух активов на другой актив. Опцион имеет цену исполнения K_1 (или K_2) при обмене второго актива на первый (или первого на второй). Назовем его двусторонним опционом Марграбе в отличие от одностороннего опциона [1], позволяющего обменивать только второй актив на первый. В данной работе обобщаются результаты из [3], где рассматривался двусторонний опцион Марграбе с $T=\infty$. Верхняя оценка стоимости опциона найдена путем замены в интегральной формуле стоимости множества немедленного исполнения на его аппроксимацию многоугольными множествами по методу из [2]. Нижняя оценка построена методом Монте-Карло с использованием указанной аппроксимации в качестве решающего правила предъявления опциона.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени, а стоимости активов $S_i(t)$, $i=1,2,$ удовлетворяют уравнениям геометрического броуновского движения

$$dS_i(t) = S_i(t)(\alpha_i dt + \sigma_i dz_i(t)), \tag{1}$$

где α_i − средняя доходность, $\sigma_i > 0$ − волатильность i-го актива, а $z_i(t),\ i=1,2,$ − стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции ρ. Пусть $\delta_i > 0$ − интенсивность выплат дивидендов по i-му активу. Предположим, что выполнено условие риск-нейтральности: $r = \alpha_i + \delta_i,\ i=1,2.$ Пусть в момент времени $t=0$ выпускается двусторонний опцион Марграбе. Платеж по опциону в момент t его предъявления равен $f(S(t)) = \max_{i=1,2}(S_i(t) - S_{3-i}(t) - K_i)^+$, где $a^+ = \max(a,0)$ для любого действительного числа a и $S(t) = (S_1(t), S_2(t))$.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (код проекта 14-01-91163 ГФЕН_а).

Положим $S=(S_1,S_2)$. Стоимость опциона $F(S,t)$ в момент времени t определяется как верхняя грань средних приведенных на момент t платежей, взятая по всем решающим правилам предъявления опциона (моментам остановки) τ со значениями из отрезка $[t,T]$ [4]:

$$F(S,t)=\sup_{\tau}\mathrm{E}\left[\exp(-r(\tau-t)f(S(\tau))\,|\,S(t)=S\right],$$

где E – символ математического ожидания. Оптимальное решающее правило на отрезке $[0,T]$ имеет вид $\tau^*=\min\left[\min\{t\,|\,F(S(t),t)=f(S(t))\},T\right]$ [4]. Инвестор, использующий решающее правило τ^*, предъявляет опцион либо в момент первого достижения процессом $S(t)$ множества немедленного исполнения $\mathcal{E}(t)=\{S\in\mathbb{R}_+^2\,|\,F(S,t)=f(S)\}$, либо в момент T.

В п.3 сформулированы свойства множества $\mathcal{E}(t)$, обоснование которых см. в [5,6]. В п.4 получены оценки стоимости $F(S,0)$.

3. Свойства множества немедленного исполнения

Уравнения (1) имеют решения $S_i(t)=S_i(0)\exp(\tilde{\alpha}_i t+\sigma_i z_i(t)),\ t\in[0,T],$ где $\tilde{\alpha}_i=\alpha_i-\sigma_i^2/2,\ i=1,2.$ Пусть без потери общности $\Delta=(K_1-K_2)/2>0.$ Множество немедленного исполнения $\mathcal{E}(t)$ двустороннего опциона Маргребе обладает следующими свойствами, приводимыми здесь без доказательств:

1. При каждом $t\in[0,T)$ множество немедленного исполнения $\mathcal{E}(t)$ представимо в виде объединения двух выпуклых подмножеств $\mathcal{E}_i(t)=\{S\in\mathcal{E}(t)|\,S_i-S_{3-i}-K_i>0\},\ i=1,2,$ разделенных между собой полосой $\{S\in\mathbb{R}_+^2\,|\,S_1-K_1\le S_2\le S_1+K_2\}$.

2. Граница множества $\mathcal{E}_1(t)$ внутри четверти $\mathbb{R}_+^2$ задается функцией вида $S_1=G_1(S_2,t)=\min\{S_1'\,|\,F(S_1',S_2,t)=S_1'-S_2-K_1\}.$ Функция $G_1(S_2,t)$ возрастает и выпукла по S_2 и убывает по t (см. [6]). Аналогичная функция $S_2{=}G_2(S_1,t)$ задает границу множества $\mathcal{E}_2(t)$. При этом $G_i(0,t){=}\min\{S_i'\,|\,F_i(S_i',t)=S_i'-K_i\}$, где $F_i(S_i,t)$ − стоимость американского опциона на i-й актив в момент t.

