Д.Л. Муравей

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕМ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТИ ДИСПЕРСИИ*

1. Введение

Большинство работ по оптимизации финансового портфеля использует предположение о том, что динамика цен акций подчиняется уравнению геометрического броуновского движения (см., например, [1]). Несмотря на простоту, данная модель имеет недостатки. К примеру, с ее помощью нельзя смоделировать эффект улыбки волатильности или вероятность дефолта актива. В данной работе рассматривается модифицированная модель постоянной эластичности дисперсии (Modified Constant Elasticity of Variance Model, M-CEV), предложенная в [2] и обобщающая CEV-модель Кокса. Она свободна от указанных недостатков и ее частным случаем является модель Кокса-Ингерсолла-Росса [3].

Заметим, что в литературе по финансовой математике имеются модели, дающие более реалистичное моделирование динамики цен, например, основанные на процессах Леви [4] или на фрактальном броуновском движении [5]. Однако использование этих моделей для задач управления портфелем сопряжено с рядом трудностей. В случае моделей, использующих процессы Леви, оптимальная стратегия инвестирования выражается через решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения, для которого получение даже численного решения является крайне сложной задачей. При использовании фрактального броуновского движения в силу отсутствия у него марковского свойства затруднительно вывести даже принцип оптимальности, методы же поиска оптимального решения вообще неизвестны.

В [6] рассматривалось управление портфелем для моделей со стохастической волатильностью, для которых получено оптимальное управление портфелем как решение краевой задачи для уравнения в частных производных параболического типа. Явные решения и асимптотические разложения для некоторых моделей можно найти в работах [7, 8]. Обзор статей, посвященных аналитическим решениям задач портфельной оптимизации, см. в [9]. С работами по моделированию транзакционных издержек можно познакомиться в [10].

В данной работе для степенной функции полезности найдено аналитическое решение задачи оптимизации стоимости портфеля в

*Работа полностью выполнена при поддержке РНФ, номер гранта 15-11-30042.

терминах специальных функций. Для полученного решения выведены асимптотики и приближенные формулы, содержащие только элементарные функции.

В разделе 2 дается постановка задачи. В разделе 3 представлен основной результат статьи. Применение полученных результатов в статистическом арбитраже приведено в разделе 4.

2. Постановка задачи

Рассмотрим простейший рынок, состоящий из безрисковой облигации стоимости B_t и рискового актива стоимости S_t. Эти цены удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dB_s / B_s = r(s)ds,\ s \ge t, \quad B_t = B > 0,$$

$$dS_s / S_s = \left[r(s) - q(s) + \lambda(S_s, s)\right]ds + \sigma(S_s, s)dW_s,\ s \ge t, \quad S_t = S,$$

где W_s – стандартный винеровский процесс, $r(s) \ge 0$ – процентная ставка $q(s) \ge 0$ – интенсивность выплаты дивидендов, $\sigma(S_s, s) > 0$ – волатильность и $\lambda(S_s, s) \ge 0$ – интенсивность дефолта. Модель M-CEV определяется следующими параметрами в общем уравнении:

$$\sigma(S,s) = aS^{\beta},\ \lambda(S,s) = b + ca^2 S^{2\beta},\ a > 0,\ \beta \ne 0,\ q(s) \equiv q,\ r(s) \equiv r,\ \alpha = r - q + b.$$

Отвечающее этой модели стохастическое уравнение имеет вид

$$dS_s / S_s = \left(\alpha + ca^2 S_s^{2\beta}\right)ds + aS_s^{\beta} dW_s,\ s \ge t. \tag{1}$$

В предположении отсутствия транзакционных издержек динамика стоимости портфеля X_s, состоящего из акций и облигаций, удовлетворяет уравнению $dX_s = r\left(X_s - \pi_s S_s\right)ds + \pi_s dS_s$, где π_s является размером позиции инвестора в акциях, т.е. количеством единиц актива, которое держит инвестор. Управление π_s предполагается предсказуемым относительно фильтрации, порожденной процессом W_s, $s \ge t$, и удовлетворяет условию

$$E\int_t^T \sigma^2(S_s, s)\pi_s^2 ds < \infty.$$

Будем считать, что разрешены короткие позиции (когда $\pi_s < 0$) и нет ограничений на величину капитала инвестора X_s. Пусть зафиксирован момент времени $T > t$. Пусть $U(x) = x^{\gamma} / \gamma$, $\gamma \ne 0$, $\gamma < 1$ – степенная функция полезности. Поставим задачу нахождения функции цены

$$J(X,S,t) = \sup_{\pi} E\left[U(X_T) \quad | \quad X_t = X, \quad S_t = S\right], \tag{2}$$

а также соответствующей оптимальной стратегии $\pi^*(S, X, t)$.

