

К.Б. Мурашкина, В.М. Пасконов
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА
КОРТЕВЕГА- ДЕ ФРИСА- БЮРГЕРСА*

В настоящей работе предложен разностный метод численного решения краевой задачи для нелинейного уравнения типа Кортевега-де Фриса-Бюргерса с двумя малыми параметрами при старших производных. На основе аппроксимации повышенного порядка точности построена итерационная разностная сплайн-схема, и показана возможность получения численного решения уравнения третьего порядка при определенных соотношениях между двумя малыми параметрами и шагами по пространству и времени. Исследован механизм взаимодействия решения вырожденной задачи (при отсутствии третьей производной) с решением уравнения с двумя малыми параметрами.

Рассматривалась краевая задача для нелинейного эволюционного уравнения типа Кортевега де- Фриса –Бюргерса третьего порядка с малыми параметрами μ и ν при второй и третьей производных соответственно:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1)$$

При $\mu=1$ и $\nu=0$ уравнение (1) преобразуется в известное уравнение Кортевега де-Фриса [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad (2)$$

а при $\mu=0$ переходит в уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - f \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3)$$

Решением уравнения Кортевега де-Фриса является уединенная волна – солитон [1],

$$U_s = 3V / ch^2 [V^{1/2} (x - Vt - x_b) / 2], \quad (4)$$

который однозначно определяется двумя параметрами: скоростью волны $V > 0$ и положением вершины волны x_b в момент времени $t = 0$.

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, коды проектов 99-07-90435, 01-01-00151.

Для уравнения (1) в области $x \in [0;1]$ $0 \leq t \leq T$ рассматривалась начально-краевая задача. В качестве начальных условий были выбраны четыре функции:

$$1. \text{ «прямая ступенька» } U(x) = \begin{cases} 2.0, 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1.0, 0.5 < x \leq 1.0 \end{cases},$$

$$2. \text{ «обратная ступенька» } U(x) = \begin{cases} 1.0, 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2.0, 0.5 < x \leq 1.0 \end{cases},$$

3. солитон – решение (4) уравнения Кортевега де-Фриса $U(x, t = 0) = U_s$,

4. функция типа “бегущая волна”

$$U = \exp[-d(1 - 2\xi)^2], \xi = (t - x)/t^* \quad (5)$$

В качестве граничных условий на левой границе задавалось значение функции U

$$f(0, t) = U(0, t)$$

и вторая производная от решения

$$f''(0, t) = U''(0, t). \quad (6)$$

Значение координаты вершины солитона $x_b = 0$.

На правой границе при $x=1$ задавалось точное значение функции U

$$f(1, t) = U(1, t).$$

При численном решении поставленной задачи на отрезке $[0;1]$ строилась равномерная сетка

$$x_i = x_0 + ih; x_0 = 0; i = 0 \div I - 1; h - \text{ шаг по пространству.}$$

$$t^n = n\tau; n = 0, 1, 2... \tau - \text{ шаг по времени.}$$

Поскольку для интегрирования уравнения третьего порядка необходимо применять разностные схемы с порядком аппроксимации относительно пространственных шагов не ниже третьего, для численного решения уравнения типа Кортевега де-Фриса-Бюргерса разностная схема строилась на основе аппроксимаций повышенного порядка точности, полученных в виде линейных комбинаций конечно-разностных операторов от функции и ее сплайн – производных [2]. В дальнейшем используются общепринятые обозначения для записи центральной разностной $f_{x,i}$ и второй разностной производных f_{xx} .

Аппроксимации повышенного порядка точности (не ниже четвертого порядка точности относительно h) для первой $\tilde{M}^{(1)}$ и второй $\tilde{M}^{(2)}$ сплайн-производных на трехточечном шаблоне имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_i^{(1)} &= f_{x,i} - h^2(a_{11}M_{x,i}^{(2)} + a_{12}M_{xx,i}^{(1)}), \\ \tilde{M}_i^{(2)} &= a_{21}f_{xx} + (1-a_{21})M_{x,i}^{(1)} + h^2a_{22}M_{xx,i}^{(2)},\end{aligned}\quad (7)$$