3. При каждом $t\in[0,T)$ графики функций $G_i(S_{3-i},t)$ имеют асимптоты вида $S_i=c_i(t)S_{3-i}+w_i(t),$ где

$$c_1(t)=\inf_{S_2>0}(G_1(S_2,t)-\Delta)/S_2\ge 1,\ c_2(t)=\inf_{S_1>\Delta}G_2(S_1,t)/(S_1-\Delta)\ge 1$$

и $w_1(t)\ge\Delta,\ w_2(t)\ge -c_2(t)\Delta.$

Функции $G_i(S_{3-i},t)$ имеют правые производные $\partial G_i(S_{3-i},t)/\partial S_{3-i}$, которые обозначим $G_i'(S_{3-i},t)$. Займемся аппроксимацией множеств $\mathcal{E}_1(0)$ и $\mathcal{E}_2(0)$. Нахождение параметров $c_i=c_i(0),\ w_i=w_i(0),\ i=1,2,$ и производных

$G_i'(S_{3-i},0),\ i=1,2,$ основано на использовании интегральной формулы для стоимости опциона [6]

$$F(S,0)=C(S,0)+\sum_{i=1}^{2}\int_0^T \exp(-rt)\int_{M_i(t)}[\delta_i S_i\exp(\tilde{\alpha}_i t+\sigma_i\sqrt{t}x_i)-$$
$$-\delta_{3-i}S_{3-i}\exp(\tilde{\alpha}_{3-i}t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}x_{3-i})-rK_i]\psi(x)dxdt, \qquad (3)$$

где $C(S,0)=\exp(-rT)\mathrm{E}[f(S(T))]$ − стоимость соответствующего европейского двустороннего опциона Марграбе, при $x=(x_1,x_2)$

$$M_i(t)=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid S_i\exp(\tilde{\alpha}_i t+\sigma_i\sqrt{t}x_i)\ge G_i(S_{3-i}\exp(\tilde{\alpha}_{3-i}t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}x_{3-i}),t)\right\},\ i=1,2,$$

а $$\psi(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)-$$

двумерная нормальная плотность. Правую часть в (3) представим в виде

$$F(S,0)=C(S,0)+\delta_1J_{11}-\delta_2J_{12}-rJ_{10}+\delta_2J_{21}-\delta_1J_{22}-rJ_{20}, \qquad (4)$$

где

$$J_{i2}=S_{3-i}\int_0^T\exp(-rt)\int_{M_i(t)}\exp(\tilde{\alpha}_{3-i}t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}x_{3-i}))\psi(x)dxdt,\ i=1,2,$$

$$J_{ij}=(jS_i+(1-j)K_i)\int_0^T\exp(-rt)\int_{M_i(t)}\exp(j(\tilde{\alpha}_i t+\sigma_i\sqrt{t}x_i))\psi(x)dxdt,\ i=1,2,\ j=0,1.$$

Пусть $\Phi(y)$ − функция стандартного нормального распределения, а $\varphi(y)=\Phi'(y)=\exp(-y^2/2)/\sqrt{2\pi}$ − его плотность. Интегралы J_{ij} при $i=1,2,\ j=0,1,$ можно преобразовать к виду (см. [5])

$$J_{ij}=(jS_i+(1-j)K_i)\int_0^T\exp(-(j\delta_i+(1-j)r)t)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(d_{ij})\varphi(u)dudt,$$

где

$$d_{ij}=\frac{-\ln(G_i(S_{3-i}\exp((\tilde{\alpha}_{3-i}+j\rho\sigma_1\sigma_2)t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}u),t)/S_i)+(\tilde{\alpha}_i+j\sigma_i^2)t+\rho\sigma_i\sqrt{t}u}{\sigma_i\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Аналогично

$$J_{i2}=S_{3-i}\int_0^T\exp(-\delta_{3-i}t)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(d_{i2})\varphi(u)dudt,\ i=1,2,$$

