

Раздел I. Численные методы

1. ***Мамаев Н.В., Крылов А.С.*** Использование анизотропной диффузии в многомасштабном методе нахождения хребтовых структур. 5
2. ***Дмитриев В.И., Ингтем Ж.Г.*** Метод регуляризованных сплайнов (R-сплайн) для задач приближения функций. 16

Раздел II. Математическое моделирование

3. ***Ян Цзяньсюнь*** Исследование прямой задачи дисперсии поверхностной волны в слоистых средах. 25
4. ***Баев А.В., Гаврилов С.В.*** Обратная задача рассеяния в нестационарной среде. 38
5. ***Степаненко С.В., Разгулин А.В., Трофимов В.А.*** Об одной модели, описывающей распространение фемтосекундного импульса в среде с керровской нелинейностью. 51

Раздел III. Информатика

6. ***Белов А.Г.*** Вычисление доверительных полос среднего значения повторных откликов. 62
7. ***Морозов В.В.*** Об одной игровой задаче продажи ценных бумаг. 72
8. ***Козлов В. Д., Майсурадзе А.И.*** Оценка параметров трёхпараметрического логнормального распределения. 79
9. ***Козлов В. Д., Майсурадзе А.И.*** Разделение смеси трёхпараметрических логнормальных распределений при анализе коммуникационных сред. 90

Раздел I. Численные методы

Н.В. Мамаев, А.С. Крылов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ В МНОГОМАСШТАБНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ХРЕБТОВЫХ СТРУКТУР*

Введение

Задача поиска хребтовых структур на изображениях является одной из классических в компьютерном зрении. Особый практический интерес эта задача вызывает в медицине (например, анализ сети кровеносных сосудов), в аэрофотосъемке (анализ гидрографической сети, сети дорог, трубопроводов и ЛЭП), распознавание и анализ надписей, проводов, веток и стволов деревьев и т.д. Иногда хребтовые структуры (“ridges”) также называют “жирными линиями”. Первой классической работой по детектированию хребтов и долин является [1]. Подход основан на переходе от дискретного представления сетки пикселей к непрерывному путем бикубической интерполяции и анализу поверхности яркости с помощью дифференциального исчисления. Коэффициенты полиномов вычисляются с помощью сверток изображения с матрицами 5×5 , что фактически эквивалентно производным функции Гаусса с дисперсией близкой к 1. Поэтому метод применим для поиска только узких линий. Рассмотрена классификация на хребет, долину, седло и пятно с использованием аппарата направленных производных, последнее можно считать предтечей алгоритма немаксимального подавления [2]. Более детальное математическое определение хребтовых структур дано в книге [3]. Рассмотрены жирные линии в многомерных пространствах, как в Евклидовом, так и в Римановом пространстве и на многообразиях, предложено тензорное описание. Даны детальные математические определения. Рассмотрен ряд трудных случаев и многомасштабный подход. Более компактный, но достаточно строгий и полный математический анализ и формулировка задачи в рамках многомасштабного подхода даны в [4]. Предложен алгоритм, который, однако, до настоящего времени не получил широкого распространения, по-видимому, из-за сложности его программной реализации. Следует особо подчеркнуть, что в отличие от ряда других особенностей, таких как контуры [2] и уголки, детектор хребтовых линий существенно требует многомасштабного подхода. Это объясняется тем, что детектирующим

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-07-01207 и госбюджетной темы факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

фильтром (информационным признаком) для особенностей типа хребет или долина является лапласиан или иные характеристики, основанные на использовании матрицы Гессе. При этом, заметный отклик появляется только на масштабе близком к ширине линии. Здесь и далее под откликом будем понимать значение свертки исходного изображения с детектирующим фильтром. В работе [5] при достаточно примитивном использовании многомасштабности, дано достаточно интересное математическое определение хребтовых структур и функционалов для их детектирования, рассмотрен трехмерный случай в приложении к анализу сети сосудов на изображениях компьютерной и магнитно-резонансной томографии. Альтернативным подходом можно считать методы на основе анизотропной диффузии [6, 7], которые могут быть приспособлены для детектирования хребтовых структур и тоже позволяют интегрировать информацию с разных масштабов. В работе [8] дано обобщение детектора жирных линий на случай цветных изображений, а также разрабатывался более простой подход к детектированию хребтовых структур на основе связки фильтра-признака и немаксимального подавления. Немаксимальное подавление предлагалось выполнять в трехмерном многомасштабном пространстве (scale-space) по двум, специальным образом, выбранным направлениям. Однако, дальнейшие исследования показали, что подобная многомасштабная версия немаксимального подавления работает ненадежно из-за того, что производные по пространственным координатам существенно превышают производные по масштабу. Это приводит к ситуации аналогичной овражному эффекту в градиентном спуске. Здесь же, в силу специфики задачи, итерации по оси масштаба и какое-либо подавление овражного эффекта невозможны, требуется за один шаг получить достаточно хорошее приближение. В настоящей работе предлагается подход, позволяющий преодолеть указанные проблемы. Немаксимальное подавление выполняется раздельно на каждом уровне детальности, а потом выполняется поиск соответствующих точек между найденными хребтовыми линиями на разных уровнях и немаксимальное подавление уже среди найденных троек соответствующих точек – предыдущий масштаб, текущий и следующий. За счет использования пирамиды детальности длина поиска невелика и в направлении поиска отсутствуют ложные максимумы. Сжатие изображения производится один раз для каждой октавы, подобно тому, как это организовано в детекторе SIFT [9]. Отказ от использования производных выше второй [8] повышает устойчивость алгоритма в случае близко расположенных параллельных линий. Аналогично [10], вычисления начинаются с удвоенного разрешения, т.к. в ходе вычисления собственных векторов и собственных значений матрицы Гессе

используются квадраты производных, т.е. спектр сигнала становится шире.

Для улучшения качества изображения перед запуском алгоритма детектирования хребтовых структур к исходному изображению применяется анизотропная диффузия [6,7,11,12]. За счет выбора направлений в диффузионном тензоре удается усилить хребтовые структуры, что благоприятно отражается на их последующем детектировании. Отметим, что в [7] описанный метод был назван анизотропной диффузией, хотя, по сути, этот метод является неоднородной изотропной диффузией.

Многомасштабный метод детектирования хребтовых структур

Фильтром, определяющим наличие хребтовых структур [9], может являться лапласиан $\Delta L^\sigma(x, y)$ для

$$L^\sigma(x, y) = \sigma^2 \cdot I(x, y) * G_\sigma(x, y), \quad (1)$$

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

где $I(x, y)$ - интенсивность исходного изображения. Множитель σ^2 присутствует в (1) для того, чтобы оклик лапласиана на различных масштабах был одинаков. Иными словами, если увеличить и изображение, и σ в одинаковое число раз, то значение $L^\sigma(x, y)$ в соответствующих точках будет одинаково. При дифференцировании получающегося изображения $L^\sigma(x, y)$ учтем, что взятие производной эквивалентно свертке исходного изображения $I(x, y)$ с соответствующей производной функции Гаусса. Пусть $L_{xx}^\sigma(x, y)$, $L_{xy}^\sigma(x, y)$ и $L_{yy}^\sigma(x, y)$ – производные $L^\sigma(x, y)$ по соответствующим переменным. Тогда лапласиан функции $\Delta L^\sigma(x, y)$ будет иметь максимум (минимум) в центральной точке долины (хребта) шириной 2σ . Отметим также, что лапласиан будет иметь максимум и на контурах (edges) двумерных объектов, в том числе и на границах жирных линий, ширина которых больше, чем 2σ . Для определения направления нормали к линии построим матрицу Гессе:

$$H^\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} L_{xx}^\sigma(x, y) & L_{xy}^\sigma(x, y) \\ L_{yx}^\sigma(x, y) & L_{yy}^\sigma(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тогда собственный вектор $\vec{v}^\sigma(x, y)$ матрицы (3), соответствующий наименьшему по модулю собственному значению будет направлен вдоль хребта (долины) [10]. Исходя из этого, алгоритм для обнаружения

жирных линий на одном масштабе сводится к нахождению локальных максимумов лапласиана $\Delta L^\sigma(x, y)$ по направлению $\vec{v}^\sigma(x, y)$. Для подавления немаксимумов целесообразно использовать алгоритм, аналогичный используемому детектором границ Canny [1]. Для подавления откликов на граничных линиях используется тест [3] на изменение знака скалярного произведения направлений градиента в точках, находящимся вдоль и против направления, задаваемого вектором $\vec{v}^\sigma(x, y)$:

$$\vec{g}^\sigma(\vec{x} + \vec{v}^\sigma(x, y)) \cdot \vec{g}^\sigma(\vec{x} - \vec{v}^\sigma(x, y)) < 0, \quad (4)$$

где $\vec{x} = (x, y)$, \vec{g}^σ - градиент функции $L^\sigma(x, y)$. Для интерполяции значений $\vec{g}^\sigma(\vec{x})$ используется линейная интерполяция вдоль линий, соединяющих центры внешних пикселей квадрата 3x3, аналогично тому, как это делается при подавлении немаксимальных значений.

При реализации многомасштабного метода необходима процедура сопоставления центров линий с соседних масштабов. При этом надо учитывать, что на изгибах линий при изменении значения σ происходит сдвиг положения точек, на которых достигается максимальный отклик лапласиана. Чтобы это учесть, мы производим поиск для проверки точки на локальный максимум вдоль нормали к линии в этой точке. Существует несколько подходов к реализации многомасштабных методов обнаружения особенностей на изображениях. Простейший метод – построение карт признаков на масштабах $\sigma_i = \sigma_0 \cdot s^i$, $i = 0, \dots, k$, способом, описанным выше. В этом случае нет проблемы связанной с вычислением положения точки на конкретном масштабе: все карты откликов вычислены на одном и том изображении. Однако, и длина поиска вдоль направления нормали растет с увеличением значения σ , что приводит к большим вычислительным затратам, и, что более важно, к появлению ложных локальных максимумов. Другой способ – постепенное уменьшение изображения на каждом уровне в S раз. При данном подходе проблемы ложных максимумов не возникает, также, путем уменьшения шага по масштабу S , можно производить поиск для определения локального максимума в пределах одного пикселя. Но здесь возникает проблема изменения масштаба исходного изображения: интерполяция для

масштабирования изображения в нецелое число раз вносит искажения, которые приводят к появлению ложных локальных максимумов по шкале масштабов, что сильно затрудняет определение истинного масштаба линии, где отклик на нее максимален [3].

Чтобы избежать артефактов интерполяции и внесения из-за этого погрешностей в величину отклика признака (лапласиана) предлагается изменять размер изображения только раз в октаву так, как это сделано в SIFT [8]. Для изображения $I_0(x, y) = I(x, y) \cdot s^i$ будем производить поиск хребтовых структур на l масштабах σ_i :

$$\sigma_i = \sigma_0 \cdot \sqrt[l]{2^i} . \quad (5)$$

Для карт признаков на масштабах σ_i , $i = 0, \dots, l-1$ произведем поиск локальных максимумов по нескольким масштабам. Теперь построим изображение $I_1(x, y)$, уменьшенное ровно в 2 раза путем усреднения соседних 4 пикселей (по окрестности 2×2) и произведем поиск хребтовых линий на новом изображении σ_i , $i = -1, \dots, l$, и поиск локальных максимумов при $i = 0, \dots, l-1$. Аналогично, при переходе по октавам, изображение $I_k(x, y)$ получается из изображения $I_{k-1}(x, y)$ путем уменьшения в 2 раза. Поиск хребтовых структур и локальных максимумов производится при тех же σ_i . При этом хребтовой линии, найденной на масштабе σ_i , на изображении $I_k(x, y)$ соответствует линия на изображении $I(x, y)$, найденная на масштабе $\sigma_{i,k} = \sigma_0 \cdot \sqrt[l]{2^{i+kl}}$.

Предлагаемый подход сочетает в себе достоинства двух первых: отсутствие необходимости пересчета координат на изображениях, соответствующим соседним масштабам - от первого подхода, короткая длина при поиске локального максимума - от второго. При этом, появления ложных локальных максимумов с использованием такого метода уменьшения разрешения изображения в 2 раза не наблюдается.

Для совместной отрисовки осевых линий необходима процедура переноса линий, найденных на изображениях, соответствующим различным октавам. Для объединения найденных линий с линиями на более детальном масштабе используется следующий подход, основанный на математической морфологии:

- Каждому пикселю на изображении $R_k(x, y)$ с найденными осевыми линиями на октаве k будем ставить в соответствие квадрат размера 3×3 на изображении $\tilde{R}_k(x, y)$, которое соответствует линиям, найденным на октаве k , но его размер равен размеру изображения $R_{k-1}(x, y)$.
- Объединим изображения $\tilde{R}_k(x, y)$ и $R_{k-1}(x, y)$ в одно: $\bar{R}_{k-1}(x, y) = \max(\tilde{R}_k(x, y), R_{k-1}(x, y))$.
- Произведем утоньшение линий на изображении $\bar{R}_{k-1}(x, y)$ с помощью алгоритма [13] для получения осевых линий.

Изображения детектированных осевых линий хребтовых структур переносятся на исходное разрешение путем последовательного переноса детектированных линий с верхних октав на нижние. Для отсека ложных линий в результате детектирования используется выделение связных компонент на итоговом изображении и удаление тех, количество пикселей в которых меньше 10.

Метод анизотропной диффузии для предобработки хребтовых структур

Анизотропная диффузия очень часто используется для обработки и анализа изображений [6,7,11,12,14]. В данном методе, обработанное изображение представляет собой решение диффузионного уравнения с граничными условиями Неймана:

$$\frac{\partial}{\partial t} I(x, y, t) = \operatorname{div}(D(x, y, t) \nabla(I(x, y, t))), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (6)$$

$$I(x, y, 0) = I(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial I(x, y, t)}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, t > 0, \quad (8)$$

где $I(x, y)$ – исходное изображение, $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq C\}$ – область определения изображения. Анизотропия диффузии возникает в силу наличия в (6) тензора диффузии $D(x, y, t)$. Этот тензор контролирует силу диффузии в определенных направлениях: размытие в окрестности точки (x, y) в момент времени t будет происходить вдоль собственных векторов тензора $D(x, y, t)$, при этом размытие будет тем сильнее, чем

больше значение отвечающего собственному вектору собственного значения. Для предобработки хребтовых структур предлагается производить размытие преимущественно вдоль структур и почти не производить поперек, что позволит сохранить границы хребтовых структур. Это, в тоже время, делает сами хребтовые структуры более однородными, что приводит к усилению отклика лапласиана на хребтовых структурах. Для построения тензора диффузии обычно используют собственные вектора структурного тензора [12, 14], а собственные значения задают, используя собственные значения структурного тензора. Структурный тензор для изображения $I(x, y)$ определяется как:

$$S^\sigma(x, y, t) = \begin{pmatrix} \langle L_x^\sigma(x, y, t) \rangle^2 & \langle L_x^\sigma(x, y, t) L_y^\sigma(x, y, t) \rangle \\ \langle L_x^\sigma(x, y, t) L_y^\sigma(x, y, t) \rangle & \langle L_y^\sigma(x, y, t) \rangle^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по Гауссу, а $L^\sigma(x, y, t)$ определяется так же, как и (1), но для изображения $I(x, y, t)$. Для построения структурного тензора мы используем при вычислениях значение $\sigma = 0.7$, а для усреднения значение $\sigma_s = 3$. Для тензора диффузии берутся следующие собственные значения: 10 для собственного вектора структурного тензора, отвечающего меньшему собственному значению структурного тензора и 0.1 – большему. В итоге, если $\vec{v}_1(x, y)$ и $\vec{v}_2(x, y)$ – собственные вектора структурного тензора, отвечающие большему и меньшему собственному значению соответственно, то тензор диффузии вычисляется следующим образом:

$$D(x, y, t) = 0.1 \cdot \vec{v}_1(x, y) \vec{v}_1(x, y)^T + 10 \cdot \vec{v}_2(x, y) \vec{v}_2(x, y)^T. \quad (10)$$

Для решения уравнения (6) с граничными условиями (7-8) используется разностная схема, описанная в [14]. Результат применения анизотропной диффузии к тестовому изображению показан на рис. 1.

Результаты

При тестировании использовались следующие значения параметров: число слоев для одной октавы $l = 4$, число октав было выбрано равным 4. Значение σ_0 было выбрано равным 2. Для того чтобы было возможным обнаружение линий шириной, меньшей 2, и для преодоления проблем с уширением спектра [10], на вход методу подавалось увеличенное с помощью бикубической интерполяции исходное изображение.

