В.В. Морозов, К.В. Хижняк

ОЦЕНКА СТОИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОГО АМЕРИКАНСКОГО ДВУСТОРОННЕГО ОПЦИОНА МАРГРАБЕ*

1. Введение

Бесконечный американский опцион представляет собой ценную бумагу, держатель которой (инвестор) имеет право ее предъявления в любой момент времени. Рассматривается опцион обмена любого из двух активов на другой актив. Опцион имеет фиксированную цену исполнения K_1 (или K_2) при обмене второго актива на первый (или первого на второй). Назовем его двусторонним опционом Марграбе в отличие от одностороннего опциона Марграбе [1], позволяющего обменивать только второй актив на первый. Верхняя оценка стоимости опциона получена заменой в интегральной формуле стоимости множества немедленного исполнения на его аппроксимацию многоугольными множествами по методу из [2], где изучался альтернативный опцион на максимум из двух активов. Нижняя оценка стоимости опциона найдена методом Монте-Карло с использованием указанной аппроксимации в качестве решающего правила исполнения опциона.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, где банковская процентная ставка r не зависит от времени t, а стоимости активов $S_i(t)$, $i=1,2,$ удовлетворяют уравнениям геометрического броуновского движения

$$dS_i(t)=S_i(t)(\alpha_i dt+\sigma_i dz_i(t)), \qquad (1)$$

где α_i – средняя доходность, $\sigma_i>0$ – волатильность i-го актива, а $z_i(t),\ i=1,2,$ – стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции $\rho\in(-1,1)$. Пусть $\delta_i>0$ – интенсивность выплат дивидендов по i-му активу. Будем считать выполненным условие риск-нейтральности: $r=\alpha_i+\delta_i,\ i=1,2.$

Пусть в момент времени $t=0$ выпускается двусторонний опцион Марграбе. Платёж по нему равен $f(S(t))=\max_{i=1,2}(S_i(t)-S_{3-i}(t)-K_i)_+$, где $a_+=\max(a,0)$ для любого действительного числа a и $S(t)=(S_1(t),S_2(t))$.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект 11-01-00778а.

Обозначим через $S=(S_1,S_2)=S(0)$ вектор начальных стоимостей активов. Стоимость опциона $F(S)$ в начальный момент времени определяется как верхняя грань средних приведенных платежей, взятая по всем решающим правилам предъявления (марковским моментам) τ [3]:

$$F(S)=\sup_{\tau}\mathrm{E}\left[\exp(-r\tau)f(S(\tau))\,|\,S(0)=S\right], \qquad (2)$$

где E – символ математического ожидания. Если для некоторой траектории процесса $S(t)$ решающее правило принимает значение ∞, то в этом случае платеж предполагается равным нулю. Оптимальное решающее правило имеет вид $\tau^*=\min\{t\,|\,F(S(t))=f(S(t))\}$ [3]. Инвестор, использующий правило τ^*, предъявляет опцион в момент первого достижения процессом $S(t)$ множества $\mathcal{E}=\{S\in\mathbb{R}_+^2\,|\,F(S)=f(S)\}$, называемого множеством немедленного исполнения опциона.

В п.3 изучаются свойства множества $\mathcal{E}$. В частности, показано, что его граница задается неубывающими выпуклыми функциями. В п.4 аппроксимация $\mathcal{E}$ многоугольными множествами позволила получить оценки для стоимости $F(S)$. В п.5 указан способ получения оценок для опционов с конечным сроком действия.

3. Свойства множества немедленного исполнения

Уравнения (1) имеют решения $S_i(t)=S_i\exp(\tilde{\alpha}_i t+\sigma_i z_i(t)),\ t\geq 0,$ где $\tilde{\alpha}_i=\alpha_i-\sigma_i^2/2,\ i=1,2.$ Определим величины

$$S_i^*=\frac{\beta_i K}{\beta_i-1},\quad \beta_i=\frac{-\tilde{\alpha}_i+\sqrt{\tilde{\alpha}_i^2+2r\sigma_i^2}}{\sigma_i^2},\quad i=1,2,$$

где S_i^* – порог, определяющий оптимальное решающее правило предъявления бесконечного американского опциона на i-й актив [6].

Следующее утверждение из [4] приводится без доказательства.