где

$$d_{i2}=\frac{-\ln(G_i(S_{3-i}\exp((\tilde{\alpha}_{3-i}+\sigma_{3-i}^2)t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}u),t)/S_i)+(\tilde{\alpha}_i+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\rho\sigma_i\sqrt{t}u}{\sigma_i\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Интегралы J_{ij}, в которых подставлено соотношение $S_1 = G_1(S_2, 0)$, будем записывать как $J_{ij}(S_2)$. Введем обозначения:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2,\ \tilde{\alpha} = \alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\sigma^2}{2},\ \hat{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2,$$

$$d_i(S_i) = \frac{\ln(S_i / K_i) + (\tilde{\alpha}_i + \sigma_i^2)T}{\sigma_i\sqrt{T}},\ \tilde{d}_i(S_i) = \frac{\ln(S_i / K_i) + (\tilde{\alpha}_i + \rho\sigma_1\sigma_2)T}{\sigma_i\sqrt{T}},\ i = 1,2,$$

$$s_i(x_i) = S_i \exp(\tilde{\alpha}_i T + \sigma_i\sqrt{T}x_i),\ D_i = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid s_i(x_i) - s_{3-i}(x_{3-i}) - K_i \geq 0\},\ i = 1,2.$$

Нам потребуются следующие тождества и интегралы:

$$\tilde{\alpha} - \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 = \hat{\alpha} - \sigma^2,\quad (\tilde{\alpha} + \sigma^2)^2 + 2\delta_1\sigma^2 = (\tilde{\alpha})^2 + 2\delta_2\sigma^2,\quad (\hat{\alpha})^2 + 2r\sigma^2 =$$
$$= (\tilde{\alpha} + (i-1)\sigma^2 + (-1)^i(\sigma_i^2 - \rho\sigma_1\sigma_2))^2 + 2(\delta_{3-i} + \alpha_i - \sigma_i^2 + \rho\sigma_1\sigma_2)\sigma^2,\ i = 1,2;$$

$$I(a,b,c,d,\delta) = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\delta t + c\sqrt{t}u)}{\sqrt{t}} \varphi\left(au + b\sqrt{t} + \frac{d}{\sqrt{t}}\right)\varphi(u)dudt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\eta}}\exp\left(-\frac{d(b+ac)}{a^2+1}\right)\left[\exp\left(-\frac{|d|\sqrt{\eta}}{a^2+1}\right)\Phi\left(\sqrt{\frac{\eta T}{a^2+1}} - \frac{|d|}{\sqrt{(a^2+1)T}}\right) - \right.$$
$$\left. - \exp\left(\frac{|d|\sqrt{\eta}}{a^2+1}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\eta T}{a^2+1}} - \frac{|d|}{\sqrt{(a^2+1)T}}\right)\right],$$

где $\eta = (b+ac)^2 + (-c^2 + 2\delta)(a^2+1) > 0$,

$$J(a,b,d,\delta) = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \delta \exp(-\delta t)\Phi\left(au + b\sqrt{t} + \frac{d}{\sqrt{t}}\right)\varphi(u)dudt =$$
$$= h(d) - \exp(-\delta T)\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(b\sqrt{T} + \frac{d}{\sqrt{T}}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{\eta(0)}} - 2h(d) + 1\right)\exp\left(-\frac{db + d\sqrt{\eta(0)}}{a^2+1}\right)\Phi\left(\sqrt{\frac{\eta(0)T}{a^2+1}} - \frac{d}{\sqrt{(a^2+1)T}}\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{\eta(0)}} + 2h(d) - 1\right)\exp\left(-\frac{db - d\sqrt{\eta(0)}}{a^2+1}\right)\Phi\left(-\sqrt{\frac{\eta(0)T}{a^2+1}} - \frac{d}{\sqrt{(a^2+1)T}}\right),$$

где $\delta > 0,\ d \geq 0,\ h(0) = 1/2,\ h(d) = 1$ при $d > 0$,

$$P_1(a,b,c,d) = \int\limits_{c+ax_1+bx_2\geq 0} \exp(dx_1)\psi(x)dx = \exp\left(\frac{d^2}{2}\right)\Phi\left(\frac{c + (a+b\rho)d}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}}\right), \qquad (5)$$

$$P_2(a,b,c,d)=\int\limits_{c+ax_1+bx_2\ge 0}\exp(dx_2)\psi(x)dx=\exp\left(\frac{d^2}{2}\right)\Phi\left(\frac{c+(a\rho+b)d}{\sqrt{a^2-2\rho ab+b^2}}\right). \qquad (6)$$

Лемма 1. *Справедливо следующее равенство для производной:*

$$C'(G_1(S_2,0),S_2,0)|_{S_2=0}=e^{-\delta_1 T}G_1'(0,0)\Phi(d_1(G_1(0,0)))-e^{-\delta_2 T}\Phi(\tilde d_1(G_1(0,0))).$$