где M_j^2 – вторые производные интерполяционного кубического сплайна. Выбирая свободные параметры $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ специальным образом, можно получать аппроксимации того или иного порядка точности. Значения коэффициентов $a_{11} = -1/6, a_{21} = 1, a_{12} = 0, a_{22} = -1/12$ обеспечивали следующие порядки аппроксимации: для первой сплайн- производной – 6, для второй – 4. При выбранных коэффициентах для нахождения значений M_j^2 методом прогонки использовалось соотношение

$$M_i^{(2)} = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) - \frac{2}{15}(M_{i-1}^{(2)} - 2M_i^{(2)} + M_{i+1}^{(2)})$$

или

$$2M_{i-1}^{(2)} + 11M_i^{(2)} + 2M_{i+1}^{(2)} = \frac{15}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}).\quad (8)$$

Третья производная аппроксимировалась как первая разность назад от второй разностной производной повышенного порядка точности

$$f_{xxx,i} = \frac{1}{h}(\tilde{M}_i^{(2)n+1} - \tilde{M}_{i-1}^{(2)n+1}).\quad (9)$$

Общий вид разностной схемы для нелинейного уравнения (1) третьего порядка следующий

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} = \nu f_{xx,i} - f_i^{n+1} f_{x,i}^{n+1} + \quad (10.1)$$

$$+ \left[-\frac{\nu}{12}(M_{i-1}^{(2)} - 2M_i^{(2)} + M_{i+1}^{(2)}) + f_i^{n+1} \frac{h}{12}(M_{i+1}^{(2)} - M_{i-1}^{(2)}) \right] + \quad (10.2)$$

$$+ \frac{\mu}{h} \left\{ f_{xx,i} - \frac{1}{12}(M_{i-1}^{(2)} - 2M_i^{(2)} + M_{i+1}^{(2)}) - f_{xx,i-1} + \frac{1}{12}(M_{i-2}^{(2)} - 2M_{i-1}^{(2)} + M_i^{(2)}) \right\} \quad (10.3)$$

На каждом временном слое расчет уравнения (10.1-10.3) производился в три этапа. На первом этапе для нахождения предварительных значений функции f_i^{n+1} проводилось решение уравнения второго порядка

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} = \nu f_{\bar{x},i} - f_i \cdot f_{x,i}^{n+1} \quad (10.1)$$

с граничными условиями (6) по явно – неявной разностной схеме с итерационным процессом типа Зейделя [3] и по неявной схеме с использованием метода прогонки.

Второй этап заключался в вычислении по полученным на первом этапе значениям f_i^{n+1} методом прогонки значений производной M_i^2 во внутренних точках отрезка из соотношения (8). Дополнительно задавалось условие непрерывности второй производной в предграничных точках [4].

$$M_1^2 = f_{\bar{x},1}, M_{I-1}^2 = f_{\bar{x},I-1}. \quad (11)$$

Затем решение уравнения второго порядка уточнялось путем внесения поправки

$$\left[-\frac{\nu}{12}(M_{i-1}^{(2)} - 2M_i^{(2)} + M_{i+1}^{(2)}) + f_i \frac{h^{n+1}}{12}(M_{i+1}^{(2)} - M_{i-1}^{(2)}) \right]. \quad (10.2)$$

Для нахождения искомым значений функции f_i^{n+1} строился итерационный процесс. Значения функции $(f_i^{n+1})^l$ (здесь l – итерационный индекс) в тех точках расчетного шаблона, которые к началу вычислений в точке (ih) еще не определены, берутся с предыдущего итерационного слоя. При $l = 0$ значения функции на $(n+1)$ временном слое брались с n -ого слоя, т.е. $(f_i^{n+1})^0 = f_i^{n+1}$. Пересчет производилась до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_i |(f_i^{n+1})^l - (f_i^{n+1})^{l-1}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

Третий этап состоял в уточнении полученных значений функции f_i^{n+1} путем внесения поправки от производной третьего порядка

$$\frac{\mu}{h} \left\{ f_{\bar{x},i} - \frac{1}{12}(M_{i-1}^{(2)} - 2M_i^{(2)} + M_{i+1}^{(2)}) - f_{\bar{x},i-1} + \frac{1}{12}(M_{i-2}^{(2)} - 2M_{i-1}^{(2)} + M_i^{(2)}) \right\}. \quad (10.3)$$

Здесь использовалось граничное условие (6) для нахождения $\bar{M}_0^{(2)}$. На этом этапе также производились итерации. Выход из итерационного цикла, аналогичного описанному выше, осуществлялся по достижении заданной точности (10^{-4}) при сходимости итераций. Таким образом находилось решение f_i^{n+1} разностного уравнения третьего порядка на каждом временном слое.