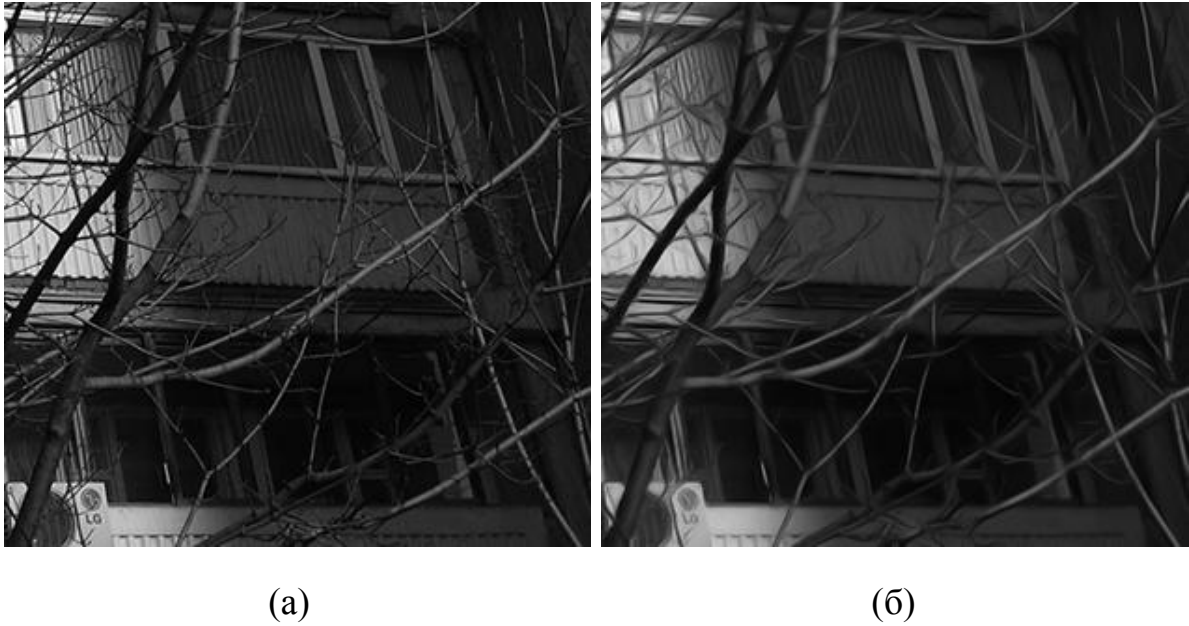


Рис. 1. Тестовое изображение (а) и результат применения анизотропной диффузии (б), время диффузии $t = 30$.

Для тестирования предлагаемого метода на офтальмологических изображениях использовалась база DRIVE [15], состоящая из 20 изображений. Особенностью таких офтальмологических изображений является наличие только линий типа "долина", невысокий контраст, переменный по площади изображения, шумность, наличие двойных линий (с хребтом посередине) и предсказуемый заранее диапазон ширины линий. Пример изображения из этой базы и результат работы алгоритма показаны на рис. 2. Видно, что алгоритму удается найти линии различной ширины. Однако есть проблемы в местах ветвления и пересечения сосудов. В таких местах значение лапласиана будет близко к 0, поэтому для правильного детектирования хребтовых структур в местах ветвлений и пересечений сосудов требуются методы сшивки обнаруженных линий [16]. Пример сравнения результатов детектирования с использованием анизотропной диффузии в качестве этапа предобработки и без показан на рис. 3. Видно, что использование анизотропной диффузии приводит к лучшему детектированию хребтовых структур.

Для изображений в базе DRIVE [15] есть экспертная разметка сосудов, выполненная двумя людьми. Для оценки общего качества метода было произведено сравнение найденных осевых линий сосудов с этой разметкой. В качестве меры качества использовался коэффициент

Жаккара $J(R; A) = \frac{|R \cap A|}{|R \cup A|}$ [17] между найденными линиями и

утопшенными с помощью метода [13] линиями с экспертной разметки. Среднее значение коэффициентов по всем 20 изображениям составило 64.5 для первого эксперта и 65.3 для второго. С использованием анизотропной диффузии в качестве этапа предобработки средние значения коэффициентов составили 66.2 и 66.7, что показывает улучшение итогового результата детектирования.

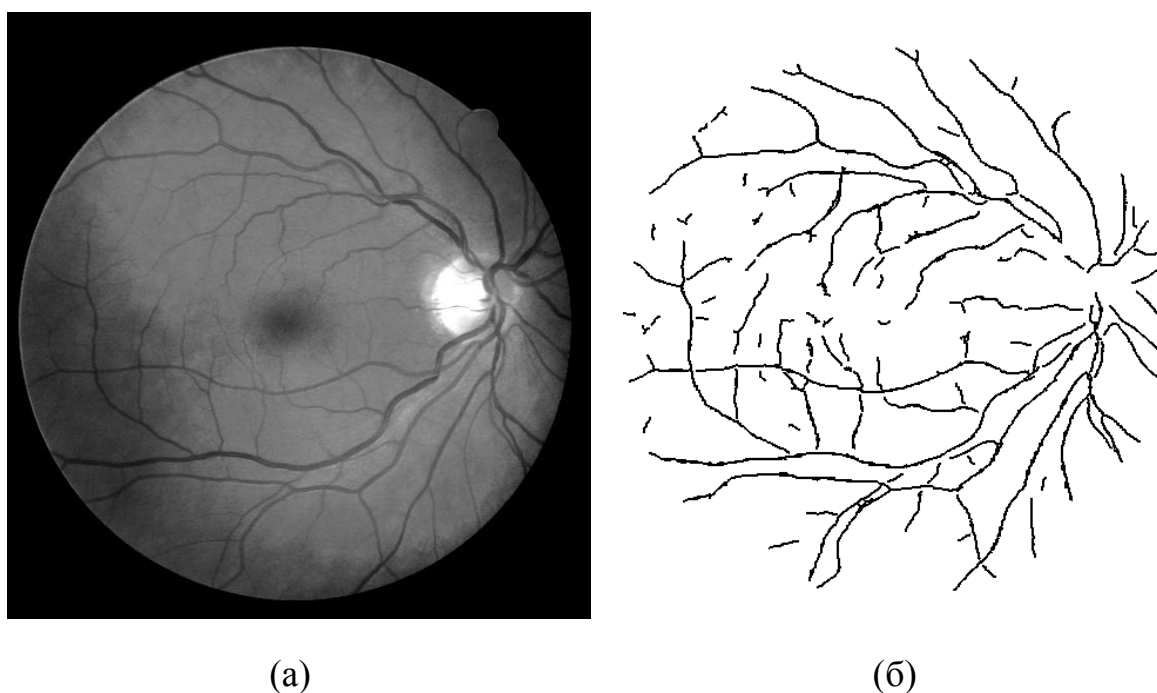


Рис. 2. Изображение из базы DRIVE [15] (а) и результат работы алгоритма выделения хребтовых структур (б).

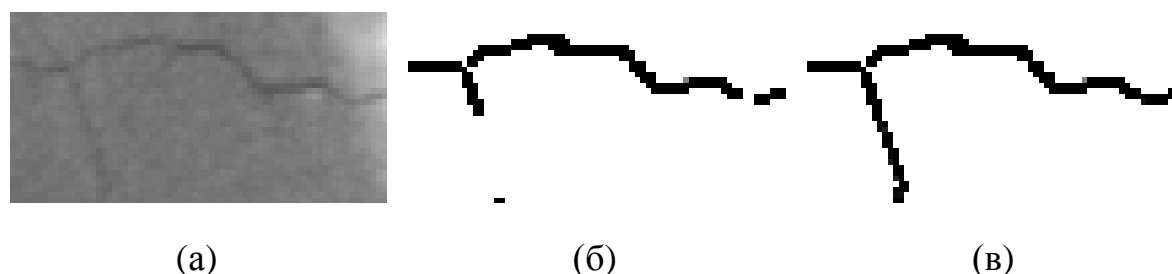


Рис. 3. Увеличенный фрагмент изображения с рис. 2а (а), результат выделения хребтовых структур без использования анизотропной диффузии в качестве этапа предобработки (б) и с ее использованием (в).

Заключение

Предложен метод многомасштабного детектирования хребтовых структур на изображениях с использованием анизотропной диффузии для предобработки изображения. Использование такой предобработки позволяет улучшить качество детектирования. Дальнейшая работа будет направлена на более аккуратное нахождение хребтовых структур с субпиксельной точностью и сшивке линий в точках их ветвления и пересечения.

Литература

1. *R. Haralick*: Ridges and valleys in digital images. *Comp. Vision, Graphics, and Image Proc.*, 22, pp. 28–38 (1983).
2. *Canny J.*: A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 6, pp. 679–698 (1986).
3. *Eberly D.*: Ridges in Image and Data Analysis. Springer, Heidelberg (1996).
4. *Lindeberg T.*: Edge detection and ridge detection with automatic scale selection. In: *Proceedings of the Conference on Compute Vision and Pattern Recognition*, pp. 465–470, San Francisco, CA (1996).
5. *Frangi A., Niessen W., Vincken K., Viergever M.*: Multiscale vessel enhancement filtering. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI'98*, W.M. Wells, A. Colchester and S.L. Delp (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, 1496, pp. 130–137 (1998).
6. *Direkoglu C., Dahyot R., Manzke M.*: On Using Anisotropic Diffusion for Skeleton Extraction. *Int. Journal of Computer Vision*, 100, pp.170–189 (2012).
7. *Perona P., Malik J.*: Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *Proceedings of IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision*. pp. 16–22 (1987).
8. *Khanina N., Semeikina E., Yurin D.*: Scale-space color blob and ridge detection. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 1, pp. 221–227 (2012).
9. *Lowe D.*: Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *Int. Journal of Computer Vision*, 60, pp. 91–110 (2004).
10. *Kothe U.*: Edge and Junction Detection with an Improved Structure Tensor. *Proc. of 25th DAGM Symposium, Magdeburg 2003*, *Lecture Notes in Computer Science*. 2781, pp. 25–32, (2003).
11. *Mamaev N. V., Yurin D. V., Krylov A. S.*: Finding the parameters of a nonlinear diffusion denoising method by ridge analysis. *Computational Mathematics and Modeling*. 29(3), pp. 334–343, (2018).

12. *Weickert J.*: Anisotropic diffusion in image processing. Stuttgart: Teubner (1998).
13. *Zhang T., Suen C.*: A fast parallel algorithm for thinning digital patterns. *Communications of the ACM*, 27, pp. 236–239 (1984).
14. *Fehrenbach J., Mirebeau J. M.*: Sparse non-negative stencils for anisotropic diffusion. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Т., 49(1), pp. 123–147 (2014).
15. *Staal J., Abràmoff M. D., Niemeijer M., Viergever M. A., Van Ginneken B.*: Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina. *IEEE transactions on medical imaging*. 23(4), pp. 501–509 (2014).
16. *Левашов А. Е., Юрин Д. В.*: Детектирование жирных линий и древовидных структур на изображениях. 23-я международная конференция по компьютерной графике и зрению GraphiCon'2013. Россия, Владивосток, pp. 259–262 (2013).
17. *Ge F., Wang S., Liu T.*: New benchmark for image segmentation evaluation. *Journal of Electronic Imaging*. 16(3) 033011 (2017).

В.И.Дмитриев, Ж.Г.Ингтем
**МЕТОД РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СПЛАЙНОВ (R-СПЛАЙН)
ДЛЯ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ**

Введение

Рассматривается кубический сплайн класса C^1 т.е. Эрмитов сплайн. В обычном понимании кубический сплайн представляется как непрерывная вместе со своими первой и второй производными функция т.е. принадлежит классу C^2 . Нахождение всех коэффициентов классического кубического сплайна задается условием гладкой склейки и краевыми условиями, такой сплайн достигает минимума нормы своей второй производной [1]. Имеются многие работы по модифицированным кубическим сплайнам [1-7]. Обычно для построения эрмитовых сплайнов значения самой функции и производной на сетке считаются известными. Поскольку на практике довольно сложно измерить производную то чаще всего значения производной вычисляются с помощью разных численных методов. В настоящей работе предложено построение кубического сплайна класса C^1 все коэффициенты, которого находятся из условия минимизации нормы первой производной на всем отрезке построения. Таким образом построенный сплайн мы и будем называть регуляризованным сплайном (R-сплайн).

В случае задачи аппроксимации применяется метод регуляризации по Тихонову [9], который позволяет сплайну сохранять устойчивость на всем отрезке независимо от количества заданных значений и шага сетки. Построенный таким образом сплайн не обладает непрерывной второй производной, непрерывность сохраняется лишь для первой производной сплайна.

Интерполяционный регуляризованный сплайн

Строится полиномиальный кубический сплайн на отрезке $[a,b]$ интерполирующий функцию $f(x)$ по N заданным значениям f_n $n \in [1, N]$ на равномерной сетке $\{x_n\}_{n=1}^N$. На отрезке построения сплайн обладает непрерывной первой производной и достигает минимума нормы первой производной в L_2 .

Вводятся вспомогательные функции для построения сплайна при $x \in [x_n, x_{n+1}]$:

$$Q_n(x) = \frac{(x_{n+1} - x)^2}{h^2} \left(1 + 2 \frac{x - x_n}{h} \right) \text{ и } R_n(x) = \frac{(x_n - x)^2}{h^2} \left(1 + 2 \frac{(x_{n+1} - x)}{h} \right),$$

$$\psi_n(x) = \frac{(x_{n+1} - x)^2 (x - x_n)}{h^2} \text{ и } \varphi_n(x) = \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)^2}{h^2}$$

где $h = x_{n+1} - x_n$, $n \in [1, N-1]$.

Введенные функции обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} R_n(x_{n+1}) &= 1, R_n(x_n) = 0, R'_n(x_n) = 0, R'_n(x_{n+1}) = 0, \\ Q_n(x_{n+1}) &= 0, Q_n(x_n) = 1, Q'_n(x_n) = 0, Q'_n(x_{n+1}) = 0, \\ \varphi_n(x_{n+1}) &= 0, \varphi_n(x_n) = 0, \varphi'_n(x_n) = 0, \varphi'_n(x_{n+1}) = 1, \\ \psi_n(x_{n+1}) &= 0, \psi_n(x_n) = 0, \psi'_n(x_n) = 1, \psi'_n(x_{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, сплайн записывается в виде:

$$\begin{aligned} S(x) &= S_n(x), \quad x \in [x_n, x_{n+1}] \\ S_n(x) &= f_n Q_n(x) + f_{n+1} R_n(x) + p_n \psi_n(x) + p_{n+1} \varphi_n(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где p_n , $n \in [1, N]$ значения первой производной на сетке.

$$S_n(x_n) = f_n; S_n(x_{n+1}) = f_{n+1}; S'_n(x_n) = p_n; S'_n(x_{n+1}) = p_{n+1}; \text{ причем } S(x) \in C^1$$

Для полного определения сплайна необходимо найти значения производной на сетке. При построении эрмитового сплайна значения производной считаются известными, и тем самым, сплайн (1) полностью интерполирует функцию по заданным значениям. Однако, в большинстве задач о производной имеется только приблизительное представление. Поэтому предлагается выбрать такой сплайн из класса C^1 , производная которого будет наименьшей. Для этого, значения производной на сетке мы находим из условия:

$$\min_{\mathbf{p}} \int_a^b (S'(x))^2 dx \quad (2)$$

где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ следовательно получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных p_n , $n \in [1, N]$:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \int_a^b (S'(x))^2 dx = \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (S'_n(x))^2 dx = 2 \sum_{n=1}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} S'_n(x) \frac{\partial S'_n(x)}{\partial p_i} dx = 0, \quad i \in [1, N]$$

$$\text{Заметим, что } \frac{\partial S'_n(x)}{\partial p_i} = \begin{cases} \psi'_i(x); & n = i \\ \varphi'_{i-1}(x); & n = i-1 \\ 0; & n \neq i, n \neq i-1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_1} \int_a^b (S'(x))^2 dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} S'_1(x) \psi'_1(x) dx = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p_i} \int_a^b (S'(x))^2 dx = 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} S'_{i-1}(x) \varphi'_{i-1}(x) dx + 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'_i(x) \psi'_i(x) dx = 0, \quad i \in [2, N-1] \\ \frac{\partial}{\partial p_N} \int_a^b (S'(x))^2 dx = 2 \int_{x_N}^{x_N} S'_{N-1}(x) \varphi'_{N-1}(x) dx = 0 \end{cases}$$

Откуда имеем:

$$\begin{cases} 4p_1 - p_2 = \frac{3}{h}(f_2 - f_1) \\ -p_{i-1} + 8p_i - p_{i+1} = \frac{3}{h}(f_{i+1} - f_i), \quad i \in [2, N-1] \\ -p_N + 4p_{N+1} = \frac{3}{h}(f_{N+1} - f_N) \end{cases}$$

Получаем трехдиагональную матрицу с диагональным преобладанием. Следовательно, матрица системы – невырожденная и существует единственное решение $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$. Вычислив $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, можно найти значение сплайна в любой точке $x \in [a, b]$ по формуле (1).