Доказательство. Стоимость $C(S,0)$ определяется по формуле

$$C(S,0)=e^{-rT}\mathrm{E}[f(S(T))]=e^{-rT}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{D_i}(s_i(x_i)-s_{3-i}(x_{3-i})-K_i)\psi(x)dx. \qquad (7)$$

Здесь второй интеграл бесконечно мал относительно S_2, поскольку

$$\int\limits_{D_2}(s_2(x_2)-s_1(x_1)-K_2)\psi(x)dx\le\int\limits_{s_2(x_2)\ge K_2}s_2(x_2)\psi(x)dx=S_2e^{\alpha_2 T}\Phi(d_2(S_2))=o(S_2).$$

В первом интеграле подынтегральная функция обращается в нуль на границе множества D_1. Поэтому производная $C'(G_1(S_2,0),S_2,0)$ равна

$$e^{-rT}\int\limits_{D_1}\left[G_1'(S_2,0)\exp(\tilde\alpha_1T+\sigma_1\sqrt{T}x_1)-\exp(\tilde\alpha_2T+\sigma_2\sqrt{T}x_2)\right]\psi(x)dx.$$

Этот интеграл лишь на бесконечно малую по S_2 отличается от интеграла

$$e^{-rT}\int\limits_{s_1(x_1)\ge K_1}\left[G_1'(S_2,0)\exp(\tilde\alpha_1T+\sigma_1\sqrt{T}x_1)-\exp(\tilde\alpha_2T+\sigma_2\sqrt{T}x_2)\right]\psi(x)dx,$$

который при $S_2=0$ приводит к формуле (7) (см. (5) и (6)). ■

Определим величины

$$a=\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},\ r_i=r-\tilde\alpha_i,\ \zeta_i=\frac{1}{\sigma_i\sqrt{1-\rho^2}},\ b_i=\tilde\alpha_i\zeta_i,\ b_i'=(\tilde\alpha_i+\sigma_i^2)\zeta_i,$$

$$b_i''=(\tilde\alpha_i+\rho\sigma_1\sigma_2)\zeta_i,\ \lambda_i=\frac{rK_i}{G_i(0,0)},\ \delta_{i,3-i}=\delta_i-\tilde\alpha_{3-i}-\rho\sigma_1\sigma_2,\ i=1,2,$$

$$\Lambda_{12}'=I(a,b_1',\sigma_2,0,\delta_{12})-I(a,b_1',0,0,\delta_1),\ \Lambda_{12}=I(a,b_1,\sigma_2,0,r_2)-I(a,b_1,0,0,r),$$

$$\Lambda_{21}'=I(a,b_2',\sigma_1,0,\delta_{21})-I(a,b_2',0,0,\delta_2),\ \Lambda_{21}=I(a,b_2,\sigma_1,0,r_1)-I(a,b_2,0,0,r),$$

$$d(c)=\frac{\ln(c)+(\tilde\alpha+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},\ \tilde d(c)=\frac{\ln(c)+\tilde\alpha T}{\sigma\sqrt{T}},\ \hat d(c)=\frac{\ln(c)+\hat\alpha T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Теорема 1. *Пусть функции $G_i(S_2,0)$ задают границы множеств $\mathcal{E}_i(0)$ немедленного исполнения двустороннего опциона Марграбе. Тогда*

$$G_1'(0,0)=\frac{1-J(a,b_1'',0,\delta_2)-\exp(-\delta_2T)\Phi(\tilde d_1(G_1(0,0)))}{1-J(a,b_1',0,\delta_1)+\delta_1\zeta_1\Lambda_{12}'-\lambda_1\zeta_1\Lambda_{12}-\exp(-\delta_1T)\Phi(d_1(G_1(0,0)))}.$$

Формула для $G_2'(0,0)$ получается из $G_1'(0,0)$ перестановкой индексов 1,2.

Доказательство. Подставим в (4) $S_1=G_1(S_2,0)$. Уравнение

$$G_1(S_2,0)-S_2-K_1=C(G_1(S_2,0),S_2,0)+$$
$$+\delta_1 J_{11}(S_2)-\delta_2 J_{12}(S_2)-rJ_{10}(S_2)+\delta_2 J_{21}(S_2)-\delta_1 J_{22}(S_2)-rJ_{20}(S_2)$$

продифференцируем по переменной S_2 и устремим S_2 к нулю. В результате получим

$$G_1'(0,0)-1=C'(G_1(S_2,0),S_2,0)|_{S_2=0}+\delta_1 J_{11}'(0)-\delta_2 J_{12}'(0)-rJ_{10}'(0), \qquad (8)$$