В данной работе мы опираемся на следующую теорему из [6], которая демонстрирует сведение задачи (2) со степенной функцией полезности к краевой задачи для уравнения в частных производных параболического типа. Отметим, что в [6] π_s обозначает стоимость рисковых бумаг в портфеле, а не их количество.

Теорема 1 [6]. *Пусть цена актива* S_s, $s \ge t$, *удовлетворяет следующей системе стохастических дифференциальных уравнений.*

$$dS_s / S_s = \mu(V_s, s)ds + \sigma(V_s, s)dW_s^1,\ s \ge t,\ S_t = S,$$

$$dV_s = b(V_s, s)ds + a(V_s, s)dW_s^2,\ s \ge t,\ V_t = v,$$

где W_s^1 *и* W_s^2 *– стандартные винеровские процессы с коэффициентом корреляции* ρ. *Склонность инвестора к риску описывается степенной функцией* $U(x)$. *Тогда функция цены (2) равна* $J(X,S,v,t) = X^\gamma f^{1/\delta}(v,t)/\gamma$, *где* $\delta = 1 + \gamma\rho^2/(1-\gamma)$, *а функция* f *является решением краевой задачи для линейного уравнения в частных производных параболического типа*

$$\frac{a^2(v,t)}{2} f''_{vv} + \left[b(v,t) + \frac{\gamma\rho(\mu(v,t) - r(t))a(v,t)}{(1-\gamma)\sigma(v,t)} \right] f'_v +$$

$$+ \left[\frac{\delta\gamma(\mu(v,t) - r(t))^2}{2(1-\gamma)\sigma^2(v,t)} + r(t)\frac{\gamma}{1-\gamma} \right] f + f'_t = 0, \quad f\left(v,T\right) = 1.$$

Оптимальная стратегия имеет вид

$$\pi^*(X,S,v,t) = \frac{X}{S(1-\gamma)} \left(\frac{\mu(v,t) - r(t)}{\sigma^2(v,t)} + \frac{\rho}{\delta} \frac{a(v,t) f_v(v,t)}{\sigma(v,t) f(v,t)} \right).$$

Нетрудно показать, что с помощью замен переменных $S = v$, $\rho = 1$, $b(S,s) = S\mu(S,s)$ и $a(S,s) = S\sigma(S,s)$ результат теоремы 1 может быть применен для M-CEV модели. Функция цены (2) в этом случае равна $J(X,S,t) = X^\gamma f^{1/\delta}(S,t)/\gamma$, где $\delta = 1/(1-\gamma)$, а f является решением задачи Коши

$$\frac{a^2 S^{2\beta+2}}{2} f''_{SS} + \delta S\left(\alpha - \gamma r + c a^2 S^{2\beta}\right) f'_S +$$

$$+ \left[\frac{\delta(\delta-1)}{2a^2} \left(\left(\alpha - r\right) S^{-\beta} + c S^\beta \right)^2 + r\delta\gamma \right] f + f'_t = 0,\ f\left(S,T\right) = 1. \qquad (3)$$

Оптимальная стратегия задается формулой

$$\pi^*(X,S,t) = X\left(\delta \frac{\alpha - r + c a^2 S^{2\beta}}{a^2 S^{2\beta+2}} + \frac{f'_S(S,t)}{f(S,t)} \right).$$

В следующем разделе мы укажем точное решение задачи (3) в терминах вырожденных гипергеометрических функций.

3. Основные результаты

Используя преобразование Лапласа по временно́й переменной, можно получить явное решение задачи (3) через вырожденную гипергеометрическую функцию Уиттекера $M_{\lambda,\eta}(z)$ (см., например, [11]).