В классическом кубическом сплайне добавляется условие непрерывности второй производной $S''(x)$, что позволяет определить p_n , $n \in [2, N-1]$ через p_1 и p_N . Значения $p_1 = f'(x_1)$ и $p_N = f'(x_N)$ определяются из условия задачи [1-8] или задаются приближенно.

Пример 1

Для оценки эффективности свойств R-сплайна построена интерполяция функции Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке $x \in [-1, 1]$. На рисунке 1а. построена интерполяция для сетки, состоящей из 2-х, 3-х, 4-х и 5-и значений. Понятно, что при интерполяции по 2-м заданным значениям для того чтобы, достигался минимум нормы производной, сплайн будет представлять из себя прямую, что мы и можем наблюдать на рис1 пунктиром. По 3-м точкам мы имеем кривую представленную штрих-точкой. По 4-м значениям R-сплайн описывает кривую представленную штрихом. Данная кривая будет обладать минимальной нормой производной среди всех кубических сплайнов класса C^1 . Поскольку ни одна точка не попала в максимум, то соответственно R-сплайн и не мог учесть всплеск, которым обладает функция Рунге. По 5-и точкам R-сплайн уже четко начинает описывать поведение функции Рунге. Очевидно, что шаг сетки слишком велик, чтобы можно было что-то сказать об интерполируемой функции.

Надо заметить, что в случае 5-и заданных значений, по сравнению с классическим кубическим сплайном, R-сплайн описывает интерполируемую функцию лучше рисунок 1б.

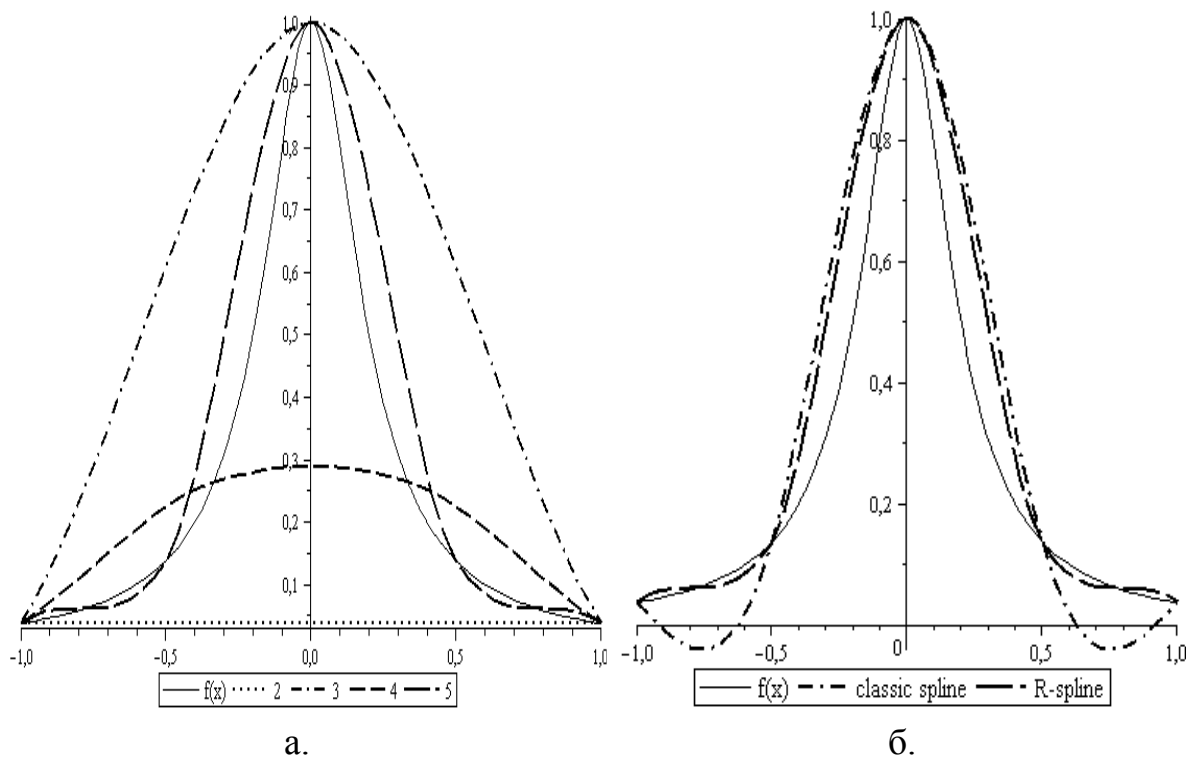


Рисунок 1. интерполяция R-сплайном по 2-м, 3-м, 4-м и 5-и значениям
 Когда интерполяция функции Рунге строится на отрезке $x \in [-1, 1]$ более чем по 5-и точкам, например для 7 заданных значений можно наблюдать достаточно близкое приближение, а начиная с 9 значений мы можем наблюдать почти полное совпадение с функцией Рунге. Причем нет накопления колебаний на концах отрезка.

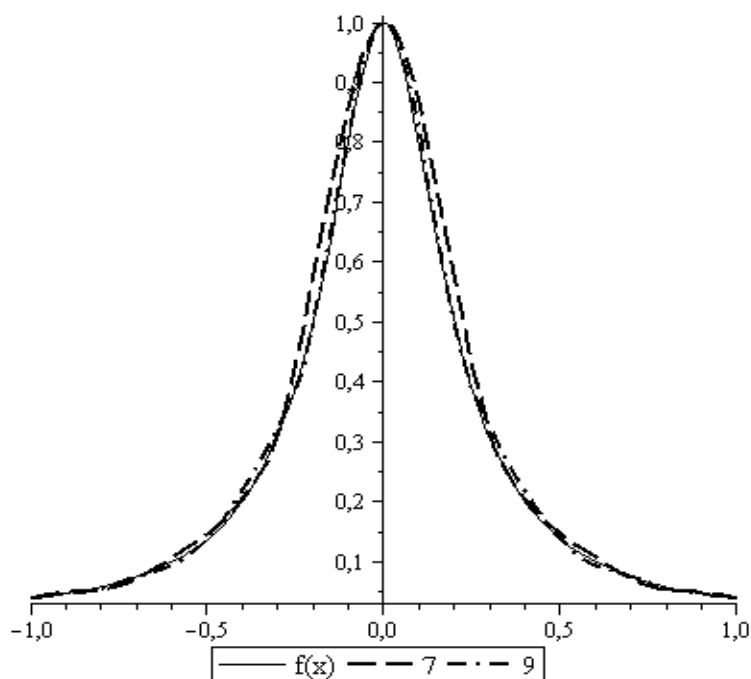


Рисунок 2. интерполяция R-сплайном по 7-и и 9-и заданным значениям.

На рисунке 3 представлен модуль разности R-сплайна и функции Рунге – сплошной линией и модуль разности классического кубического сплайна (класса C^2) и функции Рунге – пунктиром. Интерполяция строится по 9-и заданным значениям.

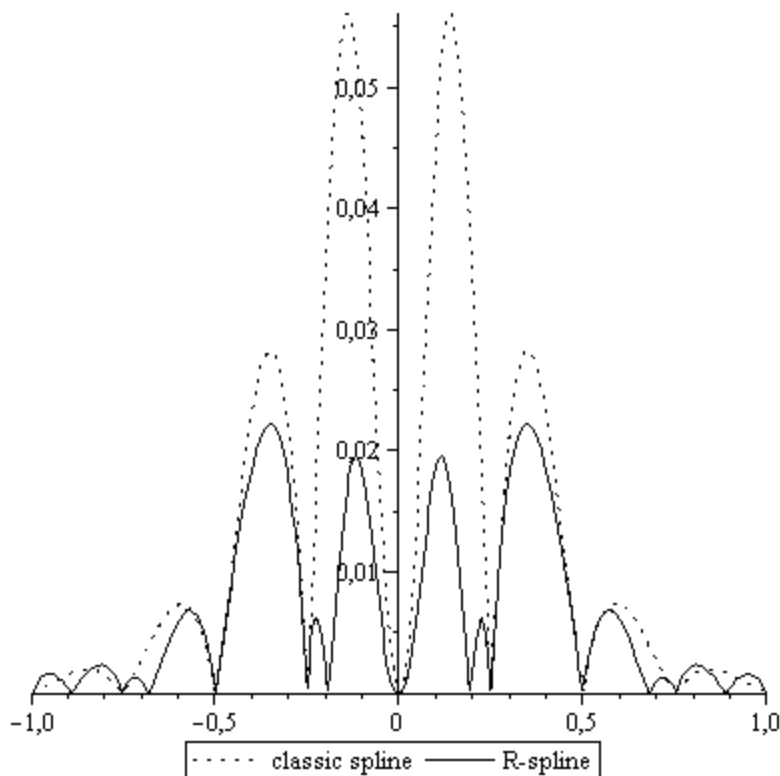


Рисунок 3. модуль разности сплайна и функции Рунге

Надо заметить что преимущество R-сплайна над классическим сплайном зависит от класса решаемых задач. Свойство минимальной нормы производной особенно выгодно, когда мы имеем дело с функциями обладающими резкими всплесками или быстро растущими (меняющимися) значениями производных.

Аппроксимационный регуляризованный сплайн

Практические задачи в основном связаны с эмпирическими данными. Эти данные получены в ходе эксперимента или измерены в естественных условиях и т.д. В таких данных заведомо заложена ошибка измерительного прибора, воздействия среды, природных явлений... не имеющих отношения к эксперименту. В этой связи разработаны разные алгоритмы сглаживания данных [8,10,11]. При аппроксимации данных необходимо получить гладкую кривую из определенного класса решений, обусловленного установленной математической моделью. Учитывая, что R-сплайн достигает минимума нормы своей первой производной, построим алгоритм для аппроксимации данных, который позволяет

получить решение из класса кубических сплайнов из C^1 , при этом с минимальной нормой первой производной.

Рассмотрим задачу аппроксимации функции $f(x)$, известную на сетке $\{x_k^*\}_{k=1}^K$ с некоторой погрешностью δ^* регуляризованным сплайном. В этом случае кроме значений производной p_n , на сетке построения сплайна $\{x_n\}_{n=1}^N$ неизвестными еще являются и значения самой функции: f_n . Будем для простоты считать, что $K=N$ и соответственно, что сетки $\{x_k^*\}_{k=1}^K$ и $\{x_n\}_{n=1}^N$ совпадают. Итак, для нахождения всех неизвестных необходимо выполнить условие (2) с учетом неизвестных f_n , $n \in [1, N]$ т.е.

$$\min_{\bar{p}, \bar{f}} \|S'(x)\|_{L_2}^2, \quad \bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N), \quad \bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N) \quad (3)$$

При дополнительном условии

$$\|\overline{S(x^*)} - \overline{f(x^*)}\|_{R^N}^2 \leq \delta^2 \quad (4)$$

где $\overline{S(x^*)} = (S(x_1^*), S(x_2^*), \dots, S(x_N^*))$ и $\overline{f(x^*)} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N)$ - значения известные с ошибкой δ^* , а δ - известная среднеквадратическая ошибка функции $f(x)$.

Согласно теории регуляризации А.Н. Тихонова, задача (3)-(4) сводится к задаче на безусловный минимум [9].

$$\min_{\bar{p}, \bar{f}} \left\{ \|\overline{S(x^*)} - \overline{f(x^*)}\|_{R^N}^2 + \alpha \|S'(x)\|_{L_2}^2 \right\}, \quad (5)$$

α - параметр регуляризации находится методом невязки [9].
Задача (5) сводится к задаче:

$$\min_{\bar{p}, \bar{f}} \sum_{i=1}^N (S(x_i) - \tilde{f}_i)^2 + \alpha \int_a^b (S'(x))^2 dx$$

Таким образом, мы получаем систему из $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными:

$$\text{т.е.} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_{i=1}^N (S(x_i) - \tilde{f}_i)^2 + \alpha \int_a^b (S'(x))^2 dx = 0; & k = 1, 2, \dots, N \\ \frac{\partial}{\partial f_k} \sum_{i=1}^N (S(x_i) - \tilde{f}_i)^2 + \alpha \int_a^b (S'(x))^2 dx = 0; & k = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

Решение задачи (5) позволяет единственным образом определить регуляризованный сплайн по найденным параметрам $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ и $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$.

Пример 2

Ниже приведен пример аппроксимации функции Рунге заданной таблично с погрешностью на отрезке $x \in [-1,1]$.

На рисунке 4 построен пример по 26 значениям с относительной погрешностью в 10%. Можно заметить, что несмотря на большую внесенную ошибку, R-сплайн сглаживает полученные данные и эффективно приближает функцию Рунге.

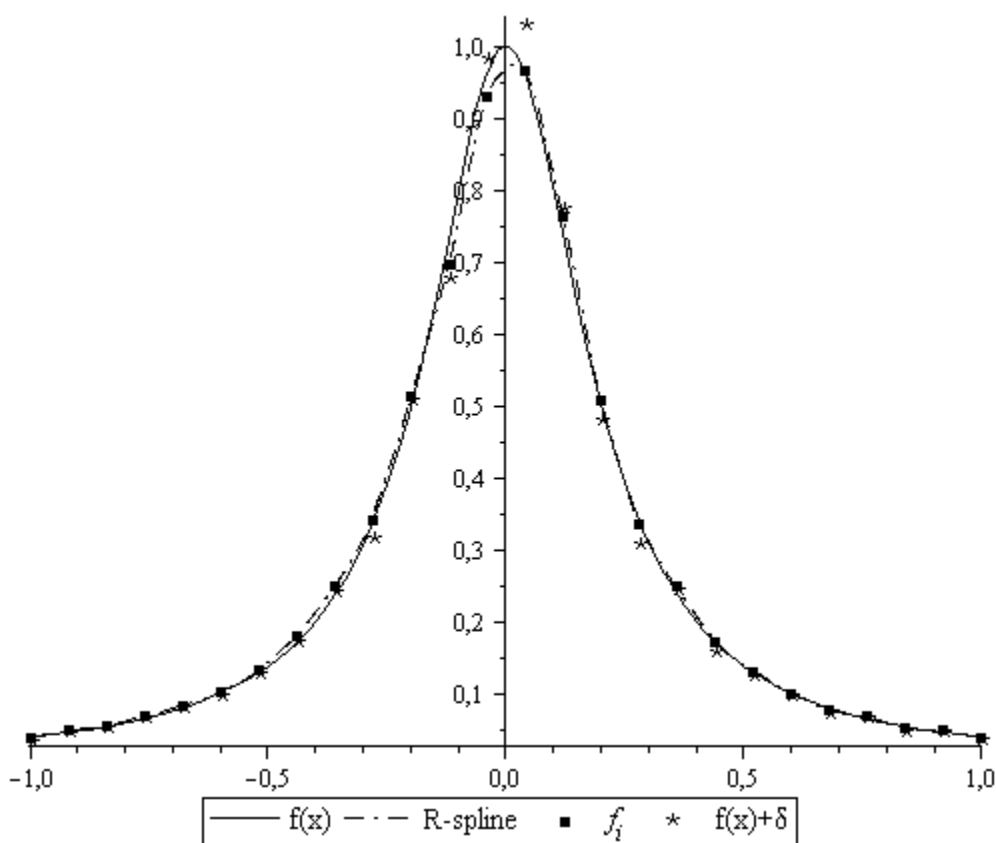


Рисунок 4. Аппроксимация по 26 данным.

На рисунке 5 показано приближение R-сплайном функции $f(x) = \frac{1}{1 + 25 \left(\sin \left(\frac{3}{2} \pi x \right) \right)^2}$ на отрезке $x \in [-1,1]$. Данная функция имеет

несколько пиков на указанном отрезке. Можно заметить, что R-сплайн не имеет колебаний между всплесками, что часто встречается при аппроксимации. Функция $f(x) = \frac{1}{1 + 25 \left(\sin \left(\frac{3}{2} \pi x \right) \right)^2}$ задана с

относительной ошибкой 10% на сетке из 37 значений. Получено устойчивое приближение аппроксимируемой функции, несмотря на

довольно крупный шаг. Заложенное условие минимальной нормы первой производной не позволяет R-сплайну колебаться.