поскольку $d_{2j}\to-\infty$ при $S_2\to 0$ и $J_{2j}'(0)=0,\ j=0,1,2.$ Далее,

$$\delta_1 J_{11}'(0)=\delta_1 G_1'(0,0)\left[\int_0^T \exp(-\delta_1 t)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\rho\sigma_1 u\sqrt{t}+(\tilde{\alpha}_1+\sigma_1^2)t}{\sigma_1\sqrt{t(1-\rho^2)}}\right)\varphi(u)dudt-\right.$$
$$\left.-\zeta_1\int_0^T\frac{\exp(-\delta_1 t)}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\rho\sigma_1 u\sqrt{t}+(\tilde{\alpha}_1+\sigma_1^2)t}{\sigma_1\sqrt{t(1-\rho^2)}}\right)\left(e^{(\tilde{\alpha}_2+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\sigma_2 u\sqrt{t}}-1\right)\varphi(u)dudt\right]=$$
$$=G_1'(0,0)[J(a,b_1',0,\delta_1)-\delta_1\zeta_1\Lambda_{12}'],$$

$$\delta_2 J_{12}'(0)=\delta_2\int_0^T e^{-\delta_2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\rho\sigma_1 u\sqrt{t}+(\tilde{\alpha}_1+\rho\sigma_1\sigma_2)t}{\sigma_1\sqrt{t(1-\rho^2)}}\right)\varphi(u)dudt=J(a,b_1'',0,\delta_2),$$

$$rJ_{10}'(0)=-\lambda_1\zeta_1 G_1'(0,0)\int_0^T\frac{e^{-rt}}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\rho\sigma_1 u+\tilde{\alpha}_1\sqrt{t}}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right)\left(e^{\tilde{\alpha}_2 t+\sigma_2 u\sqrt{t}}-1\right)\varphi(u)dudt=$$
$$=-\lambda_1\zeta_1 G_1'(0,0)[I(a,b_1,\sigma_2,0,r_2)-I(a,b_1,0,0,r)]=-\lambda_1\zeta_1 G_1'(0,0)\Lambda_{12}.$$

Используя (8) и лемму 1, получим формулу для $G_1'(0,0)$. ■

Лемма 2. *При больших значениях* S_2

$$\frac{C(G_1(S_2,0),S_2,0)}{S_2}=e^{-\delta_1 T}\left(c_1+\frac{w_1}{S_2}\right)\left(2\Phi(d(c_1))-1\right)-e^{-\delta_2 T}\left(2\Phi(\tilde{d}(c_1))-1\right)+$$
$$+\frac{2w_1(\mathrm{c}_1 e^{-\delta_1 T}\varphi(d(c_1))-e^{-\delta_2 T}\varphi(\tilde{d}(c_1)))}{c_1 S_2\sigma\sqrt{T}}-e^{-rT}\frac{(K_1-K_2)\Phi(\hat{d}(c_1))+K_2}{S_2}+o\left(\frac{1}{S_2}\right).$$

Доказательство. Положим $S_1=G_1(S_2,0).$ Определим

$$g_i(x)=s_i(x_i)-s_{3-i}(x_{3-i})-K_i,\ N_i=\left\{x\in\mathbb{R}^2\ |\ s_i(x_i)-s_{3-i}(x_{3-i})\ge 0\right\},\ i=1,2.$$

Можно показать, что при больших значениях S_2

$$\frac{1}{S_2}\int_{D_i}g_i(x)\psi(x)dx=\frac{1}{S_2}\int_{N_i}g_i(x)\psi(x)dx+o\left(\frac{1}{S_2}\right),\ i=1,2.$$

Отсюда и из (7) получим

$$\frac{C(G_1(S_2,0),S_2,0)}{S_2}=\frac{\mathrm{e}^{-rT}}{S_2}\left[\int\limits_{N_1} g_1(x)\psi(x)dx+\int\limits_{N_2} g_2(x)\psi(x)dx\right]+o\left(\frac{1}{S_2}\right). \qquad (9)$$