Теорема 2. *Решением краевой задачи* (3) *является функция*

$$f(S,t) = e^{-r\delta\gamma t + R\tau + zB(\tau)} D^{\lambda}(\tau) \frac{\Gamma(\eta - \lambda + 1/2)}{\Gamma(1+2\eta)} e^{-zA(\tau)/2} \left(zA(\tau) \right)^{\lambda} M_{\lambda,\eta}\left(zA(\tau) \right), \tag{4}$$

где введены переменные $z = \Lambda S^{-2\beta}$, $\tau = a^2 \beta^2 \Lambda (T - t)$, $\Gamma(z)$ *– гамма-функция,* $M_{\lambda,\eta}(z)$ *– функция Уиттекера с параметрами*

$$\lambda = -1/2 - \left(1/2 - \delta c\right)/2\beta, \ \eta = \sqrt{\left(\lambda + 1/2\right)^2 + \delta(1-\delta)c^2/(4a^4\beta^2)}.$$

Остальные константы и функции равны

$$\Lambda = \frac{\sqrt{\delta}}{a^2|\beta|}\sqrt{\alpha^2 - \gamma r^2}, Q = \frac{\delta(\alpha - \gamma r)}{\Lambda \beta a^2}, \ R = -2Q\lambda - \frac{\delta(1-\delta)(\alpha - r)c}{\Lambda a^4 \beta^2},$$

$$A(\tau) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}^2(\tau)(\mathrm{cth}(\tau) + Q)}, \ B(\tau) = \frac{Q^2 - 1}{2(\mathrm{cth}(\tau) + Q)}, \ D(\tau) = \frac{Q^2 - 1}{4A(\tau)B(\tau)}.$$

Оптимальная стратегия инвестора равна

$$\pi^*(X,S,t) = X\left[\delta \frac{\alpha - r + ca^2 S^{2\beta}}{a^2 S^{2\beta+2}} + \right.$$

$$\left. + \left(B(\tau) + \frac{(\lambda + \eta + 1/2) M_{\lambda+1,\eta}(A(\tau)z)}{z M_{\lambda,\eta}(A(\tau)z)} \right) \frac{dz}{dS} \right]. \tag{5}$$

Доказательство. Функцию f представим в виде

$$f(S,t) = z^{\lambda} e^{-r\delta\gamma t + R\tau + Qz/2} h(z,\tau),$$

где функция $h(z,\tau)$ решает задачу Коши для уравнения

$$h''_{zz} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1/4 - \eta^2}{z^2} \right) h = \frac{1}{2z} h'_{\tau}, \ h(z,0) = z^{-\lambda} e^{-Qz/2}.$$

Чтобы проверить последнее утверждение, следует последовательно использовать функции $\tilde{f}(z,t)$, $\hat{f}(z,t)$ и $h(z,\tau)$, определяемые равенствами

$$f(S,t) = \tilde{f}(z,t), \ \tilde{f}(z,t) = e^{-r\delta\gamma t} \hat{f}(z,t), \ \hat{f}(z,t) = z^{\lambda} e^{\tau R + Qz/2} h(z,\tau).$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению Уиттекера. Обозначим через $G(z;\zeta)$ образ преобразования от оригинала $h(z,\tau)$, т.е.

$$G(z;\zeta) = \int_0^{\infty} e^{-\zeta\tau} h(z,\tau) d\tau, \ \mathrm{Re}\,\zeta > 0.$$

Функция $G(z;\zeta)$ является решением уравнения

$$G'' + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\zeta/2}{z} + \frac{1/4 - \eta^2}{z^2} \right) G = -\chi(z), \qquad \chi(z) = \frac{1}{2} z^{-1-\lambda} e^{-Qz/2}. \qquad (8)$$

Однородное уравнение (8) является уравнением Уиттекера, имеющим два линейно независимых решения – функции Уиттекера $M_{-\zeta/2,\eta}(z)$ и $W_{-\zeta/2,\eta}(z)$ [11]. Введем функцию $\Xi(v,\eta) = \Gamma(\eta - v + 1/2)/\Gamma(1+2\eta)$. Используя вронскиан для функций Уиттекера [12, формула 13.14.26]

$$M_{-\zeta/2,\eta}(z) W'_{-\zeta/2,\eta}(z) - M'_{-\zeta/2,\eta}(z) W_{-\zeta/2,\eta}(z) \equiv -\frac{1}{\Xi(-\zeta/2,\eta)},$$