Численное решение вырожденной задачи (при отсутствии третьей производной, $\mu=0$) состояло в реализации первого и второго этапов, описанных выше.

Приведем некоторые результаты расчетов, которые показывают влияние малых параметров при старших производных на характер решения.

Для начальной функции «прямая ступенька» временной шаг τ варьировался в диапазоне от 10^{-4} до 10^{-7} . Параметр μ изменялся в от 1.0 до 10^{-3} , а параметр ν — от 10^{-2} до 10^{-6} . Уменьшение параметра μ (при фиксированном ν) приводило к существенному уменьшению временного шага τ . Так, численные расчеты для $\mu=0.5$ оказались возможными только при $\tau=10^{-7}$. На рис.1 показано решение в момент времени $t=0.1$ при фиксированном достаточно малом μ ($\mu=0.005$). С увеличением ν возрастает влияние второй производной, и решение стремится к линейному распределению.

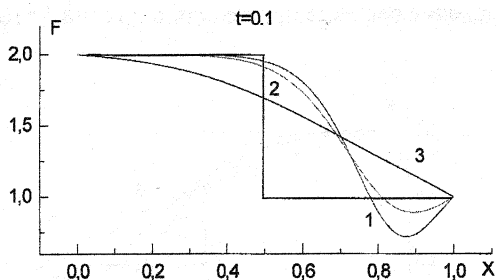


Рис.1 $\mu=0.005$, $dt=0.00001$, $dx=0.0125$
 1 — $\eta=0.0005$, 2 — $\eta=0.05$, 3 — $\eta=0.5$

При фиксированном достаточно малом ν ($\nu=0.005$) с уменьшением малого параметра при третьей производной образуется явно выраженный пограничный слой (рис.2).

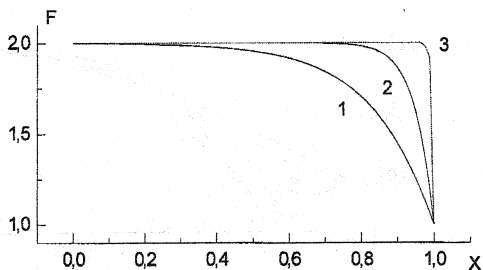


Рис.2 $\eta=0.005$, $dt=0.00001$, $dx=0.0125$
 1 — $\mu=0.05$, 2 — $\mu=0.005$, 3 — $\mu=0.00005$

Формирование стационарного режима при фиксированном шаге по времени τ происходило в зависимости от величин малых параметров μ и ν , причем при меньших μ установление происходило быстрее. Точность установившегося решения была порядка $10^{-5} \div 10^{-6}$.

На рис.3 показано формирование решения при постоянном μ порядка единицы и $\nu=10^{-6}$. Уменьшение параметра ν (до $10^{-5}, 10^{-6}$) при таком μ не приводило к существенному изменению общей картины решения.

Для начальной функции «обратная ступенька» было проведено численное решение уравнения Кортевега де-Фриса (2) (при $\mu = -1$ и $\nu = 0$). Расчеты проводились при временном шаге $\tau = 10^{-11}$ по формулам левой прогонки. Развитие решения в различные моменты времени представлено на рис.4. Установление решения происходило при $t=8.5 \cdot 10^{-3}$ с точностью 10^{-6} .