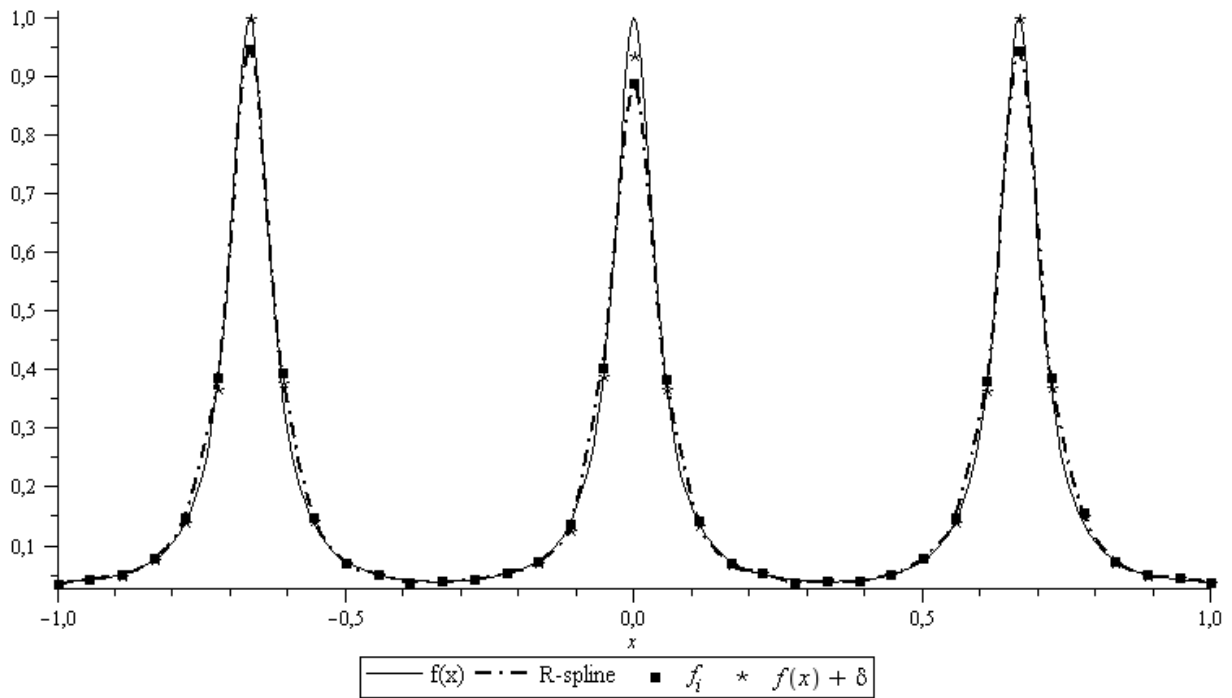


Рисунок 5. Аппроксимация функции $f(x) = \frac{1}{1 + 25 \left(\sin \left(\frac{3}{2} \pi x \right) \right)^2}$.

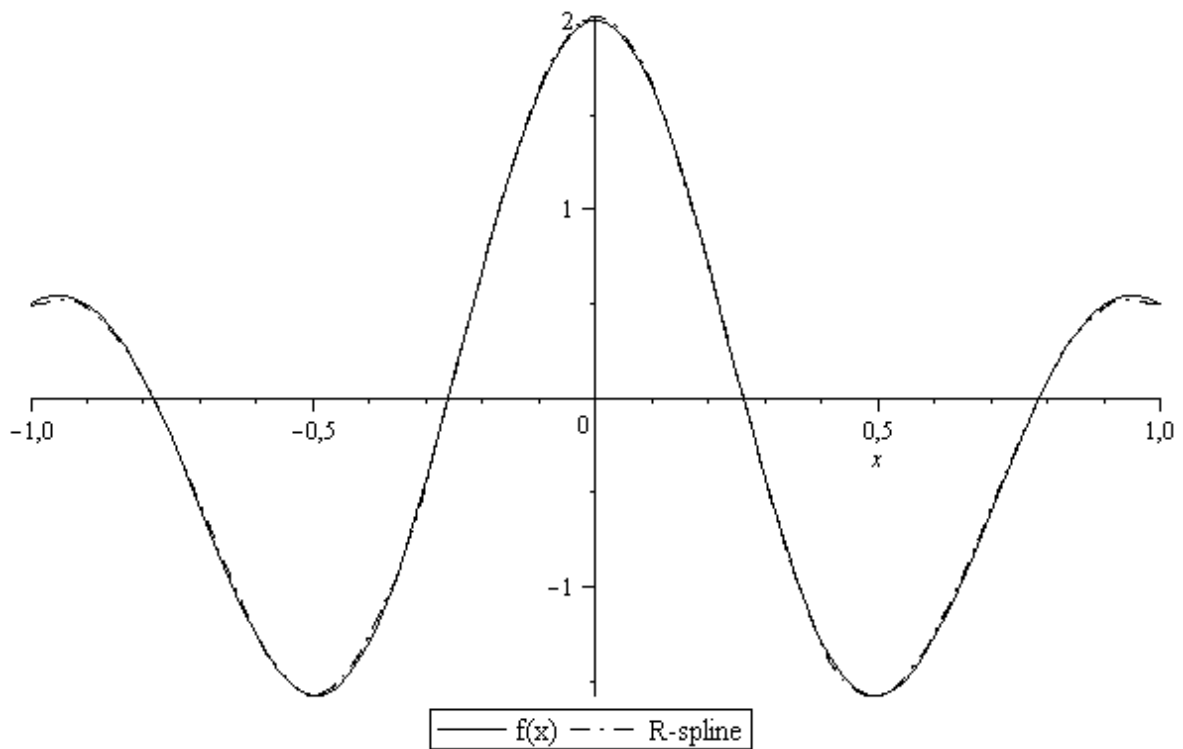


Рисунок 6. Аппроксимация функции $f(x) = \cos \left(\frac{3}{2} \pi x \right) + \cos \left(\frac{7}{3} \pi x \right)$.

На рисунке 6 показана аппроксимация R-сплайном плавно меняющейся функции $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + \cos\left(\frac{7}{3}\pi x\right)$ на отрезке $x \in [-1, 1]$, заданной с погрешностью в 3% на сетке из 25 значений. Несмотря на крупный шаг сетки, на картинке сложно отличить R-сплайн от искомой функции.

Предложенный метод сглаживания с использованием R-сплайна позволяет эффективно строить приближение функции по заданным с ошибкой табличным значениям.

Литература

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М: Наука, 1976.
3. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967.
4. De Boor C. A. practical guide to splines. New York: Springer, 1978.
5. Dmitriev V.I., Dmitrieva I.V., Ingtem J.G. Integral Spline function Computational Mathematics and Modeling .
6. Волков Ю.С. Общая задача полиномиальной сплайн-интерполяции, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN г.2016, №22 стр. 114-125 (doi 10.21538/0134-4889-2016-22-4-114-125)
7. Волков Ю.С., Субботин Ю.Н. 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции. Труды Института математики и механики УрО РАН. г. 2014, №20. стр. 52-67.
8. Ingtem J. Minimal-norm-derivative spline function in interpolation and approximation // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2008. — Vol. 32, no. 4. — P. 201–213.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979.
10. Силаев Д. А. “Полулокальные сглаживающие сплайны”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 29, Изд-во Моск. ун-та, М., 2013, 443–454; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 197
11. Maria C. Mariani, Kanadpriya Basu, Spline interpolation techniques applied to the study of geophysical data, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Volume 428, 2015, pp 68-79,

Раздел II. Математическое моделирование

Ян Цзяньсюнь

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ДИСПЕРСИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Введение

Метод исследования поверхностных волн является новым методом геофизического зондирования. У этого метода имеются характеристики большой энергии и большого значения отношения «сигнал/шум». В последние годы он широко использовался в геофизических зондированиях на небольших глубинах (Над поверхностью Мохо, глубина около 30-40 км.), глубоких сейсмологических исследованиях и многих других научных областях.

Для исследования прямой задачи сейсмических поверхностных волн большинство работ фокусируются на вычислении дисперсии поверхностной волны Релея. Классический метод для кусочно-постоянной плоскослоистой среды является метод матрицы перехода ‘Thomson Haskell’ [3]. Фактически в процессе численного расчета возникает проблема потери высокочастотной точности. Для преодоления этой проблемы был разработан ряд новых методов [4-11]. Чжэн Сяофэй (Chen X.F.) предлагает новый метод обобщенного коэффициента отражения-передачи (МОК-О/П) (The generalized reflection-transmission coefficient method (GR/TC)) для вычисления дисперсии плоской волны [12-15]. Этот метод должен определить правильный корень в процессе решения уравнения дисперсии, то есть процесс «поиска корней». По мере увеличения количества слоев процесс «поиска корня» становится более сложным.

В литературе [1] автор установил новое дисперсионное уравнение, введя тензор сейсмического импеданса. Получены система дифференциальных уравнений для решения дисперсионного уравнения. Решая эту систему с помощью метода Рунге – Кутты четвертого порядка, получена дисперсионная кривая волны Рэлея фундаментального порядка. Однако выборка размера шага влияет на скорость вычислений и точность

этого метода при решении системы дифференциальных уравнений (если размер шага велик, то точность теряется. Если размер шага мал, то скорость вычисления медленная). В этой статье, основанной на введении тензора сейсмического импеданса, мы выводим новое итеративное соотношение тензора сейсмического импеданса, чтобы компенсировать этот дефект.

Метод тензора сейсмического импеданса

Пусть дана слоистая среда с границей $z = z_n, n \in [0, N]$, где $z_0 = 0$ уровень земной поверхности. Внутри каждого слоя $z \in [z_{n-1}, z_n], n \in [1, N]$. Сейсмические параметры λ_n, μ_n, ρ_n положим постоянными. В этой слоистой среде распространяется бегущая волна вдоль оси OX . Вектор смещения в бегущей волне задается в виде:

$$\vec{U}(x, y, z) = \bar{u}(z)e^{i\gamma x + i\omega t} \quad (1)$$

где ω – частота сейсмического поля, а γ – постоянная (характеристика) распространения бегущей волны, $\bar{u}(z)$ представляет амплитуду бегущей волны. Внутри слоя $\bar{u}(z)$ удовлетворяет уравнению Ламе с постоянными коэффициентами:

$$(\lambda_n + 2\mu_n)\text{grad div}\vec{U} - \mu_n \text{rot rot}\vec{U} + \omega^2 \rho_n \vec{U} = 0, z \in [z_{n-1}, z_n] \quad (2)$$

На границе раздела слоев выполняются условия непрерывности смещения $\bar{U}(z)$ и напряженности $\{\sigma_{ij}\}, i, j \in [x, y, z]$, где:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div}\bar{U}(z) + \mu \left(\frac{\partial \bar{U}(z)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}(z)}{\partial x_i} \right), \{x_i\} = \{x, y, z\}, i \in [1, 3] \quad (3)$$

Тензор сейсмического импеданса поверхностной волны вводится как величина, связывающая напряженности σ_{xz}, σ_{zz} со смещениями u_x, u_z в виде линейных соотношений:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = Z_{xx} u_x + Z_{xz} u_z \\ \sigma_{zz} = Z_{zx} u_x + Z_{zz} u_z \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\hat{Z} = \begin{vmatrix} Z_{xx} & Z_{xz} \\ Z_{zx} & Z_{zz} \end{vmatrix} \quad (5)$$

\hat{Z} – тензор сейсмического импеданса второго ранга. Отметим, что тензор импеданса непрерывен на разрывах λ , μ и ρ , так как непрерывны напряжения и смещения.

Если мы определяем тензор импеданса при $z=0$, т.е. $\hat{Z}(z=0) = \hat{Z}^0$, то, согласно граничным условиям напряженности при $z=0$ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(z=0) &= Z_{xx}^0 u_x(z=0) + Z_{xz}^0 u_z(z=0) = 0 \\ \sigma_{zz}(z=0) &= Z_{zx}^0 u_x(z=0) + Z_{zz}^0 u_z(z=0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Для существования бегущей поверхностной волны, т.е. существования $u_x(0)$ и $u_z(0)$ отличных от нуля, должно выполняться условие:

$$\det \hat{Z}^0 = Z_{xx}^0 Z_{zz}^0 - Z_{xz}^0 Z_{zx}^0 = 0 \quad (7)$$

Это дисперсионное уравнение для определение постоянной распространения бегущей волны γ в зависимости от частоты ω и параметров слоистой среды.

Уравнение (7) называется прямой задачей для расчета кривой дисперсии поверхностных волн. Импеданс $\hat{Z}^0(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\rho}, \bar{h}, \omega, \gamma)$ получен из системы уравнения в виде :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dZ_{xx}}{dz} &= i\lambda\mu\gamma(Z_{xz} - Z_{zx}) - (\lambda + 2\mu)Z_{xx}^2 - \mu Z_{xz} Z_{zx} + \\ &\quad + 4\mu^2\gamma^2(\lambda + \mu) - \omega^2\rho\mu(\lambda + 2\mu) \\ \frac{dZ_{xz}}{dz} &= -((\lambda + 2\mu)i\mu\gamma Z_{xx} - i\mu\lambda\gamma Z_{zz} - (\lambda + 2\mu)Z_{xx}Z_{xz} - \mu Z_{xz}Z_{zz}) \\ \frac{dZ_{zx}}{dz} &= -((\lambda + 2\mu)i\mu\gamma Z_{xx} - i\gamma\mu\lambda Z_{zz} + (\lambda + 2\mu)Z_{zx}Z_{xx} + \mu Z_{zx}Z_{zz}) \\ \frac{dZ_{zz}}{dz} &= -((\lambda + 2\mu)i\mu\gamma Z_{xz} - (\lambda + 2\mu)i\mu\gamma Z_{zx} + \\ &\quad + (\lambda + 2\mu)Z_{xz}Z_{zx} + \mu Z_{zz}^2 + \omega^2\rho\mu(\lambda + 2\mu)) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Для решения системы необходимо задать начальное значение тензора импеданса при $z = z_N = H$ (поверхность полупространства). Зная $Z(z = H) = \hat{Z}^H$ легко численно решается задача Коши для $\hat{Z}(z)$, т.е.:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{xx}^{(H)} = -\frac{\mu^{(H)}\eta_2^{(H)}(\eta_1^{2(H)} - \gamma^2)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} \\ Z_{xz}^{(H)} = -\frac{i\mu^{(H)}\gamma(\eta_1^{2(H)} - 2\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} + \gamma^2)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} \\ Z_{zx}^{(H)} = (\lambda^{(H)} + 2\mu^{(H)})\frac{i\gamma(\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \eta_2^{2(H)})}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} + i\gamma\lambda^{(H)} \\ Z_{zz}^{(H)} = (\lambda^{(H)} + 2\mu^{(H)})\frac{\eta_1^{(H)}(\eta_2^{2(H)} - \gamma^2)}{\eta_1^{(H)}\eta_2^{(H)} - \gamma^2} \end{array} \right. \quad (9)$$

Эксперименты показывают, что в процессе численного решения дифференциальных уравнений выбор размера шага напрямую влияет на скорость вычисления и точность прямого алгоритма. Таким образом, мы вводим потенциальную функцию для получения нового итерационного отношения тензора сейсмического импеданса в слоистой среде.

Итерационные отношения, полученные из тензора сейсмического импеданса для изотропных слоистых сред

Введем функции $u_s(z)$ и $u_p(z)$ соответственно соленоидальные и потенциальные части поля смещения. Тогда в поверхностной бегущей волне Рэлея согласно (1) имеем

$$\begin{aligned} u_x &= -u'_s(z) + i\gamma u_p(z) \\ u_z &= i\gamma u_s(z) + u'_p(z) \end{aligned} \quad (10)$$

При этом $u_s(z)$ и $u_p(z)$ являются решениями уравнений:

1. $u_s'' - \eta_s^2 u_s = 0$, где $\eta_s = \sqrt{\gamma^2 - k_s^2}$, $k_s = \frac{\omega}{v_s}$, $\text{Re}\eta_s > 0$, $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорость поперечной волны.

2. $u_p'' - \eta_p^2 u_p = 0$, где $\eta_p = \sqrt{\gamma^2 - k_p^2}$, $k_p = \frac{\omega}{v_p}$, $\text{Re}\eta_p > 0$, $v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ – скорость продольной волны. $\gamma > k_s > k_p$.