Утверждение 1. *Пусть Δ – неотрицательная константа, а функция платежа удовлетворяет следующим условиям:*

1) Для любой точки $S\in\mathcal{E}$, такой, что $S_1\geq\Delta$, и любого числа $\lambda\geq 1$ справедливо равенство $f(\lambda(S_1-\Delta)+\Delta,\lambda S_2)=\lambda f(S)+c$, где константа c не зависит от S, но может зависеть от λ.

2) Неравенство $f(\lambda(S_1-\Delta)+\Delta,\lambda S_2)\leq\lambda f(S)+c$ выполняется для любой точки $S\in\mathbb{R}_+^2$ и любого числа $\lambda\geq 1$.

Тогда если точка $S\in\mathcal{E}$ и $S_1\geq\Delta$, то при любом числе $\lambda\geq 1$ луч вида $(\Delta,0)+\lambda(S_1-\Delta,S_2),\ \lambda\geq 1$, принадлежит множеству $\mathcal{E}$.

При $\Delta = 0$ это утверждение доказано в [7]. Для рассматриваемого опциона положим $\Delta = (K_1 - K_2)/2$ и без потери общности будем считать, что $\Delta \geq 0$. Тогда функция $f(S) = \max_{i=1,2}(S_i - S_{3-i} - K_i)_+$ удовлетворяет условиям утверждения 1 при $c = (\lambda - 1)(K_1 + K_2)/2$.

Множество $\mathcal{E}$ двустороннего опциона Марграбе обладает рядом свойств, аналогичных свойствам множества немедленного исполнения бесконечного американского альтернативного колл-опциона на два актива [4]. Данные свойства приводятся в утверждениях 2 и 3 без доказательств.

Утверждение 2. *Если точка $S \in \mathbb{R}_+^2$ удовлетворяет уравнению $S_1 - S_2 - K_1 = S_2 - S_1 - K_2$, то для двустороннего опциона Марграбе $S \notin \mathcal{E}$.*

Из этого утверждения вытекает, что множество $\mathcal{E}$ представимо в виде объединения двух непересекающихся подмножеств: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_i = \{S \in \mathcal{E} | S_i - S_{3-i} - K_i > S_{3-i} - S_i - K_{3-i}\}$, $i = 1,2$.

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ – множество немедленного исполнения двустороннего опциона Марграбе. Тогда*

а) Каждое из множеств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ выпукло.

б) Если $S \in \mathcal{E}_1$ $(S \in \mathcal{E}_2)$, то точка $(S_1, \lambda S_2) \in \mathcal{E}_1$ $((\lambda S_1, S_2) \in \mathcal{E}_2)$ для любого числа $\lambda \in [0,1]$.

Из утверждения 3 следует, что граница множества $\mathcal{E}_1$ внутри $\mathbb{R}_+^2$ задается выпуклой функцией $S_1 = G_1(S_2) = \min\{S_1' | F(S_1', S_2) = S_1' - S_2 - K_1\}$. Кроме того, можно показать, что функция G_1 неубывающая. Аналогичная функция $S_2 = G_2(S_1)$ задает границу множества $\mathcal{E}_2$. Заметим, что $G_i(0) = S_i^*$, $i = 1,2$. Из утверждения 1 можно вывести, что графики функций G_i имеют асимптоты вида $S_i = c_i S_{3-i} + w_i$, где $c_1 = \inf_{S_2 > 0}(G_1(S_2) - \Delta)/S_2 \geq 1$, $c_2 = \inf_{S_1 > \Delta} G_2(S_1)/(S_1 - \Delta) \geq 1$ и $w_1 \geq \Delta$, $w_2 \geq -c_2\Delta$. Выпуклые функции G_i имеют правые производные G_i'. Чтобы найти c_i, w_i, а также производные $G_i'(0)$, нам потребуется интегральная формула для стоимости опциона [7]

$$F(S) = \sum_{i=1}^{2} \int_0^\infty \exp(-rt) \int_{M_i(t)} [\delta_i S_i \exp(\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i \sqrt{t} x_i) -$$

$$-\delta_{3-i} S_{3-i} \exp(\tilde{\alpha}_{3-i} t + \sigma_{3-i} \sqrt{t} x_{3-i}) - rK_i] \psi(x) dx dt, \qquad (3)$$