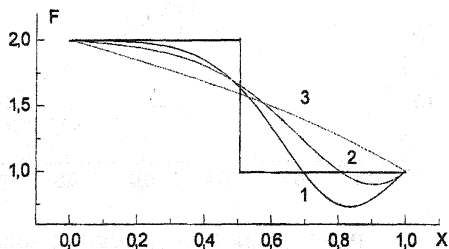


Рис.3 $\eta=10^{-6}$, $\mu=1.0$, $dt=10^{-7}$
 1 - $t=0.001$, 2 - $t=0.005$, 3 - $t=0.1$

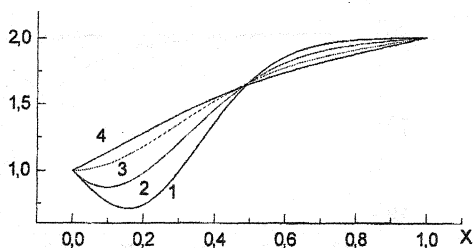


Рис.4 $\eta=0.0$, $\mu=-1.0$, $dt=10^{-11}$
 1 - $t=0.0001$, 2 - $t=0.0002$, 3 - $t=0.0045$, 4 - $t=0.0085$

Для начальной функции «солитон» проводились расчеты на равномерных сетках с шагами по пространству $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625$ и 0.00313 , для чего расчетный отрезок разбивался соответственно на 10, 20, 40, 80, 160 и 320 интервалов. Временной шаг τ варьировался в диапазоне от 10^{-3} до 10^{-6} . Малые параметры при старших производных в модельном уравнении третьего порядка при таких методических расчетах не изменялись и были следующими: $\nu = 0.01, \mu = 0.001$. Из рис.5 видно, что возможно качественное изменение решения при определенных значениях отношения τ/h (пунктирные линии соответствуют временному шагу $\tau=0.001$, в моменты времени $t=1$ и $t=2$, сплошные – $\tau=0.0001$ в те же моменты времени). С уменьшением временного шага наблюдается появление ярко выраженного фронта волны и осцилляций на фронте. Проведение расчетов оказалось возможным при значении отношения τ/h меньше, чем 0.008 . При сохранении отношения τ/h отмечено незначительное изменение положения фронта и увеличение осцилляций на фронте. Сравнение результатов на различных сетках позволило определить, что точность расчетов в районе осцилляций составляла 5-7 %.

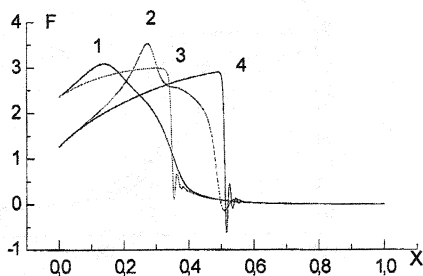


Рис.5 $\eta=0.01, \mu=0.001, dx=0.0125, 1-dt=0.001, t=1; 2 dt=0.001, t=2; 3-dt=0.0001, t=1; 4-dt=0.0001, t=2.$

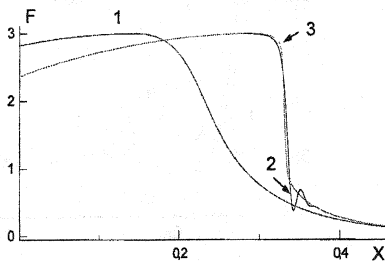


Рис.6 $\eta=0.01, dt=0.0001, dx=0.0125$
 $1-t=0.5; 2-t=1.0, \mu=0.001, 3-t=1.0, \mu=0$

Решения, полученные при $\tau=10^{-4}$ и $\tau=10^{-5}$, графически практически не отличались, поэтому для проведения дальнейших методических расчетов был выбран временной шаг 10^{-4} .

Проведено сравнение решений уравнения третьего порядка типа Кортевега де-Фриса –Бюргерса и «вырожденного» уравнения Бюргерса (при $\mu=0$) в различные моменты времени. На рис.6 представлен фрагмент трансформации структуры решения при том же значении ν , что и на рис.5. Линия 1 соответствует совпадающим решениям при $t=0.5$, в дальнейшем (при $t>1$) наблюдается появление осцилляций у решения уравнения третьего порядка, а положение фронта волны практически не меняется ($\mu=0.001$ – линия 2, $\mu=0.0$ – линия 3).

Численно исследовано влияние величин малых параметров μ и ν при старших производных на характер решения. Выявлено, что при достаточно малом μ (порядка 10^{-3}) с уменьшением ν (от 0.5 до 0.0025) фронт волны получается менее размытым и осцилляции на фронте увеличиваются (рис.7).