Рассмотрим поле в слое $z \in [z_{n-1}, z_n]$ с постоянными λ_n, μ_n, ρ_n , где $n \in [1, N]$, $z_0 = 0$, $z_N = -\infty$, $h = z_n - z_{n-1}$ – толщина слоя. В n -м слое

$u_s(z)$ и $u_p(z)$ можно представить в виде:

$$u_s(z) = A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}(z-z_n)} + B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}(z-z_n)} \quad (11)$$

$$u_p(z) = A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}(z-z_n)} + B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}(z-z_n)}$$

Тогда в этом слое имеем компоненты поля смещения

$$u_x(z) = i\gamma \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}(z-z_n)} + B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}(z-z_n)} \right) - \eta_s^{(n)} \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}(z-z_n)} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}(z-z_n)} \right) \quad (12)$$

$$u_z(z) = i\gamma \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}(z-z_n)} + B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}(z-z_n)} \right) + \eta_p^{(n)} \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}(z-z_n)} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}(z-z_n)} \right) \quad (13)$$

Тензор напряжения (3) согласно соотношениям (4) для n -го слоя на двух компонентах имеет вид:

$$\sigma_{xz} = \mu(i\gamma u_z(z) + u'_x(z)) = Z_{xx} u_x + Z_{xz} u_z \quad (14)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)u'_z(z) + \lambda i\gamma u_x(z) = Z_{zx} u_x + Z_{zz} u_z \quad (15)$$

Тогда подставив (12), (13) в левой части (14)-(15) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \mu \left(- \left(\gamma^2 - \eta_s^{(n)2} \right) \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}(z-z_n)} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}(z-z_n)} \right) + \right. \\ \left. + 2i\gamma \eta_p^{(n)} \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}(z-z_n)} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}(z-z_n)} \right) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = 2i\gamma\mu\eta_s^{(n)} \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}(z-z_n)} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}(z-z_n)} \right) + \\ + \left((\lambda + 2\mu)\eta_p^{(n)2} - \lambda\gamma^2 \right) \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}(z-z_n)} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}(z-z_n)} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Части $\left((\lambda + 2\mu)\eta_p^{(n)2} - \lambda\gamma^2 \right)$ в уравнении (17) имеет следующее отношение:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\eta_p^2 - \lambda\gamma^2 \\ &= (\lambda + 2\mu)(\gamma^2 - k_p^2) - \lambda\gamma^2 \\ &= 2\mu\gamma^2 - \rho\omega^2 \\ &= \mu(\gamma^2 + \eta_s^2) \end{aligned}$$

Тогда напряжение (17) можно переписать:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} = & 2i\gamma\mu\eta_s \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}(z-z_n)} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}(z-z_n)} \right) + \\ & + \mu \left(\gamma^2 + \eta_s^2 \right) \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}(z-z_n)} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}(z-z_n)} \right)\end{aligned}\quad (18)$$

Тогда для n -го слоя при $z = z_n$ (на нижней границе) смещение и напряжение можно представить в виде:

$$\begin{aligned}u_x(z_n) &= i\gamma \left(A_p^{(n)} + B_p^{(n)} \right) - \eta_s \left(A_s^{(n)} - B_s^{(n)} \right) \\ u_z(z_n) &= i\gamma \left(A_s^{(n)} + B_s^{(n)} \right) + \eta_p \left(A_p^{(n)} - B_p^{(n)} \right)\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(z_n) &= \mu \left(- \left(\gamma^2 - \eta_s^2 \right) \left(A_s^{(n)} - B_s^{(n)} \right) + 2i\gamma\eta_p \left(A_p^{(n)} - B_p^{(n)} \right) \right) \\ \sigma_{zz}(z_n) &= 2i\gamma\mu\eta_s \left(A_s^{(n)} - B_s^{(n)} \right) + \mu \left(\gamma^2 + \eta_s^2 \right) \left(A_p^{(n)} - B_p^{(n)} \right)\end{aligned}\quad (20)$$

При $z = z_{n-1}$ (на верхней границе) имеют:

$$\begin{aligned}u_x(z_{n-1}) &= i\gamma \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}h} + B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}h} \right) - \eta_s \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}h} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}h} \right) \\ u_z(z_{n-1}) &= i\gamma \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}h} + B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}h} \right) + \eta_p \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}h} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}h} \right)\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}(z_{n-1}) &= \mu \left(- \left(\gamma^2 - \eta_s^2 \right) \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}h} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}h} \right) + 2i\gamma\eta_p \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}h} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}h} \right) \right) \\ \sigma_{zz}(z_{n-1}) &= 2i\gamma\mu\eta_s \left(A_s^{(n)} e^{\eta_s^{(n)}h} - B_s^{(n)} e^{-\eta_s^{(n)}h} \right) + \mu \left(\gamma^2 + \eta_s^2 \right) \left(A_p^{(n)} e^{\eta_p^{(n)}h} - B_p^{(n)} e^{-\eta_p^{(n)}h} \right)\end{aligned}\quad (22)$$

Тогда зная тензор сейсмического импеданса $\hat{Z}(z_n)$, вместо (20) и (21) получим систему уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \left(- \left(\gamma^2 - \eta_s^2 \right) \binom{(n)}{A_s} - \binom{(n)}{B_s} + 2i\gamma\eta_p \binom{(n)}{A_p} - \binom{(n)}{B_p} \right) - Z_{xx}u_x(z_n) + Z_{xz}u_z(z_n) = 0 \\ 2i\gamma\mu\eta_s \binom{(n)}{A_s} - \binom{(n)}{B_s} + \mu \left(\gamma^2 + \eta_s^2 \right) \binom{(n)}{A_p} - \binom{(n)}{B_p} - Z_{zx}u_x(z_n) + Z_{zz}u_z(z_n) = 0 \\ u_x(z_{n-1}) - i\gamma \left(\binom{(n)}{A_p} e^{\eta_p h} + \binom{(n)}{B_p} e^{-\eta_p h} \right) - \eta_s \left(\binom{(n)}{A_s} e^{\eta_s h} - \binom{(n)}{B_s} e^{-\eta_s h} \right) = 0 \\ u_z(z_{n-1}) - i\gamma \left(\binom{(n)}{A_s} e^{\eta_s h} + \binom{(n)}{B_s} e^{-\eta_s h} \right) + \eta_p \left(\binom{(n)}{A_p} e^{\eta_p h} - \binom{(n)}{B_p} e^{-\eta_p h} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

Решая эту систему уравнения, параметры $\binom{(n)}{A_s}, \binom{(n)}{B_s}, \binom{(n)}{A_p}, \binom{(n)}{B_p}$ можно представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{(n)}{A_s} = K_1 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_x(z_{n-1}) + K_2 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_z(z_{n-1}) \\ \binom{(n)}{B_s} = K_3 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_x(z_{n-1}) + K_4 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_z(z_{n-1}) \\ \binom{(n)}{A_p} = K_5 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_x(z_{n-1}) + K_6 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_z(z_{n-1}) \\ \binom{(n)}{B_p} = K_7 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_x(z_{n-1}) + K_8 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_z(z_{n-1}) \end{array} \right. \quad (24)$$

Подставив (24) в (22), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz}(z_{n-1}) = Q_1 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_x(z_{n-1}) + Q_2 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_z(z_{n-1}) \\ \sigma_{zz}(z_{n-1}) = Q_3 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_x(z_{n-1}) + Q_4 \left(\hat{Z}(z_n) \right) u_z(z_{n-1}) \end{array} \right. \quad (25)$$

где $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ – параметры, зависящие от тензора $\hat{Z}(z_n)$ и постоянных $\lambda_n, \mu_n, \rho_n, h_n$.

Таким образом, мы определили итерационные отношения тензора сейсмического импеданса для n -го слоя

$$\hat{Z}(z_{n-1}) = \begin{vmatrix} Q_1 \left(\hat{Z}(z_n) \right) & Q_2 \left(\hat{Z}(z_n) \right) \\ Q_3 \left(\hat{Z}(z_n) \right) & Q_4 \left(\hat{Z}(z_n) \right) \end{vmatrix} \quad (26)$$

Заметим, что полученное итеративное соотношение принципиально отбрасывает дифференциальные уравнения (8) в литературе [1]. Задавая модель слоистой среды и используя значение \hat{Z}_H для (9) при $z = H$

легко решить систему уравнений и найти итеративное соотношение \hat{Z}_0 .

Экспериментальные результаты

Теперь задаем простую экспериментальную модель для слоистой среды (таблица.1). Вместо постоянных ρ , V_p , V_s легко численно вычислить коэффициенты Ламе λ , μ для каждого слоя. Подставив все постоянные в (7), (23)- (26), получим все характеристики γ и фазовые скорости c зависящие от соответствующего периода (рис. 1). Для обработки сейсмических данных принято изучать бегущую волну фундаментального порядка с частотой менее 1 Герца. Поэтому в численных экспериментах для нахождения дисперсионной кривой бегущей волны фундаментальной моды берем интервал частоты 10-200 секунд.

Таблица 1. Коэффициенты среды в модели 1

слои	Глубины(Км)	ρ /(g.cm ³)	V_p /(Км/сек.)	V_s / (Км/сек.)
1	10	2.4	3.5	2.1
2	20	2.5	4	2.7
3	∞	3	6	4

V_p – скорость продольной волны, V_s – скорость поперечной волны.

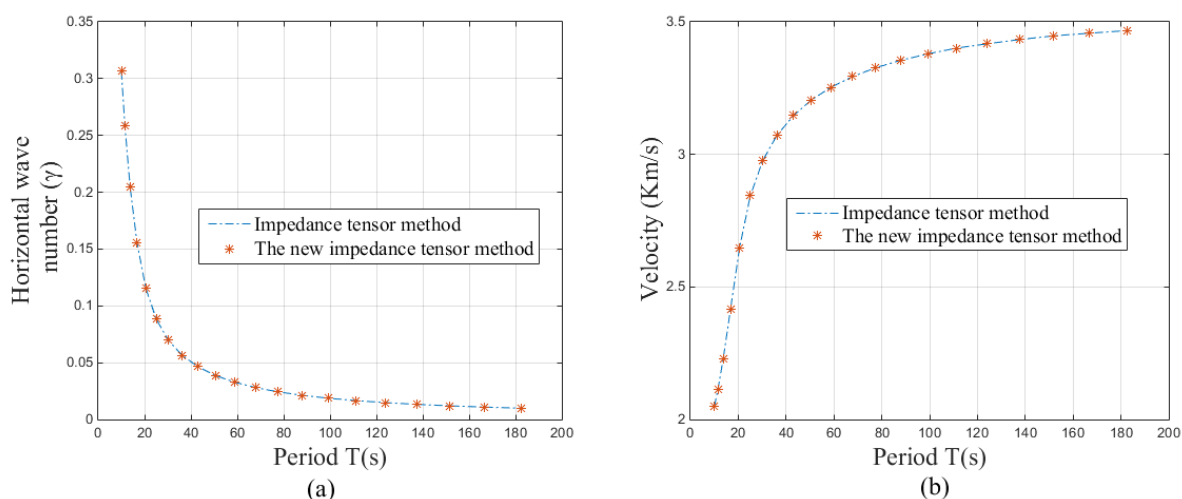


Рисунок 1. а). Сравнение характеристики бегущих волн γ с методами нового итерационного отношения тензора сейсмического импеданса и старого тензора импеданса. б). Сравнение фазовых скоростей с методами нового итерационного отношения тензора сейсмического импеданса и старого тензора импеданса.

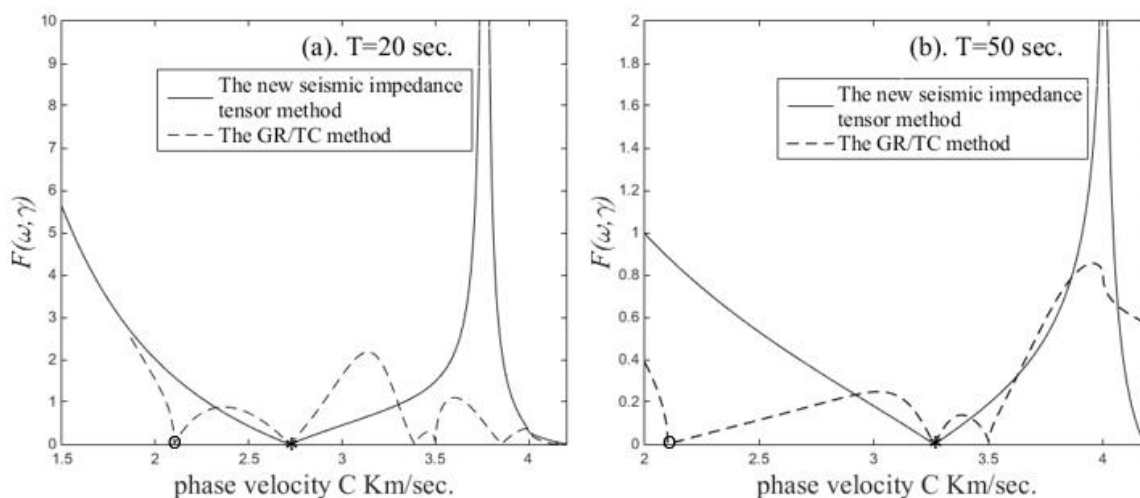
Можно заметить, что с помощью нового итерационного отношения тензора сейсмического импеданса полученные результаты хорошо совпадают со старым методом тензора импеданса, погрешности сравнимы

1% (рис. 1). Таким образом, новое итерационное отношение тензора сейсмического импеданса позволяет изучать дисперсию бегущей волны, однозначно выделяя бегущую волну фундаментальной моды, это доказывает эффективность описанного метода.

Анализ многомоды поверхностной волны Рэлея

Определив новый процесс решения дисперсионного уравнения и задавая модель слоистой среды (таб.1), мы провели детальный анализ и сравнение полученных корней с методом МОК-О/П (рис.). Мы обнаружили следующие проблемы:

1. При использовании метода МОК-О/П для вычисления корня дисперсионного уравнения в случае низкой частоты появляются корни которые по значению меньше чем корень, представляющий фазовую скорость поверхностной волны фундаментальной моды. Эти корни не имеют практического физического смысла. (рис. 2 (a, b, c, d)) Первый корень, полученный методом импеданса, всегда является корнем, представляющий фазовую скорость поверхностной волны фундаментальной моды.
2. За исключением случаев, описанных в пункте 1, некоторые корни, полученные методом МОК-О/П, не определяются методом тензора сейсмического импеданса.



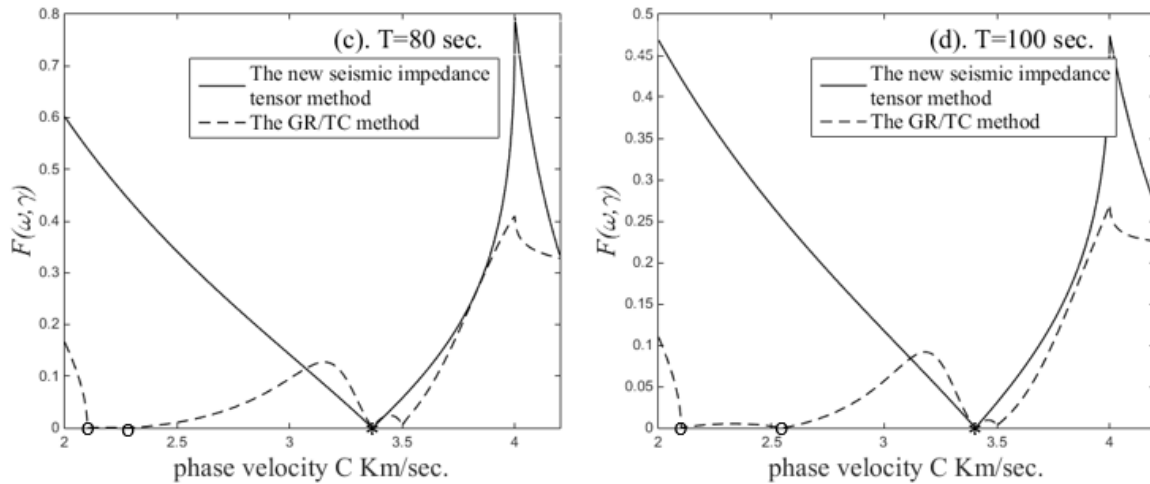
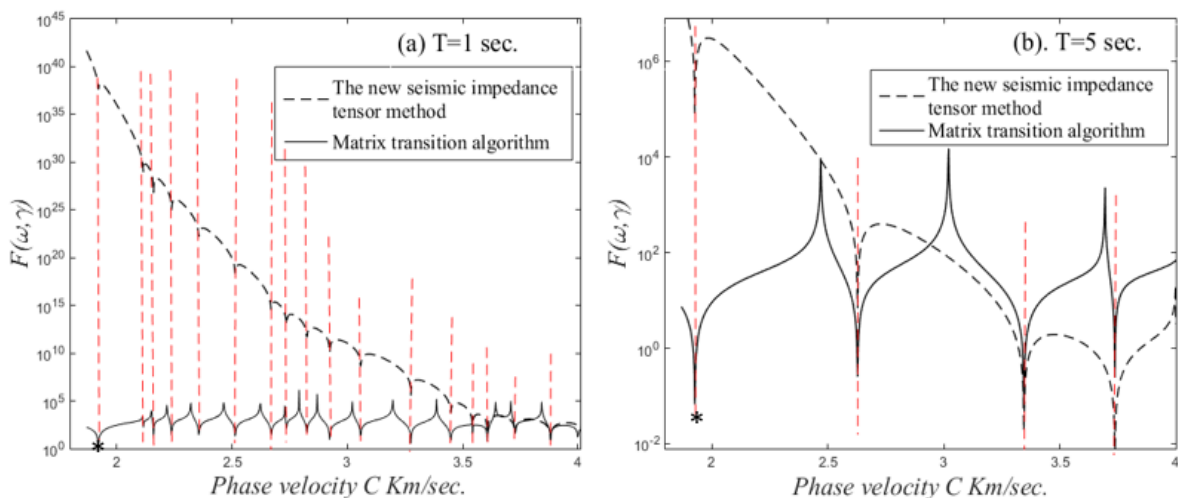


Рисунок 2. различные низкочастотные значения ($T = 20, T = 50, T = 80, T = 100$), * - корень, представляющий фазовой скорости поверхностной волны фундаментального моды, а 'o' – корень которые ниже фазовой скорости поверхностной волны фундаментального моды.