нетрудно показать, что решение неоднородной задачи (8) может быть представлено как

$$G(z;\zeta) = \Xi(-\zeta/2,\eta) \Big(M_{-\zeta/2,\eta}(z) \int_0^z \chi(\varphi) W_{-\zeta/2,\eta}(\varphi) d\varphi +$$

$$+ W_{-\zeta/2,\eta}(z) \int_z^\infty \chi(\varphi) M_{-\zeta/2,\eta}(\varphi) d\varphi \Big).$$

Учитывая следующее соотношение между функциями Уиттекера и модифицированными функциями Бесселя [13, формула 6.669.4]

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(a_1+a_2)t\,\mathrm{ch}(x)} \mathrm{cth}^{2v}\left(\frac{x}{2}\right) I_{2\eta}\left(t\sqrt{a_1 a_2}\,\mathrm{sh}\,x\right) dx = \Xi(v,\eta) W_{v,\eta}(a_1 t) M_{v,\eta}(a_2 t),$$

$$\mathrm{Re}(1/2 + \eta - v) > 0,\ \mathrm{Re}(\eta) > 0,\ a_1 > a_2,$$

при $v = -\zeta/2$, $a_1 t = \varphi$, $a_2 t = z$ получаем

$$G(z;\zeta) = \frac{\sqrt{z}}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi^{-1/2-\lambda} e^{-\frac{Q\varphi}{2} - \frac{z+\varphi}{2}\mathrm{ch}\psi} \mathrm{th}^\zeta\left(\frac{\psi}{2}\right) I_{2\eta}\left(\sqrt{z\varphi}\,\mathrm{sh}\psi\right) d\varphi d\psi.$$

Применяя соотношение [13, формула 6.643.2]

$$\int_0^\infty x^{-1/2-\lambda} e^{-\alpha x} I_{2\eta}\left(2\beta\sqrt{x}\right) dx = \frac{\Xi(\lambda,\eta)}{\beta} e^{\beta^2/(2\alpha)} \alpha^\lambda M_{\lambda,\eta}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right),\ \mathrm{Re}(1/2 - \lambda + \eta) > 0,$$

с $\alpha = (\mathrm{ch}\psi + Q)/2$, $\beta = \sqrt{z}\mathrm{sh}\psi/2$, находим представление для $G(z;\zeta)$:

$$G(z;\zeta) = \Xi(\lambda,\eta) \int_0^\infty e^{-\frac{z\mathrm{ch}\psi}{2} + \frac{z\mathrm{sh}^2\psi}{4(\mathrm{ch}\psi+Q)}} \mathrm{th}^\zeta\left(\frac{\psi}{2}\right) \left(\frac{\mathrm{ch}\psi + Q}{2}\right)^\lambda M_{\lambda,\eta}\left(\frac{z\mathrm{sh}^2\psi}{2(\mathrm{ch}\psi+Q)}\right) \frac{d\psi}{\mathrm{sh}\psi}.$$

Отсюда следует равенство

$$z^\lambda e^{\frac{Qz}{2}} G(z;\zeta) = \Xi(\lambda,\eta) \int_0^\infty e^{zY(\psi)} Z^\lambda(\psi)\,\mathrm{th}^\zeta\left(\frac{\psi}{2}\right) \left(zI(\psi)\right)^\lambda e^{-\frac{zI(\psi)}{2}} M_{\lambda,\eta}\left(zI(\psi)\right) \frac{d\psi}{\mathrm{sh}\psi},$$

где используются функции

$$I(\psi) = \frac{\mathrm{sh}^2\psi}{2(\mathrm{ch}\psi + Q)}, \quad Y(\psi) = \frac{Q^2 - 1}{2(\mathrm{ch}\psi + Q)}, \quad Z(\psi) = \frac{(\mathrm{ch}\psi + Q)^2}{\mathrm{sh}^2\psi}.$$