в которой при $x = (x_1, x_2)$

$$M_i(t) = \left\{x \,|\, S_i \exp(\tilde{\alpha}_i t + \sigma_i \sqrt{t} x_i) \geq G_i(S_{3-i} \exp(\tilde{\alpha}_{3-i} t + \sigma_{3-i} \sqrt{t} x_{3-i}))\right\},\ i = 1,2,\ \text{а}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

– двумерная нормальная плотность. Правую часть в (3) представим в виде

$$F(S)=\delta_1J_{11}-\delta_2J_{12}-rJ_{10}+\delta_2J_{21}-\delta_1J_{22}-rJ_{20}, \qquad (4)$$

где

$$J_{ij}=(jS_i+(1-j)K_i)\int_0^\infty\exp(-rt)\int_{M_i(t)}\exp(j(\tilde{\alpha}_it+\sigma_i\sqrt{t}x_i))\psi(x)dxdt,\ i=1,2,\ j=0,1,$$

$$J_{i2}=S_{3-i}\int_0^\infty\exp(-rt)\int_{M_i(t)}\exp(\tilde{\alpha}_{3-i}t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}x_{3-i}))\psi(x)dxdt,\ i=1,2.$$

Пусть $\Phi(y)$ – функция стандартного нормального распределения, а $\varphi(y)=\Phi'(y)=\exp(-y^2/2)/\sqrt{2\pi}$ – его плотность. Интегралы J_{ij} при $i=1,2,\ j=0,1,$ можно преобразовать к виду (см. [5])

$$J_{ij}=(jS_i+(1-j)K_i)\int_0^\infty\exp(-(j\delta_i+(1-j)r)t)\int_{-\infty}^\infty\Phi(d_{ij})\varphi(u)dudt,$$

где

$$d_{ij}=\frac{-\ln(G_i(S_{3-i}\exp((\tilde{\alpha}_{3-i}+j\rho\sigma_1\sigma_2)t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}u))/S_i)+(\tilde{\alpha}_i+j\sigma_i^2)t+\rho\sigma_i\sqrt{t}u}{\sigma_i\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Аналогично

$$J_{i2}=S_{3-i}\int_0^\infty\exp(-\delta_{3-i}t)\int_{-\infty}^\infty\Phi(d_{i2})\varphi(u)dudt,\ i=1,2,$$

где

$$d_{i2}=\frac{-\ln(G_i(S_{3-i}\exp((\tilde{\alpha}_{3-i}+\sigma_{3-i}^2)t+\sigma_{3-i}\sqrt{t}u))/S_i)+(\tilde{\alpha}_i+\rho\sigma_1\sigma_2)t+\rho\sigma_i\sqrt{t}u}{\sigma_i\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Введем обозначения:

$$\sigma^2=\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2,\ \tilde{\alpha}=\alpha_1-\alpha_2-\frac{\sigma^2}{2},\ \hat{\alpha}=\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2,$$

$$\theta_{1,2}=\frac{-\tilde{\alpha}\pm\sqrt{(\tilde{\alpha})^2+2\delta_2\sigma^2}}{\sigma^2},\ \gamma_{1,2}=\frac{-\hat{\alpha}\pm\sqrt{(\hat{\alpha})^2+2r\sigma^2}}{\sigma^2},$$

$$\varepsilon_{ij}=-\frac{(\tilde{\alpha}_i+\rho\sigma_1\sigma_2)+(-1)^j\sqrt{(\tilde{\alpha}_i+\rho\sigma_1\sigma_2)^2+2\delta_{3-i}\sigma_i^2}}{\sigma_i^2},\ i=1,2,\ j=1,2.$$

Нам потребуются следующие тождества и интегралы:

$$\tilde{\alpha}-\sigma_1^2+\rho\sigma_1\sigma_2=\hat{\alpha}-\sigma^2,\quad (\tilde{\alpha}+\sigma^2)^2+2\delta_1\sigma^2=(\tilde{\alpha})^2+2\delta_2\sigma^2,\ (\hat{\alpha})^2+2r\sigma^2=$$

$$=(\tilde{\alpha}+(i-1)\sigma^2+(-1)^i(\sigma_i^2-\rho\sigma_1\sigma_2))^2+2(\delta_{3-i}+\alpha_i-\sigma_i^2+\rho\sigma_1\sigma_2)\sigma^2,\ i=1,2;$$