Чтобы проверить точность корней двух методов, мы сравнили экспериментальные результаты между классическим методом матричного перехода 'Thomson Haskell' и нашем новым методом сейсмического импеданса при заданной модели слоистой среды (таб.1). Экспериментальные результаты показывают, что корни, полученные методом импеданса, совпадают с классическим методом матричного перехода (рис.3). Это также показывает, что некоторые корни, полученных из дисперсионного уравнения в методе МОК-О/П, не могут быть точно определены.



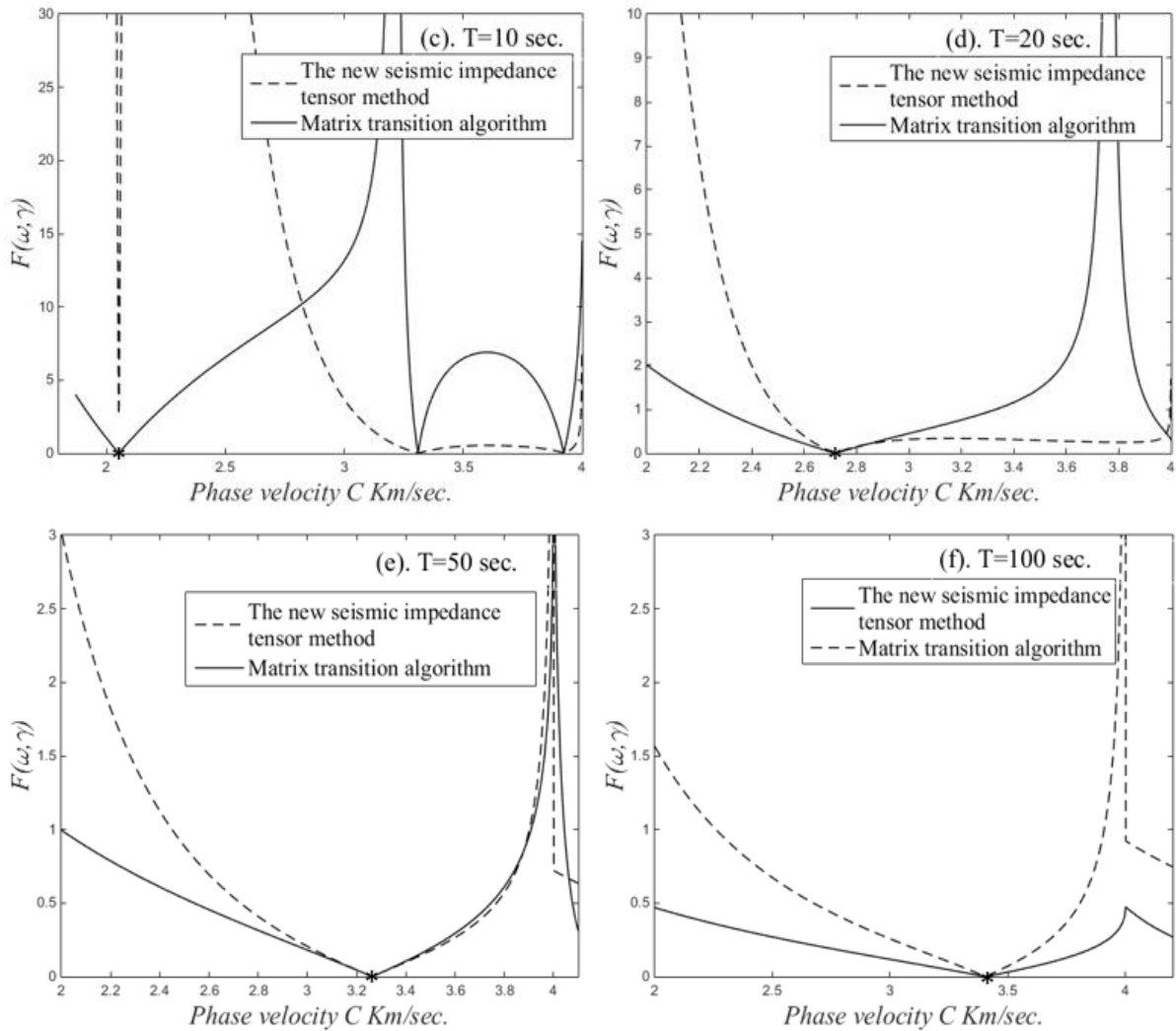


Рисунок 3. (a, b, c, d, e, f) приведены различные значения частоты ($T = 1, 5, 10, 20, 50, 100$ сек.), а "*" является корнем, представляющим фазовой скорости поверхностной волны фундаментального моды.

Заключение

Таким образом, мы можем получить следующие выводы:

1. Несмотря на то, что метод МОК-О/П решает проблему потери точности классического алгоритма матричного перехода 'Thomson Naskell', среди корней, полученных из дисперсионного уравнения будут иметься «ошибочные (неточные) корни», которые не имеют практического значения. Эта ситуация влияет на скорость и точность расчета. При вычислении дисперсионной кривой каждой моды поверхностной волны, нам нужно определить, какие корни обладают реальным физическим смыслом, то есть необходим процесс «поиска корня». По мере увеличения количества слоев в модели слоистой среды

этот процесс становится более сложным и отнимает много времени. Метод тензора сейсмического импеданса не должен выполнять этот процесс. Каждый корень полученный из дисперсионного уравнения имеет свой истинный физический смысл, а первый корень всегда является значением фазовой скорости поверхностной волны фундаментальной моды.

2. Метод тензора сейсмического импеданса также решает проблему высокоточных потерь точности, который наблюдается в классическом методе матричного перехода, а также находит корень который представляет скорость каждой моды поверхностной волны при расчете высокочастотной области.

Список литературы

1. *Yang Jianxun*, Calculation of the Characteristics of Traveling Waves in Layered Media, Computational Mathematics and Modeling, July 2018, Volume 29, Issue 3, pp 287–298.
2. *В.И. Дмитриев, Г.В. Аккуратов*, Математическое моделирование сейсмического частотного зондирования. –М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1985, с.39-66.
3. *Haskell, N. A.*, 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media, Bull. Seism. Soc. Am., 43, 17-34.
4. *Knopoff, L.*, 1964. A matrix method for elastic wave problems, Bull. seism. Soc. Am., 54, 431-438.
5. *Knopoff, L., Schwab, F. & Kausel, E.*, 1973. Interpretation of L_x , Geophys. J. R. astr. Soc., 33, 983-993.
6. *F. Gilbert and G. Backus*, “Propagator matrices in elastic wave and vibration problems,” Geophysics 31, 326–332, 1966.
7. *Abo-Zena, A.*, Dispersion function computations for unlimited frequency values” Geophysical. J. R. Astron. Soc., 1979.
8. *W. Menke*, “Comment on ‘Dispersion function computations for unlimited frequency values’ by A. Abo-Zena,” Geophysical. J. R. Astron. Soc. 59, 315–323, 1979.
9. *Aki, K., Richards P. G.*, 1980. Quantitative Seismology: Theory and Methods, W. H. Freeman, San Francisco, 1980.

10. *Zhang Shi-Gong, Wu Xian-Mei, Zhang Bi-Xing, An Zhi-Wu*, Propagation properties of one-dimensional nonlinear acoustic waves, *Acts Physica Sinica*, 65, 2016.
11. *Bixing Zhang, M. Yu, C. Q. Lan, and Wei Xiong*, Elastic wave and excitation mechanism of surface waves in multilayered media, *The Journal of the Acoustical Society of America* 100, 3527, 1996.
12. *Chen X. F.*, A systematic and efficient method of computing normal modes for multi layered half-space. *Geophysical J. Int.*, 115: 391~409, 1993.
13. *He Y F, Chen W T, Chen X F.* Normal mode computation by the generalized reflection-transmission coefficient method in planar layered half-space. *Chinese J. Gophys. (In Chinese)*, 49(4):1074~1081, 2006.
14. *Donghong Pei, John N. Louie, and Satish K. Pullammanappallil.* Improvements on Computation of Phase Velocities of Rayleigh Waves Based on the Generalized R/T Coefficient Method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 98, No. 1, pp. 280–287, February 2008.
15. *Pan J. T., Wu Q. J., Li H. Y.*, Group velocities computation of surface waves based on the fast generalized R/T coefficient method. *Progress in geophys (in Chinese)*. 24(6): 2030-2035, 2009.

А.В. Баев, С.В. Гаврилов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ*

Введение

При решении многих прикладных задач, в том числе, обратных задач рассеяния, возникают системы уравнений в частных производных гиперболического типа. В этих системах коэффициенты уравнений (как правило, переменные) неизвестны и подлежат определению на основе дополнительной информации. Характерно, что эти задачи являются по своим свойствам некорректно поставленными.

Имеется обширная литература [1–6], в основном посвященная исследованию обратных задач рассеяния, в которых искомые коэффициенты зависят от одной или нескольких пространственных переменных. К настоящему времени детально исследованы вопросы существования и единственности подобных задач, а также разработаны устойчивые методы их решения.

Класс рассматриваемых обратных задач рассеяния постоянно расширяется. Так в число определяемых параметров (функций пространственных переменных) включаются коэффициенты, характеризующие не только рассеивающие свойства сред, такие как плотность, акустический импеданс, упругие параметры Ламэ, электропроводность и т. п., но и коэффициенты, характеризующие их диссипативные свойства [7]. В ряде случаев оказывается возможным использовать функциональную связь таких коэффициентов [8].

В настоящей работе рассматривается математическая модель, описывающая распространение звуковых волн в акустической среде, давление $p_0(t)$ и плотность $\rho_0(t)$ которой в покое зависят от времени, но не зависят от пространственных переменных. Считаем процесс распространения возмущений в среде адиабатическим, а функции $p_0(t)$ и $\rho_0(t)$ медленно меняющимися по сравнению с изменением давления $p(r, t)$ и плотности $\rho(r, t)$ в волне. Такая физическая модель возникает, например, в газе под действием электрического тока или в результате воздействия потока заряженных частиц в режиме установления.

Приведем вывод системы уравнений акустики для указанной модели. В качестве исходных рассмотрим систему уравнений гидродинамики, [9], пренебрегая членами второго порядка малости по скоростям $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ смещений частиц среды:

* Разделы работы выполнены: 1–2 — в рамках бюджета факультета ВМК, гос. рег. № АААА-А16-116021510092-2; 3 — при поддержке РФФИ, проект № 17-01-00525.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p.$$

Учитывая сделанные предположения, имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0(t) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_0(t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p.$$

Поскольку при адиабатическом процессе, см. [9], $p = p_0(t)(\rho/\rho_0(t))^\gamma$, то

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0(t)}{\gamma p_0(t)} \frac{\partial p}{\partial t},$$

откуда окончательно получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \rho_0(t) \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_0(t) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad a^2 = \frac{\gamma p_0(t)}{\rho_0(t)}.$$

Величина a имеет размерность скорости и, как известно, является скоростью звука в идеальном газе.

Настоящая статья посвящена решению одномерной обратной задачи, состоящей в определении коэффициента $\rho_0(t)$ по данным рассеяния — волнам, рассеянными полупрямой с изменяющейся плотностью. Одним из важных результатов работы является доказательство единственности решения этой задачи в классе функций (граничных источников возбуждения колебаний), которые можно охарактеризовать как почти не обращающиеся в ноль. Основной метод исследования при этом базируется на использовании нелинейных интегро-функциональных уравнений Вольтерра первого и третьего рода в развитие подходов работы [10].

На базе установленных в работе условий единственности решения обратной задачи рассеяния предложен численный алгоритм решения, основанный на методе обращения разностных схем (РС), см. [2], и итерационном методе, [8], и продемонстрированы некоторые результаты его применения для решения модельных задач.

1. Задачи рассеяния в нестационарной акустической среде

Рассмотрим одномерную гиперболическую систему уравнений в частных производных, описывающую распространение волн в акустической среде, заполняющей трубку, считая скорость a распространения волн постоянной:

$$\rho_0(t) s_t + p_y = 0, \quad p_t + a^2 \rho_0(t) s_y = 0, \quad (1)$$

где $s(y, t)$ — скорость малых смещений среды, $p(y, t)$ — флуктуации давления, $\rho_0(t)$ — плотность, зависящая от времени, y — эйлерова координата, t — физическое время. Прежде чем переходить к постановке задач рассеяния, приведем систему (1) к каноническому виду нестационарной системы Дирака.

Следствием системы (1) является волновое уравнение:

$$p_{tt} = a^2 p_{yy} - 2z(t) p_t, \quad z(t) = -\rho_0'(t)/(2\rho_0(t)). \quad (2)$$

Коэффициент $z(t)$, в отличие от коэффициента трения, может иметь

физический смысл как коэффициента поглощения при $z > 0$, так и коэффициента возбуждения при $z < 0$. Понятно, что в подобной среде закон сохранения энергии не выполняется.

Уравнению (2) сопоставим эквивалентную каноническую систему в римановых инвариантах (нестационарную систему Дирака). Для этого запишем (2) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) p = -2z(t) \frac{\partial p}{\partial t}$$

и введем новые зависимые переменные: $\hat{v} = p_t - ap_y$, $\hat{u} = p_t + ap_y$. При этом приходим к гиперболической системе:

$$\hat{v}_t + a\hat{v}_y + z(t)(\hat{v} + \hat{u}) = 0, \quad \hat{u}_t - a\hat{u}_y + z(t)(\hat{v} + \hat{u}) = 0.$$

Полагая $\hat{v} = \sqrt{\rho_0(t)}v$, $\hat{u} = \sqrt{\rho_0(t)}u$ и введя переменную эйконал $x = y/a$, окончательно приводим эту систему к канонической форме:

$$v_t + v_x + z(t)u = 0, \quad u_t - u_x + z(t)v = 0, \quad z \in C[0, \infty). \quad (3)$$

Римановы инварианты $v(x, t)$, $u(x, t)$ имеют физический смысл бегущих волн, распространяющихся вправо и влево вдоль оси x .

Поставим следующую начально-краевую задачу (*прямая задача рассеяния*) для системы (3) при $x, t > 0$:

$$v(x, 0) = u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad v(0, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где φ — источник в граничном условии. Решение подобных задач хорошо изучено как в случае выполнения условия согласования $\varphi(0) = 0$, так и в случае $\varphi(0) \neq 0$, [6–8]. В первом случае при $\varphi \in C^1[0, \infty)$ существует классическое решение, во втором, при $\varphi \in C[0, \infty)$, — обобщенное в смысле интегрального тождества. Однако в любом случае это решение представимо в виде:

$$v(x, t) = \varphi(t - x) + V(x, t), \quad u(x, t) = U(x, t),$$

где $V(x, t) = U(x, t) = 0$ при $x > t$, $V, U \in C^1(x \leq t) \cap C(x, t \geq 0)$.

В данной работе рассматриваются граничные источники $\varphi(t)$ из класса $\bar{C}^1[0, \infty)$ кусочно-гладких функций таких, что в конечном числе точек t_n потери гладкости либо имеет место разрыв непрерывности первого рода, либо $\varphi \in C^p(\mathcal{O}(t_n)) \setminus C^{p+\gamma}(\mathcal{O}(t_n))$ для некоторого $p \in (0, 1)$ и любого $\gamma > 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}(t_n)$ точки t_n . Обозначим указанный класс функций как $\bar{C}^{1,p}[0, \infty)$ для $0 \leq p < 1$.

Для дальнейшего изложения важна следующая оценка условной устойчивости решения задачи (3),(4) по коэффициенту z . Всюду в настоящей работе для положительных постоянных в оценках используется единый символ L .