Введем переменную интегрирования $\nu = \ln(\operatorname{th}(\psi/2))$. Тогда справедливы соотношения

$$\frac{d\psi}{\operatorname{sh}\psi} = d\nu,\ \operatorname{sh}\psi = \frac{1}{\operatorname{sh}(-\nu)},\ \operatorname{ch}\psi = \operatorname{cth}(-\nu),$$
$$I(\psi) = A(-\nu),\ Y(\psi) = B(-\nu),\ Z(\psi) = D(-\nu),$$

с помощью которых получаем

$$z^{\lambda} e^{Qz} G(z;\zeta) = \Xi(\lambda,\eta)\int_{-\infty}^{0} e^{zB(-\nu)-\frac{z}{2}A(-\nu)+\zeta\nu} D^{\lambda}(-\nu)\left(zA(-\nu)\right)^{\lambda} M_{\lambda,\eta}\left(zA(-\nu)\right)d\nu.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, мы находим выражение для исходной функции

$$f(z,t) = \frac{\Xi(\lambda,\eta)}{2\pi i} e^{-r\gamma\delta t+R\tau} \int_{N-i\infty}^{N+i\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{zB(-\nu)-\frac{z}{2}A(-\nu)+\zeta(\tau+\nu)} \times$$
$$\times\left(zD(-\nu)A(-\nu)\right)^{\lambda} M_{\lambda,\eta}\left(zA(-\nu)\right)d\nu d\zeta,$$

где N выбирается так, чтобы все особенности подынтегрального выражения лежали левее прямой $(N-i\infty, N+i\infty)$ на комплексной плоскости. Воспользуемся известным определением дельта-функции Дирака

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{N-i\infty}^{N+i\infty} e^{z\zeta} d\zeta = \delta(z)$$

и изменим порядок интегрирования. В результате

$$f(S,t) = \Xi(\lambda,\eta)e^{-r\gamma\delta t+R\tau}\int_{-\infty}^{0}\delta(\nu+\tau)e^{zB(-\nu)-\frac{z}{2}A(-\nu)}(zD(-\nu)A(-\nu))^{\lambda} M_{\lambda,\eta}(zA(-\nu))d\nu.$$

Заметим, что $\tau \ge 0$. Следовательно, мы можем дополнить интервал интегрирования до всей прямой. Затем, используя свойство дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\zeta - z)g(\zeta)d\zeta = g(z),$$

получаем главную формулу (4). Выражение для f_v'/f вычисляется с применением правила дифференцирования функции Уиттекера [12, формула 13.15.20 при $n=1$]

$$\frac{d}{dp}\left[e^{-p/2}p^{\lambda}M_{\lambda,\eta}(p)\right] = (1/2+\lambda+\eta)e^{-p/2}p^{\lambda-1}M_{\lambda+1,\eta}(p)\,. \blacksquare$$

Замечание. В случае $\alpha = r\sqrt{\gamma}$ формулы (4) и (5) упрощаются. Действительно, в этом случае $\Lambda = \tau = z = 0$, а предельные значения

$$\lim_{\Lambda\to 0} D(\tau) = 1,\ \theta(S,t) = \lim_{\Lambda\to 0} zA(\tau) = 0.5a^{-2}\beta^{-2}S^{-2\beta}(T-t)^{-1},$$
$$\theta(S,t) = \lim_{\Lambda\to 0} zB(\tau) = \frac{1}{2S^{2\beta}}\frac{\delta^2(\alpha-\gamma r)(T-t)}{a^2(1+\beta\delta(\alpha-\gamma r))},$$

$$\Psi(t)=\lim_{\Lambda\to 0}R\tau=-2\delta\beta\lambda(\alpha-\gamma r)(T-t)-\frac{\delta(1-\delta)c(\alpha-r)(T-t)}{a^2}.$$

Отсюда

$$f(S,t)=\Xi(\lambda,\eta)e^{-r\gamma\delta t+\Omega(S,t)+\Psi(t)-\theta(S,t)/2}\theta^{\lambda}(S,t)M_{\lambda,\eta}\left(\theta(S,t)\right)$$

и

$$\pi^*(X,S,t)=X\left(\delta\frac{\alpha-r+ca^2S^{2\beta}}{a^2S^{2\beta+2}}-\frac{2\beta(\lambda+\eta+1/2)}{S}\frac{M_{\lambda+1,\eta}\left(\theta(S,t)\right)}{M_{\lambda,\eta}\left(\theta(S,t)\right)}\right),$$

т.е. дисконтированная функция f зависит только от выражения $\theta(S,t)$. Отметим также, что замена $z_t=\Lambda/S_t^{2\beta}$ переводит исходный процесс (1) в процесс Феллера, также известный в финансовой математике как процесс Кокса – Ингерсолла – Росса [3].