Используя интегралы (5) и (6), имеем:

$$\frac{\mathrm{e}^{-rT}}{S_2}\left[\int\limits_{N_1} s_1(x_1)\psi(x)dx-\int\limits_{N_2} s_1(x_1)\psi(x)dx\right]=$$

$$=\mathrm{e}^{-\delta_1 T}\left(c_1+\frac{w_1}{S_2}\right)\left(2\Phi(d(c_1))-1\right)+\frac{2w_1e^{-\delta_1 T}}{S_2\sigma\sqrt{T}}\varphi(d(c_1))+o\left(\frac{1}{S_2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-rT}}{S_2}\left[\int\limits_{N_1} s_2(x_2)\psi(x)dx-\int\limits_{N_2} s_2(x_2)\psi(x)dx\right]=$$

$$=\mathrm{e}^{-\delta_2 T}\left(2\Phi(\tilde{d}(c_1))-1\right)+\frac{2w_1e^{-\delta_2 T}}{c_1S_2\sigma\sqrt{T}}\varphi(\tilde{d}(c_1))+o\left(\frac{1}{S_2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-rT}}{S_2}\left[\int\limits_{N_1} K_1\psi(x)dx+\int\limits_{N_2} K_2\psi(x)dx\right]=e^{-rT}\frac{(K_1-K_2)\Phi(\hat{d}(c_1))}{S_2}+e^{-rT}\frac{K_2}{S_2}+o\left(\frac{1}{S_2}\right).$$

Подстановка последних выражений в (9) завершает доказательство. ■

Найдем систему уравнений для коэффициентов c_1, c_2, w_1, w_2. Положим $S_1=G_1(S_2,0)$ и устремим S_2 к бесконечности. Учитывая, что при больших S_2 $G_1(S_2,0)/S_2=c_1+w_1/S_2+o(1/S_2)$, выпишем разложения вида $d_{ij}\approx h_{ij}-k_{ij}/S_2,\ i=1,2,\ j=0,1,2$:

$$d_{10}\approx\frac{\hat{\alpha}t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{w_1}{c_1S_2}\cdot\frac{\exp(-\tilde{\alpha}_2t-\sigma_2\sqrt{tu})-1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{11}\approx\frac{(\tilde{\alpha}+\sigma^2)t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{w_1}{c_1S_2}\cdot\frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2+\rho\sigma_1\sigma_2)t-\sigma_2\sqrt{tu})-1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{12}\approx\frac{\tilde{\alpha}t+(\rho\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{w_1}{c_1S_2}\cdot\frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2+\sigma_2^2)t-\sigma_2\sqrt{tu})-1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{21}\approx-\frac{\ln(c_1c_2)+\tilde{\alpha}t+(\sigma_1-\rho\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{c_2w_1+w_2\exp(-(\tilde{\alpha}_1+\rho\sigma_1\sigma_2)t-\sigma_1\sqrt{tu})}{c_1c_2S_2\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{22}\approx-\frac{\ln(c_1c_2)+(\tilde{\alpha}+\sigma^2)t+(\sigma_1-\rho\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{c_2w_1+w_2\exp(-(\tilde{\alpha}_1+\sigma_1^2)t-\sigma_1\sqrt{tu})}{c_1c_2S_2\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{20}\approx-\frac{\ln(c_1c_2)+\hat{\alpha}t+(\sigma_1-\rho\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}-\frac{c_2w_1+w_2\exp(-\tilde{\alpha}_1t-\sigma_1\sqrt{tu})}{c_1c_2S_2\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Отсюда $\Phi(d_{ij}) \approx \Phi(h_{ij}) - (k_{ij}/S_2)\varphi(h_{ij}),\ i=1,2,\ j=0,1,2.$ Определим интегралы, каждый из которых выражается через интегралы $J(\cdot)$ или $I(\cdot)$:

$$I_{i2} = \int_0^T \delta_{3-i} \exp(-\delta_{3-i}t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(h_{i2})\varphi(u)dudt,\ \ i=1,2,$$

$$I_{ij} = \int_0^T (j\delta_i + (1-j)r)\exp(-(j\delta_i + (1-j)r)t) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(h_{ij})\varphi(u)dudt,\ \ i=1,2,\ j=0,1,$$

$$H_{11j} = \int_0^T \delta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\delta_1 t - j((\tilde{\alpha}_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \sigma_2\sqrt{t}u))}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{11})\varphi(u)dudt,\ \ j=0,1,$$

$$H_{12j} = \int_0^T \delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\delta_2 t - j((\tilde{\alpha}_2 + \sigma_2^2)t + \sigma_2\sqrt{t}u))}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{12})\varphi(u)dudt,\ j=0,1,$$

$$H_{21j} = \int_0^T \delta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\delta_2 t - j((\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \sigma_1\sqrt{t}u))}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{21})\varphi(u)dudt,\ \ j=0,1,$$

$$H_{22j} = \int_0^T \delta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\delta_1 t - j((\tilde{\alpha}_1 + \sigma_1^2)t + \sigma_1\sqrt{t}u))}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{22})\varphi(u)dudt,\ j=0,1.$$