Лемма 1. Пусть $\varphi \in \bar{C}^{1,p}[0, \infty)$. Тогда для любого $t \in [0, T]$ при условии $u(0, t; z_1) = u(0, t; z_2)$ справедлива оценка:

$$\max_{0 \leq \tau + \xi \leq t} |v_x(\xi, \tau; z_1) - v_x(\xi, \tau; z_2)| \leq L \max_{0 \leq \tau \leq t} |z_1(\tau) - z_2(\tau)|.$$

Доказательство. Очевидно, что функции $V(x, t)$, $U(x, t)$ являются решением следующей задачи Дарбу:

$$\begin{aligned} V_t + V_x + z(t)U &= 0, & U_t - U_x + z(t)V &= -z(t)\varphi(t-x), & 0 < x < t, \\ V(0, t) &= 0, & U(t, t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений допускает дифференцирование по x , откуда для $\hat{V}(x, t) = V_x(x, t)$, $\hat{U}(x, t) = U_x(x, t)$ получаем:

$$\begin{aligned} \hat{V}_t + \hat{V}_x + z(t)\hat{U} &= 0, & \hat{U}_t - \hat{U}_x + z(t)\hat{V} &= z(t)\varphi'(t-x), & 0 < x < t, \\ \hat{V}(0, t) &= -z(t)U(0, t), & \hat{U}(t, t) &= z(t)\varphi(0)/2, & t \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что функция $\varphi'(t)$ абсолютно интегрируема по Риману в смысле несобственного интеграла.

Проинтегрируем уравнения (5) вдоль соответствующих характеристик. Получаем:

$$\begin{aligned} \hat{V}(x, t) &= - \int_{t-x}^t \hat{U}(x + \tau - t, \tau; z) z(\tau) d\tau + z(t-x)U(0, t-x), \\ \hat{U}(x, t) &= \int_{(t+x)/2}^t [\varphi'(2\tau - t - x) - \hat{V}(2\tau - t - x, \tau; z)] z(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Из этой системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода следует, что $\hat{V}(x, t)$, $\hat{U}(x, t)$ ограничены при $t + x \leq T$.

Введем функции $\bar{v}(y) = \max_{0 \leq t+x \leq y} |\hat{V}(x, t; z_1) - \hat{V}(x, t; z_2)|$, $\bar{u}(s) = \max_{0 \leq \tau + \xi \leq s} |\hat{U}(\xi, \tau; z_1) - \hat{U}(\xi, \tau; z_2)|$, $\bar{z}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |z_1(\tau) - z_2(\tau)|$. Из системы (6) при $y \in [0, T]$ получаем:

$$\bar{v}(y) \leq L \left[\int_0^y \bar{u}(\tau) d\tau + \int_0^y \bar{z}(\tau) d\tau + z(y) \right], \quad \bar{u}(y) \leq L \left[\int_0^y \bar{v}(\tau) d\tau + \int_0^y \bar{z}(\tau) d\tau \right]$$

откуда на основании леммы Гронуолла приходим к искомой оценке. \square

Поставим *обратную задачу рассеяния* для (3),(4) в T -локальной формулировке:

найти $z \in C[0, 2T]$ при известном граничном источнике

$\varphi \in \bar{C}^{1,p}[0, 2T]$ и данных рассеяния $u(0, t) = f(t)$, $f \in C^1[0, 2T]$.

Данная задача является некорректно поставленной, а ее решение существует не при любых φ и f .

2. Единственность решения обратной задачи рассеяния

Исследуем единственность поставленной обратной задачи в классе граничных условий — функций $\varphi \in \bar{C}^{1,p}[0, 2T]$, $0 \leq p < 1$. При $p \neq 0$

точки t_n являются нулями функции $\varphi(t)$. В этих точках $\varphi(t)$ не дифференцируема, и пусть в ε -окрестности точек t_n ее поведение описывается как $\varphi(t) = \psi_n(t) \operatorname{sgn}(t - t_n) |t - t_n|^p$, $\psi_n \in C^1[t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon]$ при $t \in [t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon]$, где ε положительно и достаточно мало, $\psi_n(t_n) \neq 0$. При $p = 0$ пусть функция $\varphi(t)$ имеет в точках t_n разрыв первого рода со сменой знака, т. е. считаем, что $\varphi(t_n - 0)\varphi(t_n + 0) < 0$. Допустимо, что $t_0 = 0$.

Получим уравнение относительно искомой функции $z(t)$. Для этого проинтегрируем второе уравнение из (3) вдоль характеристики вида $t + x = \operatorname{const}$ и учтем, что $u(t, t) = 0$. Имеем:

$$\int_t^{2t} v(2t - \tau, \tau; z) z(\tau) d\tau = f(2t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (7)$$

где обозначение $v(x, t; z) \equiv v(x, t)$ используется для указания того, что $v(x, t)$ функционально зависит от $z(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t + x$. Дифференцируя (7), приходим к следующему функциональному уравнению:

$$\varphi(2t)z(2t) - \varphi(0)z(t)/2 + \int_t^{2t} v(2t - \tau, \tau; z) z(\tau) d\tau = f'(2t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Заметим, что в точках $\tau = t + t_n/2$ подынтегральная функция имеет интегрируемые особенности.

Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 1. Пусть $\varphi(t)$ принадлежит на $[0, 2T]$ указанному классу функций. Тогда обратная задача рассеяния имеет на $[0, 2T]$ не более одного непрерывного решения.

Доказательство. Рассмотрим случай $t_0 = 0$. Возможны два варианта: $\varphi(0) = q \neq 0$ и $\varphi(t) = \psi_0(t)t^p$, $\psi_0(t) \neq 0$, в окрестности нуля.

Пусть $q > 0$. Предположим, что существуют два различных на $[0, 2\varepsilon]$ решения обратной задачи: $z_1(t) \neq z_2(t)$. Для их разности $z = z_1 - z_2$ имеем:

$$\begin{aligned} 2\varphi(2t)z(2t) &= qz(t) - 2 \int_t^{2t} v_x(2t - \tau, \tau; z_1) z(\tau) d\tau - \\ &- 2 \int_t^{2t} [v_x(2t - \tau, \tau; z_1) - v_x(2t - \tau, \tau; z_2)] z_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Воспользуемся оценкой из леммы 1:

$$\max_{0 \leq \tau + \xi \leq 2t} |v_x(\xi, \tau; z_1) - v_x(\xi, \tau; z_2)| \leq L \max_{0 \leq \tau \leq 2t} |z_1(\tau) - z_2(\tau)|. \quad (10)$$

Из (9) для функции $m(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |z(\tau)|$ для любого $t \in [0, \varepsilon]$, $\varepsilon \leq t_1$, получаем неравенство:

$$2m(2t) \min_{0 \leq \tau \leq \varepsilon} |\varphi(\tau)| \leq q m(t) + L \int_0^{2t} m(\tau) d\tau,$$

откуда при достаточно малом ε следует, что $z(t) = 0$ на отрезке $[0, 2\varepsilon]$.

Пусть теперь $2\varepsilon \leq 2t < t_1$. При этом $v(x, t; z_1) = v(x, t; z_2)$ при $t \leq \varepsilon$, а равенство (9) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \varphi(2t)z(2t) &= - \int_{2\varepsilon}^{2t} [v_x(2t - \tau, \tau; z_1)z(\tau) d\tau - \\ &- \int_{2\varepsilon}^{2t} [v_x(2t - \tau, \tau; z_1) - v_x(2t - \tau, \tau; z_2)]z_2(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (10) и условия $\varphi(2t) > 0$, находим, что $z(t) = 0$ при $t < t_1$. В силу непрерывности функции $z(t)$ имеем $z(t_1) = 0$.

Таким образом, доказано, что при $q \neq 0$ решение обратной задачи единственно на отрезке $[0, t_1]$. Докажем, что это справедливо и при $q = 0$.

Аналогично (8) имеем при $0 \leq 2t < t_1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < t_1$:

$$\begin{aligned} \varphi(2t)z(2t) &+ \int_t^{2t} v_x(2t - \tau, \tau; z_1)z(\tau) d\tau + \\ &+ \int_t^{2t} [v_x(2t - \tau, \tau; z_1) - v_x(2t - \tau, \tau; z_2)]z_2(\tau) d\tau = 0, \end{aligned}$$

причем в окрестности нуля $\varphi(t) \sim \psi_0(0)t^p$, $\psi_0(0) > 0$. Домножив последнее равенство на $t^{-p} \exp(-2\alpha t)$, $\alpha > 0$, и воспользовавшись оценкой (10), получаем:

$$\max_{0 \leq \tau \leq 2t} |\exp(-\alpha\tau)z(\tau)| \leq L \max_{0 \leq \tau \leq 2t} |\tau^{-p} \exp(-\alpha\tau) \int_0^\tau \max_{0 \leq y \leq x} |z(y)| dx|. \quad (11)$$

Введем функцию $M(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |\exp(-\alpha\tau)z(\tau)|$. Тогда для (11) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} M(2t) &\leq L \max_{0 \leq \tau \leq 2t} |\tau^{-p} \int_0^\tau \max_{0 \leq y \leq x} |\exp(-\alpha y)z(y)| \exp(-\alpha(\tau - x)) dx| \leq \\ &\leq L \max_{0 \leq \tau \leq 2t} |\tau^{-p} \int_0^\tau M(x) \exp(-\alpha(\tau - x)) dx| \leq \\ &\leq L M(2t) \max_{0 \leq \tau \leq 2t} |\tau^{-p} \int_0^\tau \exp(-\alpha(\tau - x)) dx|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\max_{0 \leq \tau \leq 2t} \left| \tau^{-p} \int_0^{\tau} \exp(-\alpha(\tau - x)) dx \right| \leq \alpha^{p-1} \max_{0 \leq y < \infty} \left| y^{-p} \int_0^y \exp(s - y) ds \right| < \alpha^{p-1},$$

то для любого сколь угодно большого $\alpha > 0$ имеем:

$$M(2t) \leq L\alpha^{p-1}M(2t),$$

откуда следует, что $M(t) = 0$ при $t < t_1$, а в силу непрерывности функции $z(t)$ и при $t = t_1$. Таким образом, и в случае $\varphi(0) = 0$ справедливо равенство $z(t) = 0$, когда $t \leq t_1$.

Докажем, что $z(t) = 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$. Поскольку $z_1(t) = z_2(t)$ при $0 \leq t \leq t_1$, то $v(x, t_1; z_1) = v(x, t_1; z_2)$, $u(x, t_1; z_1) = u(x, t_1; z_2)$ при любом $x \geq 0$. Тогда, аналогично (9), приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \varphi(2t)z(2t) = & - \int_{t_1}^{2t} v_x(2t - \tau, \tau; z_1)z(\tau)d\tau - \\ & - \int_{t_1}^{2t} [v_x(2t - \tau, \tau; z_1) - v_x(2t - \tau, \tau; z_2)]z_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Очевидно, что возможны два случая:

$\varphi(t_1 + 0) < 0$ или $\varphi(t) = \psi_1(t)\text{sgn}(t - t_1)|t - t_1|^p$, $\psi_1(t_1) < 0$. При этом предыдущее рассмотрение полностью повторяется.

Замечание 1. В точках t_n , где $\varphi(t_n) = 0$ или $\varphi(t)$ претерпевает разрыв, особенности функции $\varphi(t)$ могут быть различными, т. е. $\varphi(t) \sim \psi_n(t_n)|t - t_n|^{-p_n}\text{sgn}(t - t_n)$, $\psi_n(t_n) \neq 0$, $0 \leq p_n < 1$.

Замечание 2. Смена знака функции $\varphi(t)$ при переходе через точку t_n не обязательна. Рассмотренный класс знакопередающихся функций φ был выбран как наиболее естественный с прикладной точки зрения.

Замечание 3. Указанные условия однозначной разрешимости обратной задачи принципиально отличаются от достаточных условий для определения коэффициентов, зависящих от пространственной переменной, когда от источника требуется локализация в окрестности $t = 0$.

3. Численное решение обратной задачи рассеяния

3.1 Разностная схема и метод обращения РС. Рассмотрим численный метод решения обратной задачи рассеяния, основанный на

обращении РС для задачи (3),(4). Введем равномерную пространственно-временную сетку с шагом $h = T/N$ и сопоставим функциям $v(x, t)$, $u(x, t)$, $z(t)$ сеточные функции $\{v_i^j\} = \{v(hi, hj)\}$, $\{u_i^j\} = \{u(hi, hj)\}$, $\{z_j\} = \{z(hj)\}$, $i, j = \overline{0, 2N}$. Поставим в соответствие (3) следующую РС (схема "распада разрыва"), [6–7]:

$$v_{i+1}^{j+1} - v_i^j + h z_j u_i^j = 0, \quad u_i^{j+1} - u_{i+1}^j + h z_{j+1} v_i^{j+1} = 0, \quad i, j = \overline{0, 2N-1}. \quad (12)$$

Данная РС схема является явно-неявной консервативной и устойчивой со вторым порядком аппроксимации на гладких решениях.

Разностные уравнения (12) позволяют по начальным-краевым условиям $v_i^0 = u_i^0 = 0$, $i = \overline{1, 2N}$, $v_0^{2j} = \varphi_j$, $j = \overline{0, N}$, $z_0 = 0$, последовательно определять значения функций $\{v_i^j\}$ и $\{u_i^j\}$ в характеристическом треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $t = x$, $t = 2T - x$, продвижением по расчетным слоям — характеристикам $i + j = 2k$, $k = \overline{0, N}$, проходящим через соответствующие узлы сетки. При этом сначала определяются значения v_i^j на $(k + 1)$ -м слое по решению на предыдущем слое:

$$v_{i+1}^{2k-i+1} = v_i^{2k-i} - h z_{2k-i} u_i^{2k-i}, \quad u_i^i = 0 \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (13)$$

а затем на том же $(k + 1)$ -м слое значения u_i^j :

$$u_{2k-j+1}^{j+1} = u_{2k-j+2}^j - h z_{j+1} v_{2k-j+1}^{j+1}, \quad u_j^j = 0, \quad j = \overline{k+1, 2k+1}. \quad (14)$$

Решение обратной задачи рассеяния методом обращения РС реализуем параллельно-последовательно решению прямой задачи по слоям-характеристикам $i + j = 2k$, $k = \overline{1, N}$. Изложим обращение РС (12) для решения обратной задачи рассеяния в случае, когда $\varphi_j \neq 0$ для всех $j = \overline{0, N}$. Пусть в качестве данных рассеяния в обратной задаче известны значения функции $\{u_0^{2j}\} = \{f_j\}$, $j = \overline{0, N}$. Просуммировав второе уравнение в (12) вдоль характеристики $i + j = 2k$, приходим к дискретному аналогу интегро-функционального уравнения (7):

$$\sum_{j=1}^{2N} A_{kj}(\mathbf{z}) z_j = \sum_{j=k+1}^{2k} v_{2k-j}^j(\mathbf{z}_{j-1}) z_j h = f_k, \quad v_0^{2k} = \varphi_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (15)$$

где обозначена функциональная зависимость $v_{2k-j}^j \equiv v_{2k-j}^j(\mathbf{z}_{j-1})$ от вектора $\mathbf{z}_{j-1} = \text{col}\{z_1, \dots, z_{j-1}\}$, $\mathbf{z}_{2N} \equiv \mathbf{z}$.

Запишем систему (15) в виде

$$A(\mathbf{z})\mathbf{z} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \text{col}\{f_1, \dots, f_N\}, \quad (16)$$

а $N \times N$ матрицу $A(\mathbf{z})$ представим в виде $A(\mathbf{z}) = hE\boldsymbol{\varphi} + B(\mathbf{z})$, где E — единичная матрица, а $\boldsymbol{\varphi} = \text{col}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$. Тогда метод обращения РС представляется в виде:

$$\mathbf{z} = (hE\boldsymbol{\varphi} + B(\mathbf{z}))^{-1}\mathbf{f}, \quad (17)$$

где определение левой части происходит последовательно начиная с первой строки системы (17). Матрица $B(\mathbf{z})$ имеет нижнетреугольный вид с нулевой диагональю, а система (17) в силу своей структуры решается явно и параллельно-последовательно с решением прямой задачи (13),(14). В результате применения такого алгоритма значения z_j однозначно определяются по заданным $\varphi_j, f_j, j = \overline{1, N}$.

3.2 Итерационный метод решения. Непосредственно метод обращения РС неустойчив по погрешности (соответствующей равномерной метрике) сеточных функций φ, f , поскольку алгоритм определения z аналогичен численному дифференцированию. Поэтому на основе описанного в п. 3.1 подхода в работе построен регуляризованный итерационный метод численного решения обратной задачи, на каждом шаге которого задача нахождения коэффициента z сводится к СЛАУ, для решения которой применяется метод регуляризации Тихонова.