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\delta t+c\sqrt{t}u)}{\sqrt{t}}\varphi\left(au+b\sqrt{t}+\frac{d}{\sqrt{t}}\right)\varphi(u)dudt=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\exp\left(-\frac{d(b+ac)+|d|\sqrt{\eta}}{a^2+1}\right),$$

где $\eta=(b+ac)^2+(-c^2+2\delta)(a^2+1)>0$,

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\exp(-\delta t)\Phi\left(au+b\sqrt{t}+\frac{d}{\sqrt{t}}\right)\varphi(u)dudt=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+2(a^2+1)\delta}}-1\right)\exp\left(-\frac{d\left(b+\sqrt{b^2+2(a^2+1)\delta}\right)}{a^2+1}\right)\quad(d\geq 0,\ \delta>0).$$

Теорема 1. *Пусть функции G_i задают границы множеств $\mathcal{E}_i$ немедленного исполнения двустороннего опциона Маргрябе. Тогда $G_i'(0)=\varepsilon_{i1}/(\beta_i-1),\ i=1,2.$*

Доказательство. Подставим в (4) соотношение $S_1=G(S_2)$ и обе части уравнения $G(S_2)-S_2-K_1=\delta_1J_{11}-\delta_2J_{12}-rJ_{10}+\delta_2J_{21}-\delta_1J_{22}-rJ_{20}$ продифференцируем по переменной S_2, которую затем устремим к нулю. В результате получим

$$G'(0)-1-\delta_1J_{11}'(0)+\delta_2J_{12}'(0)+rJ_{10}'(0)=\delta_2J_{21}'(0)-\delta_1J_{22}'(0)-rJ_{20}'(0),\qquad(5)$$

где $J_{ij}'(0)=\lim_{S_2\downarrow 0}J_{ij}'(S_2),\ i=1,2,\ j=0,1,2$. Левая часть уравнения (5) найдена в [4,5] и равна $(G_1'(0)(\beta_1-1)-\varepsilon_{11})/(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{12})$. Правая часть уравнения (5) равна нулю (в [4] доказано, что $J_{21}'(0)=0$). Тогда $G_1'(0)=\varepsilon_{11}/(\beta_1-1)$. Аналогично выводится формула для $G_2'(0)$. ■

Теорема 2. *Параметры c_i асимптот графиков функций G_i являются единственным решением системы уравнений*

$$c_1=\frac{\theta_1\left(1+(c_1c_2)^{\theta_2}\right)}{(\theta_1-1)\left(1+(c_1c_2)^{\theta_2-1}\right)},\ c_2=-\frac{(1-\theta_2)\left(1+(c_1c_2)^{1-\theta_1}\right)}{\theta_2\left(1+(c_1c_2)^{-\theta_1}\right)},\qquad(6)$$

где $c_i>1,\ i=1,2$. Параметры w_i асимптот графиков функций G_i равны

$$w_i=\frac{\sigma^2}{2}\cdot\frac{(-1)^{3-i}\left[\gamma_i(c_1c_2)^{\gamma_1-\gamma_2}-\gamma_{3-i}\right]K_i-(\gamma_1-\gamma_2)(c_1c_2)^{(-1)^{3-i}\gamma_i}K_{3-i}}{(\delta_i-\delta_{3-i}/c_i)\left((c_1c_2)^{\gamma_1-\gamma_2}-1\right)},\ i=1,2.\qquad(7)$$

Доказательство. Положим $S_1 = G_1(S_2)$ и устремим S_2 к бесконечности. Учитывая, что $G_1(S_2) \sim c_1 S_2 + w_1$, выпишем разложения $d_{ij} \approx h_{ij} - k_{ij} / S_2$, $i = 1,2$, $j = 0,1,2$:

$$d_{10} \approx \frac{\hat{\alpha}t + (\rho\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{w_1}{c_1 S_2} \cdot \frac{\exp(-\tilde{\alpha}_2 t - \sigma_2\sqrt{tu}) - 1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{11} \approx \frac{(\tilde{\alpha} + \sigma^2)t + (\rho\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{w_1}{c_1 S_2} \cdot \frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)t - \sigma_2\sqrt{tu}) - 1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{12} \approx \frac{\tilde{\alpha}t + (\rho\sigma_1 - \sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{w_1}{c_1 S_2} \cdot \frac{\exp(-(\tilde{\alpha}_2 + \sigma_2^2)t - \sigma_2\sqrt{tu}) - 1}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{21} \approx -\frac{\ln(c_1 c_2) + \tilde{\alpha}t + (\sigma_1 - \rho\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{c_2 w_1 + w_2\exp(-(\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t - \sigma_1\sqrt{tu})}{c_1 c_2 S_2 \sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{22} \approx -\frac{\ln(c_1 c_2) + (\tilde{\alpha} + \sigma^2)t + (\sigma_1 - \rho\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{c_2 w_1 + w_2\exp(-(\tilde{\alpha}_1 + \sigma_1^2)t - \sigma_1\sqrt{tu})}{c_1 c_2 S_2 \sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$d_{20} \approx -\frac{\ln(c_1 c_2) + \hat{\alpha}t + (\sigma_1 - \rho\sigma_2)\sqrt{tu}}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{c_2 w_1 + w_2\exp(-\tilde{\alpha}_1 t - \sigma_1\sqrt{tu})}{c_1 c_2 S_2 \sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Отсюда $\Phi(d_{ij}) \approx \Phi(h_{ij}) - (k_{ij} / S_2)\varphi(h_{ij})$, $i = 1,2$, $j = 0,1,2$. Определим интегралы

$$I_{i2} = \int_0^\infty \delta_{3-i} \exp(-\delta_{3-i} t) \int_{-\infty}^\infty \Phi(h_{i2})\varphi(u)\,du\,dt, \quad i = 1,2,$$

$$I_{ij} = \int_0^\infty (j\delta_i + (1-j)r)\exp(-(j\delta_i + (1-j)r)t) \int_{-\infty}^\infty \Phi(h_{ij})\varphi(u)\,du\,dt, \quad i = 1,2,\ j = 0,1,$$

$$H_{11j} = \int_0^\infty \delta_1 \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-\delta_1 t - j((\tilde{\alpha}_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \sigma_2\sqrt{tu}))}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{11})\varphi(u)\,du\,dt, \quad j = 0,1,$$

$$H_{12j} = \int_0^\infty \delta_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp\Big((-\delta_2 t - j\Big((\tilde{\alpha}_2 + \sigma_2^2)t - \sigma_2\sqrt{tu}\Big)\Big)}{\sigma_1\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{12})\varphi(u)\,du\,dt,\ j = 0,1,$$

$$H_{21j} = \int_0^\infty \delta_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(-\delta_2 t - j((\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)t + \sigma_1\sqrt{tu}))}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(h_{21})\varphi(u)\,du\,dt, \quad j = 0,1,$$

$$H_{22j}=\int_0^\infty \delta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left((-\delta_1 t - j\left((\tilde{\alpha}_1+\sigma_1^2)t+\sigma_1\sqrt{t}u\right)\right)}{\sigma_2\sqrt{t}\sqrt{1-\rho^2}}\varphi(h_{22})\varphi(u)dudt,\ j=0,1.$$

Используя введенные тождества и формулы для интегралов, находим

$$I_{10}=-\frac{\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2},\ I_{11}=\frac{1-\theta_2}{\theta_1-\theta_2},\ I_{12}=-\frac{\theta_2}{\theta_1-\theta_2},\ I_{20}=\frac{\gamma_1(c_1c_2)^{\gamma_2}}{\gamma_1-\gamma_2},\ I_{21}=\frac{\theta_1(c_1c_2)^{\theta_2}}{\theta_1-\theta_2},$$

$$I_{22}=\frac{(\theta_1-1)(c_1c_2)^{\theta_2-1}}{\theta_1-\theta_2},\ H_{1i0}=\frac{2\delta_i}{\sigma^2(\theta_1-\theta_2)},\ H_{1i1}=\frac{2\delta_i}{\sigma^2(\gamma_1-\gamma_2)},\ i=1,2,$$

$$H_{210}=\frac{2\delta_2(c_1c_2)^{\theta_2}}{\sigma^2(\theta_1-\theta_2)},\ H_{211}=\frac{2\delta_2(c_1c_2)^{1+\gamma_2}}{\sigma^2(\gamma_1-\gamma_2)},\ H_{220}=\frac{2\delta_1(c_1c_2)^{\theta_2-1}}{\sigma^2(\theta_1-\theta_2)},\ H_{221}=\frac{2\delta_1(c_1c_2)^{\gamma_2}}{\sigma^2(\gamma_1-\gamma_2)}.$$

