Л.И. Петрова

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СКАЧКАМИ ПРОИЗВОДНЫХ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ И ТРАЕКТОРИЯХ

В работе исследуются разрывы нормальных производных на характеристиках и на траектории., которые возникают при расчете неизэнтропического течения газа. Для таких расчетов необходимо знать соотношения между скачками производных.

Исследуя эффекты, связанные с возникновением завихренности, можно заметить особенность численного решения уравнений Эйлера. Ее можно показать на следующем примере. Допустим, что начальные условия соответствуют изоэнтропическому течению, то есть энтропия одна и та же на всех траекториях. Для рассматриваемого идеального газа она сохраняется на траектории. Получается, что энтропия должна быть постоянной во все время течения. Однако в реальных случаях (неустановившееся течение, обтекание тела, неоднородная среда) в направлении, нормальном к траектории, производная от энтропии терпит разрыв. Получается, что с одной стороны энтропия (функция) должна оставаться постоянной, а с другой стороны ее производные терпят разрыв. Это противоречие разрешается тем, что разрыв производной от энтропии аннулируется изменением функции тока или искривлением траектории. Именно этот эффект и должен учитываться при численном счете. В частности, при расчете одномерного нестационарного неизоэнтропического течения газа в условия на характеристиках входит производная энтропии по координате, нормальной к траектории. Для вычисления этой производной требуется знать скачок производной от энтропии.

Скачок производной от энтропии можно получить из соотношений, связывающих скачки производных от газодинамических функций. Эти соотношения находятся из динамических условий совместности уравнений Эйлера. В работе [1] рассматриваются динамические условия совместности для уравнений Эйлера для случая, когда давление является функцией только плотности, то есть $p=f(\rho)$.

В данной работе подобным образом рассмотрен случай, когда $p=f(\rho,s)$ где s – энтропия, и получены соотношения, связывающие скачки производных от функций, описывающих скорость частиц, скорость звука и энтропию, которые позволяют проводить численные расчеты неизоэнтропических течений газа.

Схема получения этих соотношений для одномерных нестационарных уравнений следующая. Записываются уравнения Эйлера. Выводятся уравнения характеристик и условия на характеристиках.

Записываются кинематические условия совместности [1], связывающие скачки производных газодинамических функций с производными от характеристик. Эти условия подставляются в уравнения Эйлера. В результате получается однородная система уравнений для скачков производных от искомых функций. На характеристической поверхности определитель этой системы равен нулю и в результате находятся соотношения между производными от искомых функций.

Уравнения одномерного нестационарного неизоэнтропического течения газа

Введем вместо энтропии функцию ϑ, связанную с энтропией формулой $s = \vartheta^{\gamma}$. Уравнение состояния в этом случае можно записать в виде $p = \vartheta^{\gamma}(x,t)\rho^{\gamma}$.

Возьмем неизвестные u, ϑ и $a = \gamma\, p/\rho$. Уравнения тогда записываются в виде [2]:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + u\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{\gamma - 1} a \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{a^2}{\gamma - 1} a \frac{\partial \ln\vartheta}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

Характеристики и условия на характеристиках

Пусть $\omega(x,t) = 0$ есть характеристическая поверхность.

Для данной системы уравнений получается следующее соотношение для определения характеристической поверхности[1] (справа приведен столбец расширенной матрицы):

$$\begin{vmatrix} \frac{d\omega}{dt} & \frac{\gamma-1}{2}a\frac{\partial\omega}{\partial x} & 0 \\ \frac{2}{\gamma-1}a\frac{\partial\omega}{\partial x} & \frac{d\omega}{dt} & -\frac{a^2}{(\gamma-1)\vartheta}\frac{\partial\omega}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \end{vmatrix} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{du}{dt} \\ \frac{d\vartheta}{dt} \end{matrix} \right.$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}.$$

Из характеристического соотношения следует, что

$$\frac{d\omega}{dt}\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - a^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right] = 0$$

то есть получаются два соотношения

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

и

$$\frac{d\omega}{dt} = \pm a\frac{\partial\omega}{\partial x}.$$

Первое соотношение описывает траекторию, а второе – две характеристики.

