М.С. Никольский

ОБ S-РЕГУЛЯРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТАХ

Статья продолжает исследования монографий [1–4] и работы [5] по линейной задаче оптимального быстродействия. В ней получены конструктивные достаточные условия для линейных управляемых объектов, обеспечивающие простую структуру оптимальных управлений в задаче оптимального быстродействия. Получены теоремы единственности оптимального управления. Обоснована также строгая выпуклость множества достижимости для S-регулярных управляемых объектов. В статье широко используется аппарат опорных функций, составляющий важный раздел современного выпуклого анализа. Полученные результаты, в частности, могут представить интерес в преподавании курса линейной теории оптимального быстродействия и при практическом решении задач оптимального быстродействия.

1. Рассмотрим линейный стационарный управляемый объект вида (см. [1–4]):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u \in U, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ ($n \geqslant 1$), U — неодноточечный выпуклый компакт из R^r ($r \geqslant 1$), A и B — постоянные матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ соответственно.

Обозначения и определения. Символом R^k ($k \geqslant 1$) условимся обозначать действительное K-мерное евклидово арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемых в виде столбцов. Стандартным образом определяем в R^k скалярное произведение векторов $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и длину вектора $|\cdot|$. В дальнейшем нам понадобятся некоторые определения и факты из выпуклого анализа (см. [3]).

Пусть K — непустой компакт из R^k. Его опорную функцию $W(K, \psi)$ определим формулой

$$W(K, \psi) = \max_{y \in K} \langle \psi, y \rangle,$$

где ψ — произвольный вектор из R^k.

Для непрерывной функции $f(z)$, заданной на компакте $Z \subset R^k$, обозначим

$$\operatorname{Arg}\max_{z \in Z} f(z) = \{z \in Z \colon f(z) = \max_{z \in Z} f(z)\}.$$

Определение. Выпуклый компакт $Z \subset R^k$ назовем строго выпуклым, если множество $\operatorname{Arg}\max_{z \in Z} \langle \psi, z \rangle$ одноточечно для любого ненулевого вектора $\psi \in R^k$.

Движение управляемого объекта (1) происходит под воздействием измеримого по Лебегу управления $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, из начального состояния $x(0) = x_0 \in R^n$. Множество измеримых функций $u(t) \in U$, $t \geqslant 0$, обозначим $\mathcal{U}$. Сопоставим управляемому объекту (1) сопряженное уравнение (см. [1–4])

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{2}$$

где $\psi \in R^n$, $*$ означает транспонирование матрицы. Пусть $\psi(t)$ — произвольное решение уравнения (2). Сопоставим ему при $t \in R^1$ многозначное отображение

$$\omega(t,\, \psi(\cdot)) = \operatorname{Arg}\max_{u\in U}\langle\psi(t),\, Bu\rangle. \tag{3}$$

Приведем важное для дальнейшего

Определение. Управляемый объект (1) назовем S-регулярным, если для любого нетривиального решения $\psi(t)$ уравнения (2) и любого $T > 0$ множество $\omega(t,\, \psi(\cdot))$ на $[0,\, T]$ является одноточечным, за исключением быть может конечного числа точек из $[0,\, T]$.

Отметим, что свойство S-регулярности полезно, например, при изучении задачи оптимального быстродействия для управляемого объекта (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ и терминальным условием $x(t_1) = m$ $(x_0 \neq m)$ с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина (см. [1–4]). Действительно, пусть $(\tilde{u}(t),\, \tilde{\psi}(t))$ оптимальная пара на $[0,\, \tau]$, где $\tau > 0$ — время оптимального быстродействия и $\tilde{\psi}(t)$ нетривиальное решение уравнения (2), соответствующее оптимальному управлению $\tilde{u}(\cdot)$ в силу принципа максимума Понтрягина. Тогда $\omega(t,\, \tilde{\psi}(\cdot))$ для S-регулярного управляемого объекта (1) — однозначная функция на $[0,\, \tau]$ за исключением быть может конечного числа точек из $[0,\, \tau]$. В силу принципа максимума Понтрягина оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ совпадает с $\omega(t,\, \tilde{\psi}(\cdot))$ почти всюду на $[0,\, \tau]$ в точках однозначности $\omega(t,\, \tilde{\psi}(\cdot))$. В такой ситуации говорят, что принцип максимума определяет $\tilde{u}(t)$ на $[0,\, \tau]$ однозначно с точностью до эквивалентности функций в смысле Лебега. Отметим также, что в рассматриваемом случае отсутствуют особые режимы, что сильно облегчает задачу практического нахождения оптимального управления.

2. Приведем примеры S-регулярных управляемых объектов общего вида.