Подставим $S_1=G(S_2)$ в интегралы J_{1j} и выпишем следующие разложения до первого порядка относительно $1/S_2$:

$$\frac{rJ_{i0}}{S_2}\approx\frac{K_iI_{i0}}{S_2},\ i=1,2,$$

$$\frac{\delta_1J_{11}}{S_2}\approx\left(c_1+\frac{w_1}{S_2}\right)I_{11}-\frac{w_1(H_{111}-H_{110})}{S_2},\ \frac{\delta_2J_{12}}{S_2}\approx I_{12}-\frac{w_1(H_{121}-H_{120})}{c_1S_2},$$

$$\frac{\delta_1J_{22}}{S_2}\approx\left(c_1+\frac{w_1}{S_2}\right)I_{22}-\frac{c_2w_1H_{220}+w_2H_{221}}{c_2S_2},\ \frac{\delta_2J_{21}}{S_2}\approx I_{21}-\frac{c_2w_1H_{210}+w_2H_{211}}{c_1c_2S_2}.$$

Подставим $S_1=G(S_2)$ в уравнение (4) и разделим его на S_2. Используя последние разложения, получим равенство

$$\left(c_1+\frac{w_1}{S_2}\right)(1-I_{11}+I_{22})=1-I_{12}+I_{21}-\frac{w_1(H_{111}-H_{110})}{S_2}+\frac{w_1(H_{121}-H_{120})}{c_1S_2}+$$

$$+\frac{K_1(1-I_{10})}{S_2}-\frac{c_2w_1H_{210}+w_2H_{211}}{c_1c_2S_2}+\frac{c_2w_1H_{220}+w_2H_{221}}{c_2S_2}-\frac{K_2I_{20}}{S_2}+o\left(\frac{1}{S_2}\right).\qquad(8)$$

Отсюда $c_1(1-I_{11}+I_{22})=1-I_{12}+I_{21}$ или

$$c_1=\frac{\theta_1(1+(c_1c_2)^{\theta_2})}{(\theta_1-1)(1+(c_1c_2)^{\theta_2-1})}.\qquad(9)$$

Из (9) и того факта, что θ_1 – корень уравнения $\sigma^2\theta(\theta-1)/2+\alpha\theta-\delta_2=0$, можно доказать, что $1-I_{11}+I_{22}-H_{110}-H_{220}+(H_{120}+H_{210})/c_1=0$. С учетом этого равенства из (8) находим, что

$$\frac{2}{\sigma^2}\left(\left(\delta_1-\frac{\delta_2}{c_1}\right)w_1+\left(\delta_2-\frac{\delta_1}{c_2}\right)(c_1c_2)^{\gamma_2}w_2\right)=\gamma_1(K_1-(c_1c_2)^{\gamma_2}K_2).\qquad(10)$$

Если положить $S_2=G_2(S_1)$, устремить S_1 к бесконечности и повторить рассуждения, то можно вывести аналогичные уравнения. Чтобы их записать, в уравнениях (9) и (10) следует поменять местами индексы 1 и 2, а также сделать замены $\theta_1 \leftrightarrow 1-\theta_2$ и $\gamma_1 \leftrightarrow -\gamma_2$. В результате получим (6) и

$$\frac{2}{\sigma^2}\left(\left(\delta_1 - \frac{\delta_2}{c_1}\right)w_1 + \left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{c_2}\right)(c_1c_2)^{\gamma_1} w_2\right) = \gamma_2(K_1 - (c_1c_2)^{\gamma_1} K_2). \qquad (11)$$

Из системы (10),(11) выводим (7).

Покажем, что система уравнений (6) имеет единственное решение. Действительно, положим $p = c_1c_2$ и рассмотрим функцию $g(p) = (p + p^{\theta_1})(1 + p^{\theta_2})/((p + p^{\theta_2})(1 + p^{\theta_1}))$ при $p \geq 1$. Перемножая уравнения (6) после несложных преобразований получим уравнение для определения p: $-\theta_2(\theta_1 - 1)/((1-\theta_2)\theta_1) = g(p)$. Константа в левой части этого уравнения принадлежит интервалу (0,1), а для функции g справедливы равенства $g(1) = 1$, $\lim_{p\to\infty} g(p) = 0$. Можно доказать, что функция g убывает на $[1,\infty)$.[1] Отсюда следует, что уравнение имеет единственное решение p^0. По p^0 из формул (6) однозначно находятся коэффициенты c_1 и c_2.