Теорема 3. *Положим $p=A(\tau)z$. Для выражения $M_{\lambda+1,\eta}(p)/M_{\lambda,\eta}(p)$ в* (5) *справедливы следующие соотношения:*

$$\frac{M_{\lambda+1,\eta}(p)}{M_{\lambda,\eta}(p)}\underset{p\to 0}{\sim}1-\frac{p}{1+2\eta},\quad 2\eta\neq-1,-2,...,\tag{6a}$$

$$\frac{M_{\lambda+1,\eta}(p)}{M_{\lambda,\eta}(p)}\underset{p\to\infty}{\sim}\frac{\eta-\lambda-1/2}{p},\quad \eta-\lambda\neq-1/2,-3/2,....\tag{6b}$$

Также для него справедливо следующее разложение в цепную дробь:

$$\frac{M_{\lambda+1,\eta}(A(\tau)z)}{M_{\lambda,\eta}(A(\tau)z)}=\frac{1}{\lambda+\eta+1/2}\left(b_0(\tau,z)+\cfrac{a_0}{b_1(\tau,z)+\cfrac{a_1}{b_2(\tau,z)+...}}\right),\tag{7}$$

где

$$a_n=\eta^2-(n-\lambda+1/2)^2,\ b_n(\tau,z)=-2(n-\lambda)-A(\tau)z,\ n=0,1,2,....$$

Доказательство. Формулы (6a) и (6b) находим, используя приближения для функции $M_{\lambda,\eta}(p)$ в нуле и бесконечности [12, формулы 13.14.6 и 13.14.20]:

$$M_{\lambda,\eta}(p)\underset{p\to 0}{\sim}e^{-p/2}p^{\eta+1/2}\left(1+\Xi(\lambda,\eta)p+o(p)\right),\ 2\eta\neq-1,-2,...,$$

$$M_{\lambda,\eta}(p)\underset{p\to\infty}{\sim}\Xi(\lambda,\eta)^{-1}e^{h/2}p^{-\lambda},\ \eta-\lambda\neq-1/2,-3/2,....$$

Разложение (7) выводится из тождества [12, равенство 13.15.1]

$$(\lambda-\eta-1/2)M_{\lambda-1,\eta}(p)+(p-2\lambda)M_{\lambda,\eta}(p)+(\lambda+\eta+1/2)M_{\lambda+1,\eta}(p)\equiv 0.$$

Для этого надо его применить рекуррентно в виде

$$M_{\lambda+1,\eta}(p)/M_{\lambda,\eta}(p)=\frac{1}{\lambda+\eta+1/2}\left(2\lambda-p-\frac{\lambda-\eta-1/2}{M_{\lambda,\eta}(p)/M_{\lambda-1,\eta}(p)}\right).\qquad\blacksquare$$

4. Приложение к парной торговле

В данном разделе мы предложим стратегию статистического арбитража, основанную на полученных результатах. Рассмотрим торговлю спредом, т.е. разницей между двумя ко-интегрированными активами. Ко-интеграция подразумевает возможность с помощью линейной комбинации нестационарных процессов изменения стоимости активов получить стационарный процесс. Предположим, что трейдер знает честную (среднюю на большом интервале – long-term mean) цену спреда. Также трейдер полагает, что цена спреда рано или поздно сойдется к честной цене. В таком случае трейдер может извлекать прибыль, занимая длинную позицию при цене ниже среднего и короткую в противном случае. Возникает вопрос: как трейдер должен оптимально управлять своей позицией, исходя из данных рынка, собственной склонности к риску и количества капитала в его распоряжении?