Пример 1. Пусть $U \subset R^r$ $(r \geqslant 1)$ является неодноточечным выпуклым многогранником (см. определение и свойства в Гл. 3 [1] и в Гл. II [4]). Известно, что выпуклый многогранник U имеет конечное число одномерных граней, которые называются ребрами. Пусть

α_i, $i = 1, \ldots, p$, — ребра U. Каждое ребро α_i является выпуклой оболочкой некоторых двух вершин β_i, γ_i многогранника U, т. е.

$$\alpha_i = \mathrm{co}\{\beta_i, \gamma_i\}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Обозначим

$$\delta_i = \gamma_i - \beta_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Предположим выполненным следующее

Условие общности положения. Для каждого $i = 1, \ldots, p$ векторы

$$B\delta_i, AB\delta_i, \ldots, A^{n-1}B\delta_i$$

линейно независимы.

Из результатов Гл. 3 [1] вытекает, что управляемый объект (1) является S-регулярным. Далее из результатов Гл. 3 [1] также вытекает, что при данных нетривиальном решении $\psi(\cdot)$ и $T > 0$ точки τ неодноточечности $\omega(t, \psi(\cdot))$ (их конечное число) характеризуются условием: хотя бы для одного номера $i = 1, \ldots, p$ выполняется равенство $\langle \psi(\tau), B\delta_i \rangle = 0$.

Пример 2. Пусть U — неодноточечный строго выпуклый компакт. Рассмотрим некоторое нетривиальное решение $\psi(t)$ сопряженного уравнения (2). При $t \in R^1$ имеем равенство

$$\omega(t, \psi(\cdot)) = \mathrm{Arg}\max_{u \in U} \langle B^*\psi(t), u \rangle, \tag{4}$$

где $*$ означает транспонирование матрицы.

Нетрудно показать, что при каждом $t \in R^1$ множество $\omega(t, \psi(\cdot))$ является непустым выпуклым компактом и что при каждом $t \in R^1$, для которого $B^*\psi(t) \neq 0$, множество $\omega(t, \psi(\cdot))$ одноточечно. Отметим (см. (4)), что в этом примере множество $\omega(t, \psi(\cdot))$ неодноточечно, если и только если $B^*\psi(t) = 0$, и тогда оно совпадает с U.

Фиксируем $T > 0$ и изучим совокупность $\mathfrak{M}$ корней уравнения

$$B^*\psi(t) = 0$$

на $[0, T]$. Как хорошо известно, при $t \in R^1$ справедлива формула

$$\psi(t) = \exp(-tA^*)\xi, \tag{5}$$

где $\exp(\cdot)$ означает экспоненциал матрицы, ξ — некоторый ненулевой вектор из R^n.

Допустим, что множество $\mathfrak{M}$ бесконечное. Тогда существует последовательность различных чисел $t_i \in \mathfrak{M}$, где $i = 1, 2, \ldots$. Выделим из нее бесконечную подпоследовательность t_{i_j}, которая сходится к некоторому $t_* \in [0, T]$. Нетрудно видеть, что $t_* \in \mathfrak{M}$. Элементы матрицы $\exp(-tA^*)$ являются аналитическими функциями на R^1. Из сказанного вытекает, что аналитическая векторная функция $B^*\psi(t)$ (см. (5)) обращается в нулевой вектор на бесконечной последовательности t_{i_j} с предельной точкой $t_* \in \mathfrak{M}$. Из теории аналитических функций теперь получаем, что

$$B^*\psi(t) \equiv 0 \quad \text{на} \quad R^1.$$

Отсюда и из формулы (5) дифференцированием при $t = 0$ получаем равенства

$$B^*\xi = 0,\, B^*A^*\xi = 0,\, \ldots,\, B^*(A^*)^{n-1}\xi = 0.$$

Их можно переписать в виде $\xi^*K = 0$, где

$$K = (B,\, AB,\, \ldots,\, A^{n-1}B), \tag{6}$$

$*$ означает транспонирование одностолбцовой матрицы. Допустим, что ранг матрицы управляемости K равен n, т. е.

$$\operatorname{rank} K = n. \tag{7}$$

Тогда на основании вышесказанного методом от противного получаем, что функция $B^*\psi(t)$ может иметь на $[0, T]$ лишь конечное число векторных корней. Учитывая произвольность нетривиального решения $\psi(t)$ сопряженного уравнения и произвольность константы $T > 0$ получаем, что при соотношениях (6). (7) имеет место S-регулярность управляемого объекта (1).