Покажем, что $\delta_1 > \delta_2 / c_1$. Из (6) следует, что $c_1 > \theta_1/(\theta_1 - 1)$. Поэтому достаточно проверить неравенство $\theta_1/(\theta_1 - 1) > \delta_2/\delta_1$, которое эквивалентно неравенству $\delta_1 > 0$. Аналогично доказывается неравенство $\delta_2 > \delta_1 / c_2$. ■

4. Оценка стоимости опциона

Введем функции

$$\bar{G}_i(S_{3-i}) = \max[G_i'(0)S_{3-i} + S_i^*, c_iS_{3-i} + w_i, (\delta_{3-i}S_{3-i} + rK_i)/\delta_i], \ i = 1,2. \quad (12)$$

В [5] доказано, что функция $\bar{G}_i$ не превосходит G_i. Поэтому если в определении множества $M_i(t)$ функцию G_i заменить на $\bar{G}_i$, то получим множество $\bar{M}_i(t)$, содержащее $M_i(t)$. В точках множества $\bar{M}_i(t)$ подынтегральная функция в (3) принимает положительные значения (см. [5]). Заменяя в (3) множество $M_i(t)$ на $\bar{M}_i(t)$, находим верхнюю оценку $\bar{F}(S)$ стоимости опциона. Пусть интегралы $\bar{J}_{ij}$ получены заменой в интегралах J_{ij} функций G_i на $\bar{G}_i$. Тогда $\bar{F}(S) = \delta_1\bar{J}_{11} - \delta_2\bar{J}_{12} - r\bar{J}_{10} + \delta_2\bar{J}_{21} - \delta_1\bar{J}_{22} - r\bar{J}_{20}$.

Нижняя оценка $\underline{F}(S)$ стоимости опциона получена методом Монте-Карло, реализованном на одном миллионе итераций траекторий процесса $S(t)$. Для оценки $F(S)$ снизу по формуле (2) в качестве решающего правила было взято $\tau^0 = \min\{t \mid S(t) \in \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2\}$. Поскольку рассматриваемый опцион является бесконечным, то решающее правило τ^0 было ограничено условием предъявления опциона в течение $T = 100$ лет. Также

[1] Этот факт доказан в дипломной работе Е.П. Селиной (факультет ВМК МГУ, 2012).

предполагалось, что решение по правилу τ^0 принималось в конце каждого рабочего дня, в связи с чем, каждый год был разбит на 252 части.

Пример

Возьмем следующие значения параметров:

$r=0{,}05;\ \delta_1=\delta_2=0{,}01;\ \sigma_1=0{,}2;\ \sigma_2=0{,}1;\ \rho=0{,}5;\ K_1=8,\ K_2=5.$

Тогда $c_1=c_2\approx 4{,}010;\ w_1=37{,}466;\ w_2=13{,}840;\ S_1^*=58{,}532;\ S_2^*=28{,}042.$

В таблице представлены верхние и нижние оценки для стоимости $F(S)$.

Таблица

Оценки	$S_1=3,\ S_2=3$	$S_1=12,\ S_2=3$	$S_1=12,\ S_2=15$	$S_1=8,\ S_2=5$
$\overline{F}(S)$	1,877	7,005	9,434	4,598
$\underline{F}(S)$	1,762	6,881	9,101	4,428

5. Оценка опционов с конечным сроком действия

Результаты данной статьи (а также работ [4,5]) можно распространить на опционы с конечным сроком действия T. Утверждения 2 и 3 справедливы и для этого случая. В правую часть формулы (4) следует добавить $C(S)=\mathrm{E}\left[\exp(-rT)f(S(T))\,|\,S(0)=S\right]$ – стоимость в момент $t=0$ европейского двустороннего опциона Марграбе. Ограничимся формулировкой аналога теоремы 1. Будем использовать интегралы

$$I(a,b,c,\delta,T)=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\delta t+c\sqrt{t}u)}{\sqrt{t}}\varphi\left(au+b\sqrt{t}\right)\varphi(u)\,du\,dt=\frac{2\Phi\left(\sqrt{\dfrac{\eta T}{a^2+1}}\right)-1}{\sqrt{\eta}},$$