Выпишем следующие разложения интегралов $J_{ij}(S_2)$:

$$\frac{rJ_{i0}(S_2)}{S_2} \approx \frac{K_i I_{i0}}{S_2},\ i=1,2,$$

$$\frac{\delta_1 J_{11}(S_2)}{S_2} \approx \left(c_1 + \frac{w_1}{S_2}\right) I_{11} - \frac{w_1(H_{111} - H_{110})}{S_2},\ \ \frac{\delta_2 J_{12}(S_2)}{S_2} \approx I_{12} - \frac{w_1(H_{121} - H_{120})}{c_1 S_2},$$

$$\frac{\delta_1 J_{22}(S_2)}{S_2} \approx \left(c_1 + \frac{w_1}{S_2}\right) I_{22} - \frac{c_2 w_1 H_{220} + w_2 H_{221}}{c_2 S_2},\ \ \frac{\delta_2 J_{21}(S_2)}{S_2} \approx I_{21} - \frac{c_2 w_1 H_{210} + w_2 H_{211}}{c_1 c_2 S_2}.$$

Используя последние разложения и лемму 2, из (4) получим равенства

$$c_1(1 - I_{11} + I_{22}) = 1 - I_{12} + I_{21} + e^{-\delta_1 T} c_1\left(2\Phi(d(c_1)) - 1\right) - e^{-\delta_2 T}\left(2\Phi(\tilde{d}(c_1)) - 1\right), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & w_1\Bigg(1 - I_{11} + I_{22} + H_{111} - H_{110} - H_{220} - \frac{H_{121} - H_{120} - H_{210}}{c_1} - \\ & \quad - e^{-\delta_1 T}\left(2\Phi(d(c_1)) - 1\right) - \frac{2e^{-\delta_1 T}\varphi(d(c_1))}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{2e^{-\delta_2 T}\varphi(\tilde{d}(c_1))}{c_1\sigma\sqrt{T}}\Bigg) + \\ & \quad + w_2\left(\frac{H_{211}}{c_1 c_2} - \frac{H_{221}}{c_2}\right) = -e^{-rT}((K_1 - K_2)\Phi(\hat{d}(c_1)) + K_2) + K_1(1 - I_{10}) - K_2 I_{20}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если положить $S_2 = G_2(S_1, 0)$ и повторить рассуждения, то можно вывести аналогичные уравнения. Чтобы их записать, в уравнениях (10) и

(11) следует подставить формулы для интегралов и в полученных выражениях поменять местами индексы 1 и 2. В итоге найдем уравнения $(10)^1$ и $(11)^1$. Сначала следует решить систему $((10),\ (10)^1)$ относительно c_1 и c_2, а потом линейную систему $((11),\ (11)^1)$ относительно w_1 и w_2. Чтобы получить $c_i(t), w_i(t)$ и $G_i'(0,t)$ для множеств $\mathcal{E}_i(t),\ i=1,2,\ t\in[0,T),$ достаточно в системах $((10),\ (10)^1)$ и $((11),\ (11)^1)$ (в формулах для используемых интегралов $I(\cdot)$ и $J(\cdot)$) заменить T на $T-t$.

4. Оценка стоимости опциона

Пусть $\underline{G}_i'(0,t)$ − нижняя оценка для $G_i'(0,t)$, а $\underline{G}_i(0,t)$ и $\bar{G}_i(0,t)$ − нижняя и верхняя оценки для $G_i(0,t)$. Их можно получить, используя теорему 1 и методы из [7]. Введем функции

$\underline{G}_i(S_{3-i},t)=\max[\underline{G}_i'(0,t)S_{3-i}+\underline{G}_i(0,t), c_i(t)S_{3-i}+w_i(t), (\delta_{3-i}S_{3-i}+rK_i)/\delta_i],\ i=1,2.$