Данная задача может быть сформулирована как задача портфельной оптимизации, для которой необходимо положить $r(t)=0$. Тогда динамика капитала для оптимального управления π_s задается уравнением $dX_s=\pi_s dS_s$, где π_s – размер позиции по спреду. Рассмотрим процесс Кокса-Ингерсолла-Росса, который соответствует следующим значениям параметров: $\alpha=-\kappa$, $c=\kappa\overline{S}/a^2$ и $\beta=-1/2$. При этом процесс будет удовлетворять уравнению $dS_s=\kappa(\overline{S}-S_s)dt+a\sqrt{S_s}dW_s$. Предположим, что выполнено условие Феллера $\kappa\overline{S}\ge a^2/2$, обеспечивающее с вероятностью 1 неотрицательность процесса S_s, $s\ge t$ [14]. При фиксированном s случайная величина S_s (с точностью до множителя) имеет нецентральное хи-квадрат распределение [14], а ее математическое ожидание при $s\to\infty$ сходится к среднему значению $\overline{S}$. Параметр κ интерпретируется как скорость возврата к $\overline{S}$, а a является волатильностью. Для этого процесса функция цены и оптимальное управление определяются соотношениями (4) и (5). Параметры модели и функции задаются формулами

$$\lambda=-\frac{\delta\kappa\overline{S}}{a^2},\ \eta=\sqrt{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\delta(1-\delta)\kappa^2\overline{S}^2}{a^8}},\ \Lambda=\frac{2\kappa\sqrt{\delta}}{a^2},\ Q=\sqrt{\delta},$$

$$\tau=\frac{1}{2}\kappa\sqrt{\delta}(T-t),\ R=2\delta\sqrt{\delta}\left(\frac{k\overline{S}}{a^2}-\frac{k\overline{S}}{a^4}\right)+2\sqrt{\delta}\frac{k\overline{S}}{a^4},$$

$$A(\tau)=\frac{1}{2\operatorname{sh}^2(\tau)(\operatorname{cth}(\tau)+\sqrt{\delta})},\ B(\tau)=\frac{\delta-1}{2(\operatorname{cth}(\tau)+\sqrt{\delta})},\ D(\tau)=\frac{\delta-1}{4A(\tau)B(\tau)}.$$

Оптимальная стратегия имеет вид

$$\pi^*(X,S,t) = X\left(\frac{\delta k}{a^2 S^2}(\bar{S}-S) + B(\tau) + \frac{\lambda+\eta+1/2}{S}\frac{M_{\lambda+1,\eta}\left(2\kappa\sqrt{\delta}SA(\tau)/a^2\right)}{M_{\lambda,\eta}\left(2\kappa\sqrt{\delta}SA(\tau)/a^2\right)}\right).$$

Литература

1. Merton R.C. Continuous-time finance. N.-Y.: Blackwell Publishers, 1990.
2. Heath D., Platen E. Consistent pricing and hedging for a modified constant elasticity of variance // Quantitative Finance. 2002. V. 2. № 6. P. 459-467.
3. Cox J., Ingersoll J., Ross S. 1985. A theory of the term structure of interest rates // Econometrica. V. 53. № 2. P. 385-407.
4. Cont R., Tankov P. Financial modeling with Jump Processes. London: Chapman & Hall/CRC Press., 2008.
5. Mishura Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Springer Lecture Notes of Mathematics. N.Y.: Springer, 2008.
6. Zariphopoulou T. A solution approach to valuation with unhedgeable risks // Finance and Stochastics. 2001. V. 5. № 1. P. 61-82.
7. Богуславская Е.В., Муравей Д.Л. Точное решение задачи оптимального инвестирования в модели Хестона // Теория вероятностей и её применение. 2015. Т. 60. № 4. С. 811-819.
8. Chacko G., Viceira L. M. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets // The Review of Financial Studies. 2005. V. 18. № 4. P. 1369-1402.
9. Chen P., Sircar R. Optimal trading with predictable return and stochastic volatility/ Preprint. Princeton: Princeton University Press, 2015.
10. Kabanov Y., Safarian M. Market with transaction costs. Mathematical theory. N.Y.: Springer finance, 2010.
11. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963.
13. NIST Handbook of mathematical functions/ National Bureau of Standards. Ed. by F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R. Boisvert and C.W. Clark. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. http://dlmf.nist.gov.
14. Feller W. Two singular diffusion problems // Annals of Mathematics. 1951. V. 54. № 1. P. 173-182.