где $\eta=(b+ac)^2+(-c^2+2\delta)(a^2+1)>0,$

$$J(a,b,\delta,T)=\delta\int_0^T e^{-\delta t}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(au+b\sqrt{t}\right)\varphi(u)\,du\,dt=\frac{1}{2}-e^{-\delta T}\Phi\left(b\sqrt{\frac{T}{a^2+1}}\right)+$$

$$+\frac{b}{2\sqrt{b^2+2(a^2+1)\delta}}\left(2\Phi\left(\sqrt{\frac{(b^2+2(a^2+1)\delta)T}{a^2+1}}\right)-1\right)\quad(\delta>0).$$

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{d}_1=\frac{\ln G_1(0)-\ln K_1+(\tilde{\alpha}_1+\sigma_1^2)T}{\sigma_1\sqrt{T}},\ \tilde{d}_2=\tilde{d}_1-(\sigma_1-\rho\sigma_2)\sqrt{T},$$

$$a=\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},\ r_2=r-\tilde{\alpha}_2,\ \zeta_1=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}},\ b_1=\tilde{\alpha}_1\zeta_1,$$

$$b_1' = (\tilde{\alpha}_1 + \sigma_1^2)\zeta_1,\ b_1'' = (\tilde{\alpha}_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)\zeta_1,\ \lambda_1 = \frac{rK_1}{G_1(0)},\ \delta_{12} = \delta_1 - \tilde{\alpha}_2 - \rho\sigma_1\sigma_2,$$

$$\Lambda_{12}' = I(a, b_1', \sigma_2, \delta_{12}, T) - I(a, b_1', 0, \delta_1, T),\ \Lambda_{12} = I(a, b_1, \sigma_2, r_2, T) - I(a, b_1, 0, r, T).$$

Теорема 3. *Пусть функции G_i задают границы множеств $\mathcal{E}_i$ немедленного исполнения двустороннего опциона Маргрaбе с конечным сроком действия T. Тогда*

$$G_1'(0) = \frac{1 - J(a, b_1'', \delta_2, T) - \exp(-\delta_2 T)\Phi(\tilde{d}_2)}{1 - J(a, b_1', \delta_1, T) + \delta_1\zeta_1\Lambda_{12}' - \lambda_1\zeta_1\Lambda_{12} - \exp(-\delta_1 T)\Phi(\tilde{d}_1)}. \tag{13}$$

Формула для $G_2'(0)$ получается из $G_1'(0)$ перестановкой индексов 1 и 2.

Отметим, что величина $G_1(0)$, входящая в (13), является стоимостью американского колл-опциона на первый актив со сроком действия T и ценой исполнения K_1. В [8] приведены методы построения нижних и верхних оценок $\underline{G}_1(0)$ и $\overline{G}_1(0)$ для $G_1(0)$. Используя их и формулу (13), можно получить нижнюю оценку $\underline{G}_1'(0)$ для $G_1'(0)$. В определении функции $\overline{G}_1(S_2)$ (см. (12)) вместо выражения $G_1'(0)S_2 + G_1(0)$ следует использовать $\underline{G}_1'(0)S_2 + \underline{G}_1(0)$. Аналогично определяется и функция $\overline{G}_2(S_1)$.

Литература

1. Margrabe W. The value to exchange one asset for another. Journal of Finance. V. 33. P. 177−186.
2. Vasin Alexander A., Morozov Vladimir V. Investment Decisions Under Uncertainty and Evaluation of American Options// International Journal of Mathematical Game Theory and Algebra. 2006. V. 15. N. 3. P. 323−336.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.2. Факты. Модели. Т.3. Теория. М.: ФАЗИС, 1998.
4. Морозов В.В., Хижняк К.В. Верхняя оценка стоимости бесконечных американских опционов от разности и суммы двух активов// Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. М: МАКС Пресс, 2012. №40. С. 61−69.
5. Морозов В.В., Хижняк К.В. Верхняя оценка стоимости бесконечного американского альтернативного опциона на два актива// Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова/ Под ред. Д.П. Костомарова и В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2011. №39. С. 98−106.

6. McKean H.P. Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics// Industrial Management Review. 1978. N. 6. P. 32−39.
7. Broadie M., Detemple. J. The valuation of American options on multiple assets// Mathematical Finance. 1997. V. 7. N.3. P. 241−285.
8. Broadie M., Detemple J. American option valuation: new bounds, approximations and comparison with existing methods. Review of Financial Studies. 1996. V. 9. N. 4. P. 1211–1250.