С помощью расширенной матрицы получаются следующие условия на траектории

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

и на характеристиках:

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{2}{\gamma-1}\frac{da}{dt} \mp \frac{a}{(\gamma-1)\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

или соответственно

$$d\vartheta = 0$$

и

$$du \pm \frac{2}{\gamma-1}da \mp \frac{a}{(\gamma-1)\vartheta}d\vartheta = 0$$

Разрывы производных и соотношения между скачками производных

Нахождение характеристик и условий на характеристиках не решает задачи расчета течения неизэнтропического течения газа, так как в направлениях, нормальных к характеристикам, производные искомых функций могут терпеть разрыв. Для вычисления скачков производных необходимо учитывать кинематические условия совместности[1], связывающие скачки производных газодинамических функций f с производными от характеристик:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = k\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = k\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

У каждой функции свой коэффициент пропорциональности. Поэтому для скачков производных искомых функций можно записать следующие соотношения:

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] = m\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right] = m\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial a}{\partial t}\right] = r\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \left[\frac{\partial a}{\partial x}\right] = r\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = h\frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = h\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

Вставим эти соотношения в исходные уравнения и получим следующие соотношения:

$$r\frac{d\omega}{dt} + h\frac{\gamma - 1}{2}a\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$r\frac{2}{\gamma - 1}a\frac{\partial \omega}{\partial x} + h\frac{d\omega}{dt} - m\frac{a^2}{(\gamma - 1)\vartheta}\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$m\frac{d\omega}{dt} = 0 \tag{3}$$

Для определения коэффициентов r, h, m получается система однородных уравнений. На траектории

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Поэтому из соотношения (3) следует, что возможно $m \neq 0$.

Из соотношения (1) на траектории при условии $d\omega / dt = 0$ получается $h\partial\omega / \partial x = 0$. То есть, если $\partial\omega / \partial x \neq 0$, то $h = 0$.

А из соотношения (2) следует, что если $\partial\omega / \partial x \neq 0$, то $r = m\,a / 2\vartheta$.

Таким образом, на траектории получаются следующие соотношения для коэффициентов: $m \neq 0$, $h = 0$, $r = m\,a / 2\vartheta$. Это означает, что на траектории нормальная производная скорости не терпит разрыв (здесь $\eta_{l.}$ – направление, нормальное к траектории):

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_{l.}}\right] = 0$$

т.к. $h = 0$ (если $\partial\omega / \partial x \neq 0$), а скачки производных, нормальных к траектории, от функций a и ϑ, могут не равняться нулю и связаны соотношением

$$\left[\frac{\partial a}{\partial \eta_l}\right] = \frac{a}{2\vartheta}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta_l}\right].$$

Если перейти от функции ϑ к энтропии $s = \vartheta^{\gamma}$, то получится следующее соотношение, связывающее скачки производных, нормальных к траектории, от скорости звука a и энтропии:

$$\left[\frac{\partial a}{\partial \eta_l}\right] = \frac{a}{2\gamma s}\left[\frac{\partial s}{\partial \eta_l}\right]$$

На характеристиках

$$\frac{d\omega}{dt} \neq 0$$

поэтому из соотношения (3) следует, что $m = 0$. Это означает, что скачки производных, нормальных к характеристикам, от функции ϑ равны нулю (здесь η_{+-} – направления, нормальные к соответствующим характеристикам):

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta_{+-}}\right] = 0.$$

То есть, равны нулю скачки производных, нормальных к характеристикам, от энтропии:

$$\left[\frac{\partial s}{\partial \eta_{+-}}\right] = 0 \tag{4}$$

Так как на характеристиках

$$\frac{d\omega}{dt} = \pm a \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

то из соотношения (2) получаются следующие соотношения, связывающие коэффициенты h и r:

$$h = \mp \frac{2}{\lambda - 1} r\,.$$

Поэтому для скачков производных, нормальных к характеристикам, получаются следующие соотношения:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_{+-}}\right] = \mp \frac{2}{\gamma - 1}\left[\frac{\partial a}{\partial \eta_{+-}}\right]$$

Таким образом, получаются следующие соотношения для скачков производных, нормальных к траектории:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_{1}}\right] = 0\,, \quad \left[\frac{\partial a}{\partial \eta_{1}}\right] = \frac{a}{2\gamma s}\left[\frac{\partial s}{\partial \eta_{1}}\right]$$

и нормальных к характеристикам:

$$\left[\frac{\partial s}{\partial \eta_{+-}}\right] = 0\,, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \eta_{+-}}\right] = \mp \frac{2}{\gamma - 1}\left[\frac{\partial a}{\partial \eta_{+-}}\right].$$

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Т-ТЛ., том 4, 1937, 812 с.

2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, часть 2, М.:Фитматгиз, 1963, 727с.