В [5] доказано, что $\underline{G}_i(S_{3-i},t)\le\ G_i(S_{3-i},t)$ для всех $t\in[0,T]$. Поэтому если в определении множества $M_i(t)$ функцию $G_i(S_{3-i},t)$ заменить на $\underline{G}_i(S_{3-i},t)$, то получим множество $\bar{M}_i(t)$, содержащее $M_i(t)$. В точках множества $\bar{M}_i(t)$ подынтегральная функция в (3) положительна (см. [5]). Заменяя в (3) $M_i(t)$ на $\bar{M}_i(t)$, находим верхнюю оценку $\bar{F}(S,0)$ для $F(S,0)$. Пусть $\underline{J}_{ij}$ − интегралы, полученные заменой в интегралах J_{ij} функций $G_i(S_{3-i},t)$ на $\underline{G}_i(S_{3-i},t)$. Тогда

$$\bar{F}(S,0)=C(S,0)+\delta_1\underline{J}_{11}-\delta_2\underline{J}_{12}-r\underline{J}_{10}+\delta_2\underline{J}_{21}-\delta_1\underline{J}_{22}-r\underline{J}_{20}.$$

Нижняя оценка $\underline{F}(S,0)=\mathrm{E}\left[\exp(-r\tau_0)f(S(\tau_0))\,|\,S(0)=S\right]$ стоимости опциона найдена методом Монте-Карло с использованием решающего правила $\tau^0=\min\left[\min\{t\,|\,S(t)\in\bar{M}_1(t)\cup\bar{M}_2(t)\},T\right]$.

Приведем примеры. Возьмем следующие значения параметров:

$$r=0{,}05;\ \delta_1=\delta_2=0{,}01;\ \sigma_1=0{,}2;\ \sigma_2=0{,}1;\ \rho=0{,}5;\ K_1=8,\ K_2=5.$$

В таблице 1 содержатся оценки для стоимости опциона $F(S,0)$, а в таблице 2 − параметры, определяющие границы множеств $\bar{M}_i(t),\ i=1,2,$ в некоторых точках t при $T=3$. Заметим, что в таблице 2 указаны только значения $c_1(t)$, совпадающие с $c_2(t)$ с точностью 10^{-4}.

Таблица 1

Оценки стоимости опциона	$S_1=15$ $S_2=5$ $T=3$	$S_1=10$ $S_2=15$ $T=2$	$S_1=10$ $S_2=5$ $T=3$	$S_1=10$ $S_2=5$ $T=2$	$S_1=10$ $S_2=5$ $T=1$
$\bar{F}(S,0)$	3,428	1,207	0,565	0,323	0,094
$\underline{F}(S,0)$	3,424	1,204	0,564	0,321	0,092

Таблица 2

t	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
$c_1(t)$	1,775	1,740	1,702	1,661	1,617	1,569	1,515	1,453	1,378
$w_1(t)$	13,97	13,533	13,065	12,564	12,021	11,426	10,761	9,995	9,068
$w_2(t)$	5,390	5,190	4,976	4,743	4,488	4,204	3,882	3,505	3,037
$\underline{G}_1'(0,t)$	1,140	1,134	1,126	1,117	1,109	1,099	1,089	1,076	1,062
$\underline{G}_2'(0,t)$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\bar{G}_1(0,t)$	48,331	47,723	47,423	47,124	46,531	45,946	45,369	44,799	43,957
$\underline{G}_1(0,t)$	48,024	47,657	47,262	46,834	46,367	45,850	45,268	44,596	43,782
$\bar{G}_2(0,t)$	27,092	27,007	26,922	26,837	26,752	26,583	26,499	26,332	26,084
$\underline{G}_2(0,t)$	27,021	26,950	26,872	26,784	26,685	26,571	26,438	26,075	25,788

Литература

1. Margrabe W. The value to exchange one asset for another. Journal of Finance. V. 33. P. 177−186.
2. Vasin Alexander A., Morozov Vladimir V. Investment Decisions Under Uncertainty and Evaluation of American Options// International Journal of Mathematical Game Theory and Algebra. 2006. V. 15. N. 3. P. 323−336.
3. Морозов В.В., Хижняк К.В. Верхняя оценка стоимости бесконечного американского альтернативного опциона на два актива// Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2011. № 39. С. 98−106.
4. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Факты. Модели. Т.3. Теория. М.: ФАЗИС, 1998.
5. Морозов В.В., Хижняк К.В. Верхняя оценка стоимости бесконечных американских опционов от разности и суммы двух активов// Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. М: МАКС Пресс, 2012. № 40. С. 61−69.
6. Broadie M., Detemple. J. The valuation of American options on multiple assets// Mathematical Finance. 1997. V. 7. N. 3. P. 241−285.
7. Broadie M., Detemple J. American option valuation: new bounds, approximations and comparison with existing methods// Review of Financial Studies. 1996. V. 9. N. 4. P. 1211–1250.