3. Пусть управляемый объект (1) является S-регулярным. Рассмотрим некоторые свойства таких объектов. Фиксируем некоторое нетривиальное решение $\psi(t)$ уравнения (2) и $T > 0$. Можно показать, что в общем случае многозначное отображение $\omega(t,\, \psi(\cdot))$ (см. (3), (4)) полунепрерывно сверху (см. определение, например, в [3]) на $[0, T]$. Используя это свойство, от противного доказывается, что для S-регулярного управляемого объекта (1) многозначное отображение $\omega(t,\, \psi(\cdot))$ непрерывно относительно метрики Хаусдорфа (см. определение, например, в [3]) во всех точках $\tau \in [0, T]$ за исключением быть может конечного числа точек (точек неодноточечности $\omega(t,\, \psi(\cdot))$). Из сказанного вытекает, например, что оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, где $\tau_0 > 0$ — время оптимального быстродействия, эквивалентно в смысле Лебега на $[0, \tau_0]$ кусочно-непрерывной функции, совпадающей с $\omega(t,\, \tilde{\psi}(\cdot))$ всюду на $[0, \tau_0]$ за исключением точек неодноточечности $\omega(t,\, \tilde{\psi}(\cdot))$. Здесь через $\tilde{\psi}(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, обозначено нетривиальное решение (2), соответствующее оптимальному управлению $\tilde{u}(\cdot)$ согласно принципу максимума Понтрягина.

Теперь изучим множество достижимости $D(x_0,\, \theta)$ (см. [2, 3]) для S-регулярного управляемого объекта (1) с начальным состоянием $x(0) = x_0$ в момент времени $\theta \geqslant 0$. Из результатов [3] следует, что $D(x_0,\, \theta)$ — выпуклый компакт, причем

$$D(x_0,\, \theta) = \exp(\theta A)x_0 + D(o,\, \theta). \tag{8}$$

Для выпуклого компакта $D(0,\, \theta)$ справедлива формула

$$D(0,\, \theta) = \int\limits_0^\theta \exp((\theta - s)A)BU\, ds,$$

где справа стоит интеграл от подинтегрального многозначного отображения (определение и свойства интеграла от многозначного отображения см. в [3]). Отметим, что в силу результатов [3] при $\psi \in R^n$ для выпуклого компакта $D(0,\, \theta)$ имеет место важная формула

$$W(D(0,\, \theta),\, \psi) = \int\limits_0^\theta W(e^{(\theta-s)A}BU,\, \psi)\, ds = \int\limits_0^\theta W(BU,\, e^{-sA^*}e^{\theta A^*}\psi)\, ds. \tag{9}$$

Справедлива

Теорема 1. *Для S-регулярного управляемого объекта* (1) *множество достижимости $D(x_0,\, \theta)$ при произвольных $x_0 \in R^n$, $\theta \geqslant 0$ является строго выпуклым компактом.*

Доказательство. Выше уже отмечалось, что при $x_0 \in R^n$, $\theta \geqslant 0$ множества $D(x_0,\, \theta)$, $D(0,\, \theta_0)$ являются выпуклыми компактами. Фиксируем ненулевой вектор φ. Пусть

$$\hat{\xi} \in \operatorname{Arg} \max_{\xi \in D(0,\, \theta)} \langle \varphi,\, \xi \rangle. \tag{10}$$

Вектор $\hat{\xi}$ допускает представление вида:

$$\hat{\xi} = \int\limits_0^\theta e^{(\theta-s)A}B\hat{u}(s)\, ds, \tag{11}$$

где $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$. Из сказанного получаем, что

$$\langle \varphi,\, \hat{\xi} \rangle = \int\limits_0^\theta \langle B\hat{u}(s),\, \hat{\psi}(s) \rangle\, ds, \tag{12}$$

где $\tilde{\psi}(t)$ — нетривиальное решение уравнения (2) вида

$$\hat{\psi}(s) = \exp(-sA^*)(\exp(\theta A^*)\varphi.$$

Из формул (9), (10) вытекает, что

$$\langle \varphi, \hat{\xi} \rangle = \int\limits_0^\theta W(BU, \hat{\psi}(s))\, ds. \tag{13}$$

При $s \in [0, T]$ очевидно выполняется неравенство

$$\langle B\hat{u}(s), \hat{\psi}(s) \rangle \leqslant W(BU, \hat{\psi}(s)).$$

Из соотношений (12), (13) от противного получаем, что почти всюду при $s \in [0, T]$

$$\langle B\hat{u}(s), \hat{\psi}(s) \rangle = W(BU, \hat{\psi}(s)) = \max_{u \in U} \langle Bu, \hat{\psi}(s) \rangle. \tag{14}$$

В силу S-регулярности управляемого объекта (1) из (14) вытекает, что $\hat{u}(s)$ почти всюду совпадает с $\omega(s, \hat{\psi}(s))$ в точках однозначности $\omega(s, \hat{\psi}(s))$. Из формулы (11) и сказанного вытекает, что множество

$$\operatorname{Arg} \max_{\xi \in D(0,\, \theta)} \langle \varphi, \xi \rangle$$

состоит из единственного вектора $\hat{\xi} \in D(0, \theta)$. Т. о. строгая выпуклость выпуклого компакта $D(0, \theta)$ доказана. С помощью соотношения (8) нетрудно далее обосновать строгую выпуклость и множества $D(x_0, \theta)$.