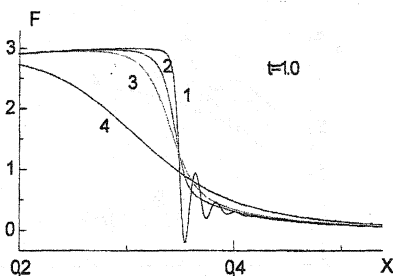


Рис.7 $\mu=0.001, dt=0.0001, dx=0.0125$
 1- $\eta=0.0025, 2-\eta=0.05, 3-\eta=0.1, 4-\eta=0.5$

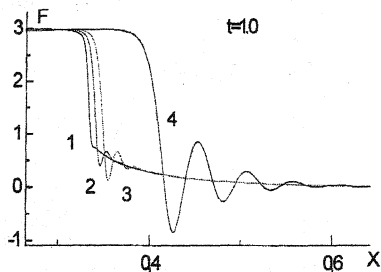


Рис.8 $\eta=0.01, dt=0.0001, dx=0.0125$
 1 - $\mu=0.0001, 2 - \mu=0.0005, 3 - \mu=0.001, 4 - \mu=0.005$

При бо́льших значениях μ получаются аналогичные результаты, однако их удалось получить только для $\mu < 0.04$. При закрепленном ν (порядка 0.01) с уменьшением μ снижается скорость движения фронта волны и амплитуда осцилляций на фронте (рис.8). На рис. 9 в момент времени $t=2.3$ показано решение задачи для уравнения третьего порядка типа Кортевега де-Фриса-Бюргерса в зависимости от значения параметра μ при третьей производной. В качестве начального условия в этой задаче рассматривалась сумма двух «бегущих» волн, двигающихся одна за другой с разными скоростями. Параметры d и t^* в формуле (5) для «быстрой» волны в расчетах принимались равными соответственно 0.2 и 0.03, а для «медленной» – 0.5 и 0.06, скорости «быстрой» и «медленной» волн отличались в 2 раза. Параметр ν и временной шаг τ задавались равными соответственно 0.01 и 10^{-4} . Полученное решение качественно совпадает с поведением точного решения, с уменьшением μ наблюдается уменьшение амплитуды осцилляций полученного решения как и в случае, когда в качестве начального условия рассматривалась функция «солитон».

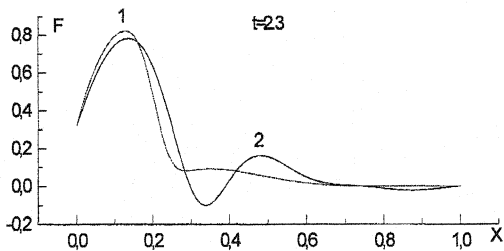


Рис.9 $\eta=0.01$, $dt=0.0001$, $dx=0.0125$
 1 – $\mu=0.0001$, 2 – $\mu=0.001$

Наше обращение к численному исследованию краевых задач для нелинейного уравнения Кортевега-де Фриса-Бюргерса не было случайным, так как уравнение такого типа можно рассматривать в качестве модельного для системы модифицированных уравнений Навье – Стокса [5]. Полученные численные результаты позволяют выбрать оптимальные соотношения малых параметров уравнения, шагов по пространству и по времени для достижения необходимой точности решения при дальнейших расчетах вязких течений с использованием системы дифференциальных уравнений третьего порядка.

Литература

1. Korteweg D., de Vries G., "Phil. Mag.", 1895, v.39, p.422-443.
2. Русаков С.В. Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса. Иркутск., Изд-во Иркутского ун-та. 1990, 124 с.
3. Белова О.Н., Кокошинская Н.С., Лузянина Т.Б., Пасконов В.М. Численное моделирование ламинарного обтекания тел вязким газом.- М., Изд-во МГУ, 1986, 80 с.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций.- М.:Наука, 1980, 352 с.
5. Paskonov V.M. Modified Navier - Stokes Equation for finite-difference Computation of Viscous Flow. Comp. Math. and Modelling.v.8, № 4, 1997.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, - М.; Наука, 1976.