Для S-регулярного управляемого объекта (1) рассмотрим двухточечную задачу оптимального быстродействия с краевыми условиями $x(0) = x_0$, $x(t_1) = m \in R^n$, где $x_0 \neq m$. Пусть управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [0, \tau]$ являются оптимальными по быстродействию в этой задаче (через $\tau > 0$ обозначено время оптимального быстродействия).

Теорема 2. *Для оптимальных управлений* $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ *почти всюду на* $[0, \tau]$ *выполняется равенство* $u_1(t) = u_2(t)$.

Доказательство. Известно (см. [2, 3]), что терминальная точка m принадлежит границе выпуклого компакта $D(x_0, \tau)$. Обозначим через φ, где $\varphi \neq 0$, опорный вектор в точке m к выпуклому компакту $D(x_0, \tau)$. Тогда, как известно,

$$m \in \operatorname{Arg} \max_{y \in D(x_0,\, \tau)} \langle \varphi, y \rangle.$$

Используя соображения доказательства теоремы 1, теперь нетрудно показать, что почти всюду на $[0, \tau]$ управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ совпадают с $\omega(t, \tilde{\psi}(\cdot))$ в точках однозначности, где $\tilde{\psi}(t) = \exp(-tA^*)\exp(\tau A^*)\varphi$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим задачу быстродействия для S-регулярного управляемого объекта (1) с начальной точкой $x(0) = x_0$ и с неодноточечным терминальным множеством M, где M — выпуклый компакт и $x_0 \notin M$. Пусть управления $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in [0, \tau]$, являются оптимальными по быстродействию в этой задаче (через $\tau > 0$ обозначено время оптимального быстродействия). Справедлива

Теорема 3. *Для оптимальных управлений* $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ *почти всюду на* $[0, \tau]$ *выполняется равенство* $u_1(t) = u_2(t)$.

Доказательство. Обозначим $\xi_i = x(\tau, x_0, u_i(\cdot))$, где $i = 1, 2$. Из линейной теории оптимального быстродействия (см., например, [2, 3]) следует, что точки ξ_i являются граничными точками выпуклого компакта $D(x_0, \tau)$. Более того, для точки ξ_1 существует такой ненулевой вектор $\varphi \in R^n$, что для точек $y \in D(x_0, \tau)$ выполняется неравенство

$$\langle \varphi, y \rangle \leqslant \langle \varphi, \xi_1 \rangle, \tag{15}$$

а для точек $z \in M$ выполняется неравенство

$$\langle \varphi, z \rangle \geqslant (\langle \varphi, \xi_1 \rangle). \tag{16}$$

Из (15) следует, что

$$\langle \varphi, \xi_2 \rangle \leqslant (\langle \varphi, \xi_1 \rangle).$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\langle \varphi, \xi_2 \rangle = \langle \varphi, \xi_1 \rangle$.

Используя соображения доказательства теоремы 1, нетрудно доказать, что в этом случае $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на $[0, \tau]$.

Случай 2:

$$\langle \varphi, \xi_2 \rangle < (\langle \varphi, \xi_1 \rangle). \tag{17}$$

Отметим, что для точки ξ_2 выполняется включение $\xi_2 \in M$. Поэтому (см. (16))

$$\langle \varphi, \xi_2 \rangle \geqslant (\langle \varphi, \xi_1 \rangle). \tag{18}$$

Из (17), (18) вытекает, что случай 2 невозможен. Теорема доказана.

Замечание. В монографии [2] (см. с. 86) было введено понятие нормальной линейной управляемой системы в более общем, чем у нас, нестационарном случае. Имеется определенная связь результата нашей теоремы 1 с результатами теоремы 3 на с. 86 из [2]. Однако, следует отметить, что наша теорема 1, как и другие наши теоремы, доказывается с помощью аппарата опорных функций, который не использовался в монографии [2], что представляет определенный интерес для теории.

Приношу благодарность профессору Н.Л. Григоренко за обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
2. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
3. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. — М.: Высшая школа, 2001.
4. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
5. *Никольский М. С.* О свойстве регулярности оптимального по быстродействию управления // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ. 2013, № 44. С. 41–49.