Рассмотрим итерационный метод, основанный на использовании последовательных приближений для решения основного уравнения обратной задачи (16), в виде:

$$(hE\boldsymbol{\varphi} + B(\mathbf{z}^{(n)}))\mathbf{z}^{(n+1)} = \mathbf{f}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{z}^{(0)} = 0. \quad (18)$$

Для решения этой СЛАУ используем метод регуляризации, [11], согласуя величину параметра регуляризации с шагом разностной схемы и погрешности входных данных. Критерий останова итерационного процесса — достижение уровня погрешности функции \mathbf{f} по невязке. В случае, если $\varphi_j = 0$, на главной диагонали треугольной матрицы A появляется нулевой элемент. Однако использование метода регуляризации при решении СЛАУ $A(\mathbf{z}^{(n)})\mathbf{z}^{(n+1)} = \mathbf{f}$ позволяет применять предложенный итерационный метод и в этом случае.

3.3. Вычислительные эксперименты. Рассмотрим некоторые результаты применения итерационного метода для численного решения обратной задачи рассеяния. Вычисления проводились по следующей схеме. На квадрате $[0,1] \times [0,1]$ вводилась равномерная сетка с одинаковым числом узлов 200 на пространственной и временной оси. В

каждом вычислительном эксперименте задавалась пара функций $\varphi(t)$ и $z(t)$, и, соответственно, значения φ_j и z_j в узлах сетки. Затем с этими функциями численно решалась прямая задача рассеяния и находился след решения $\mathbf{f} = \{f_j\} = \{u_0^{2j}\}$. В него вводилась случайная погрешность и определялась функция $\mathbf{f}^\varepsilon = \{f_j^\varepsilon\}$, такая что $\|\mathbf{f}^\varepsilon - \mathbf{f}\|_{L_{2,h}[0,1]} / \|\mathbf{f}\|_{L_{2,h}[0,1]} = \varepsilon$. Для полученной функции \mathbf{f}^ε итерационным методом (18) решалась обратная задача рассеяния и восстанавливалась функция $\mathbf{z} = \{z_j\}$.

В первых двух вычислительных экспериментах (рис. 1–2) была проиллюстрирована работа итерационного метода на непрерывных функциях $\varphi(t)$, не обращающихся в ноль. Третий и четвертый вычислительные эксперименты (рис. 3–4) демонстрируют возможность работы регуляризованного итерационного метода в случае функций $\varphi(t)$, обращающихся в ноль на рассматриваемом отрезке в точках t_n .

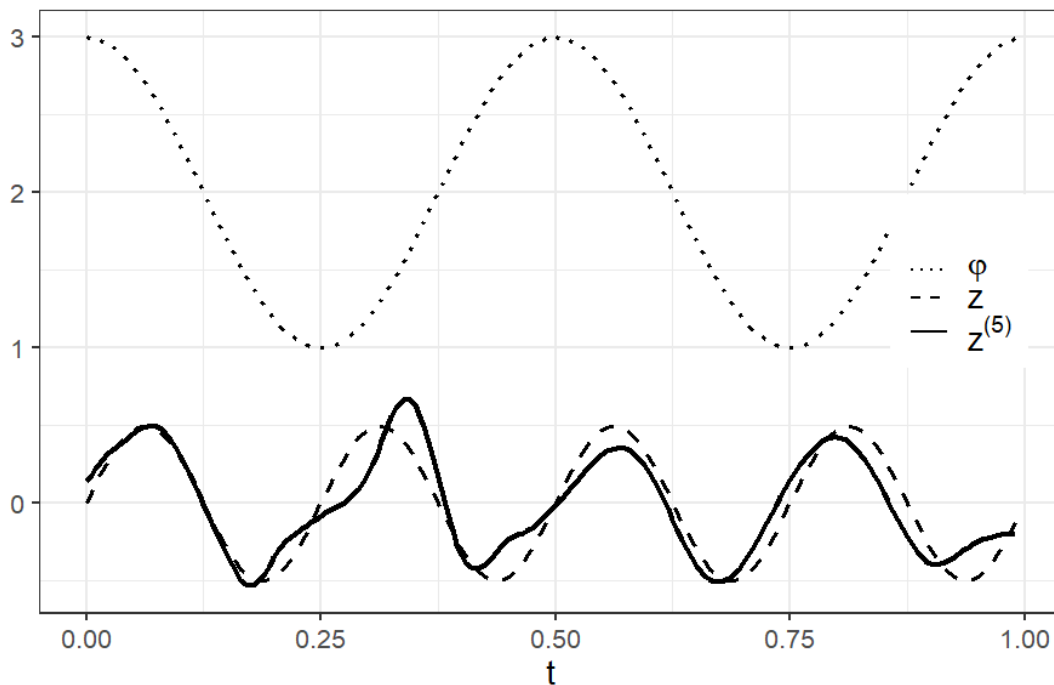


Рис. 1. Случай $\varphi \neq 0$, исходное z и решение на 5-м шаге, $\varepsilon = 0.05$.

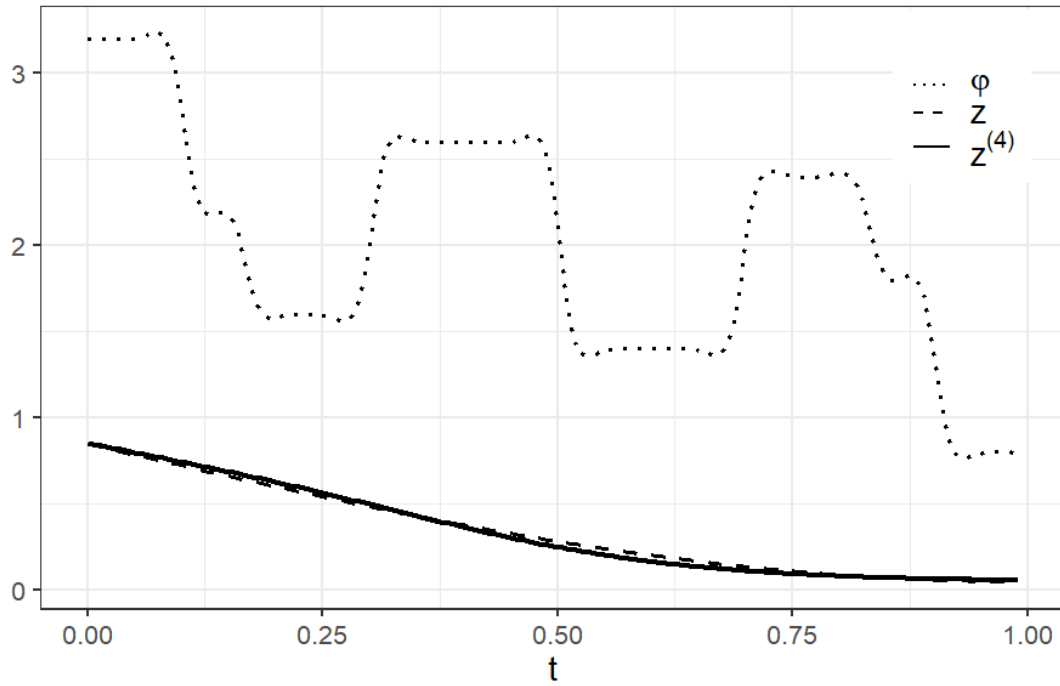


Рис. 2. Случай $\varphi \neq 0$, исходное z и решение на 4-м шаге, $\varepsilon = 0.05$.

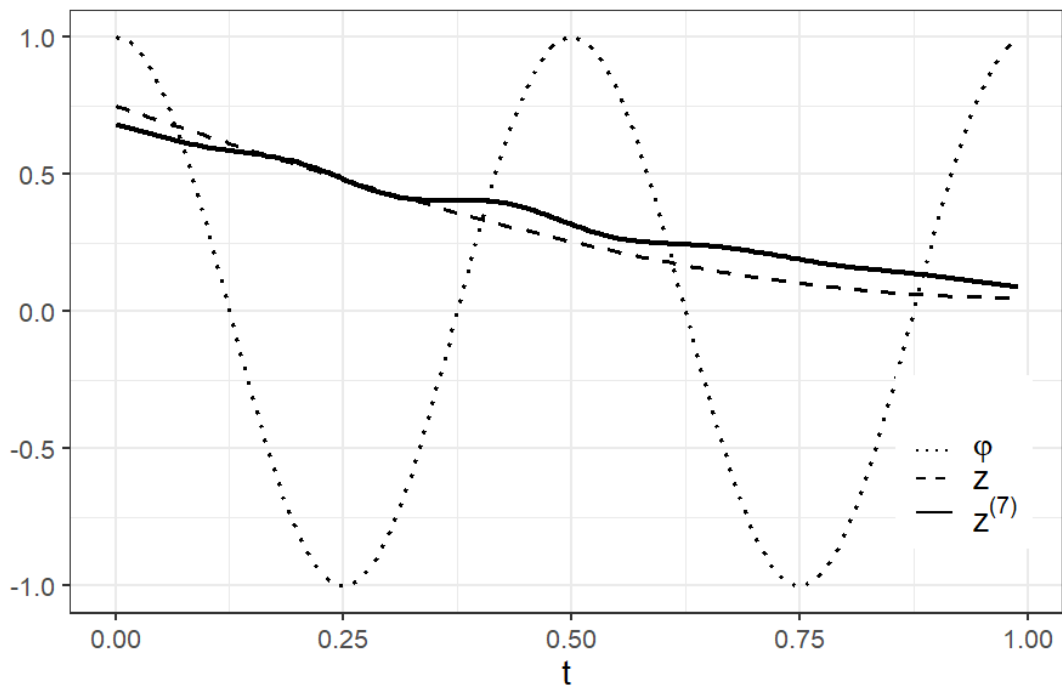


Рис. 3. Случай $\varphi(t_n) = 0$, исходное z и решение на 7-м шаге, $\varepsilon = 0.03$.

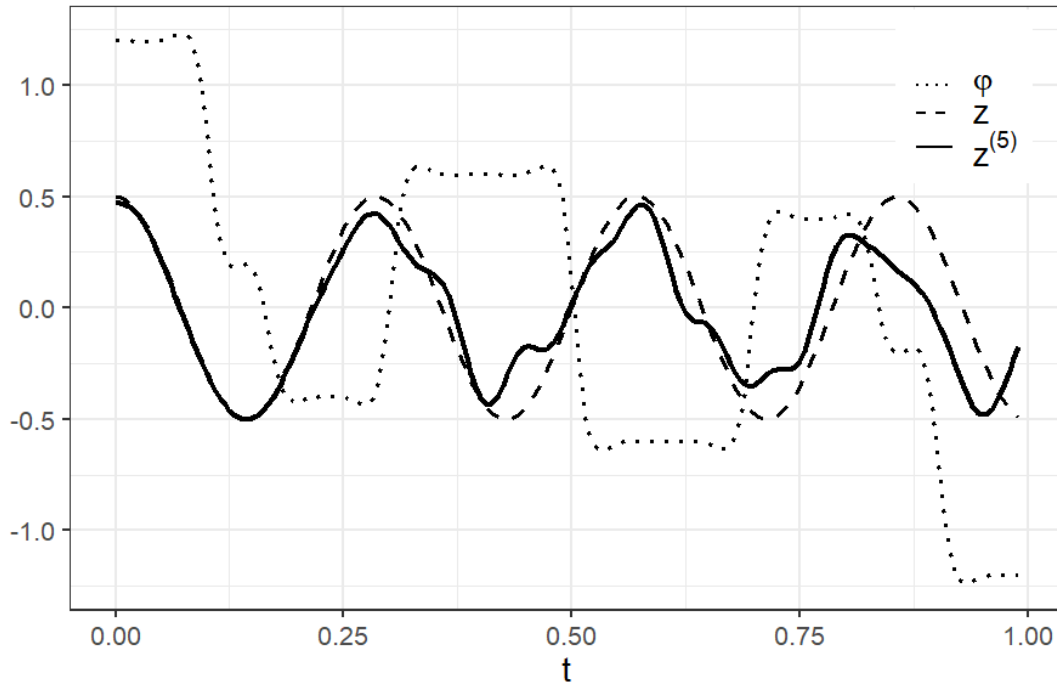


Рис. 4. Случай $\varphi(t_n) = 0$, исходное z и решение на 5-м шаге, $\varepsilon = 0.03$.

Литература

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука. 1984.
2. Кabanikhin С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение. 1988.
3. Белишев М.И., Благовещенский А.С. Динамические обратные задачи теории волн. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та. 1999.
4. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levititan-Krein equation. J. Inverse Ill-Posed Problems. 2011. V. 18. N 9. P. 979–995.
5. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. De Gruyter. 2011.
6. Baev A.V. Solution of an Inverse Scattering Problem for the Acoustic Wave Equation in Three-Dimensional Media. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2016. V. 56. N 12. P. 2043–2055.
7. Baev A.V. On local solvability of inverse dissipative scattering problems. J. Inverse Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. N 4. P. 227–247.
8. Baev A.V., Gavrilov S.V. An Iterative Way of Solving the Inverse Scattering Problem for an Acoustic System of Equations in an Absorptive

Layered Nonhomogeneous Medium. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2018. V. 42. N 2. P. 55–62.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1988.

10. Magnitskii N.A. Volterra linear integral equations of the first and third kinds. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1979. V. 19. N 4. P. 182–200.

11. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М: Наука. 1990.

С.В. Степаненко, А.В. Разгулин, В.А. Трофимов

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА В СРЕДЕ С КЕРРОВСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Введение

Оптика малопериодных фемтосекундных лазерных импульсов интенсивно развивается в последнее время. Такие сверхкороткие импульсы используются в различных областях физики, включая нелинейную оптику, медицинскую диагностику, управление химическими реакциями и др.

Процесс распространения лазерного излучения может описываться различными способами в зависимости от параметров задачи. Наиболее полное представление о таком распространении даёт система уравнений Максвелла. Этот подход используется во многих работах, например, в [1]-[4], однако он требует трудоемких вычислений и по этой причине не является эффективным для компьютерного моделирования. Другой подход описания распространения ультракоротких импульсов заключается в использовании приближений метода медленно изменяющихся амплитуд (во времени и по пространственной координате, вдоль которой распространяется излучение). Этот подход дает довольно точные результаты для лазерных импульсов, длительность которых более 40 фс. Для описания распространения таких импульсов в [5]-[6] было предложено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Для описания распространения ультракоротких импульсов в оптических волокнах в [7] было предложено обобщенное уравнение Шредингера, содержащее производную от нелинейного отклика среды.

Для описания распространения коротких импульсов в среде с керровской нелинейностью и с учетом дифракции оптического излучения в работах [8]-[9] впервые было предложено еще одно обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (ОНУШ), отличающееся от работы [7] наличием смешанных производных и второй производной от нелинейного отклика среды. Следует подчеркнуть, что при анализе распространения светового импульса в волокнах уравнение из [8]-[9] переходит в уравнение из [7] при его записи в безразмерных переменных.

Обобщенное уравнение имеет следующую структуру: стандартное нелинейное уравнение Шредингера с производными по времени от нелинейного отклика среды, а также смешанные производные по времени и направлению распространения излучения. В работе [10] авторы предложили обобщенное уравнение, на основе которого можно проследить отличия моделей, описывающих распространение

малопериодных и многопериодных лазерных импульсов в нелинейной среде. В работах [11]-[13] ОНУШ успешно используется для описания процессов филаментации.

Несмотря на достаточно широкое применение ОНУШ в литературе, разработка и обоснование соответствующих численных методов и их применения к моделированию малопериодных лазерных импульсов является актуальной проблемой. Как правило, для численного решения ОНУШ используется метод расщепления, суть которого заключается в разделении процесса распространения излучения на линейную и нелинейную части, которые решаются независимо друг от друга. Методы расщепления для моделирования ОНУШ были использованы, например, в [8]-[10], где полученное численное решение сравнивалось с решением, полученным на основе системы уравнений Максвелла.

При исследовании обобщенных уравнений Шредингера особое место занимает задача построения инвариантов - законов сохранения, характеризующих процесс распространения сверхкоротких фемтосекундных импульсов. Известно, что методы расщепления не являются полностью консервативными даже в случае НУШ. Они сохраняют только инвариант энергии, но не сохраняют Гамильтониан задачи (так называемый третий инвариант), описывающий взаимодействие лазерного импульса с нелинейной средой. Однако, инвариант энергии не содержит в себе информацию о волновом фронте и частотном распределении оптического излучения, также, как и не содержит параметров, характеризующих дисперсию и дифракцию лазерного импульса в нелинейной среде. Эту информацию содержит Гамильтониан, поэтому при моделировании важно знать с какой точностью он сохраняется (например, эффекты самовоздействия импульсов строго зависят от их фазы и частоты распределения). Построения некоторых инвариантов встречаются в работах [14]-[17]. Многие инварианты НУШ, описывающего различные процессы нелинейной оптики, были построены в [18] и в литературе, приведенной там.

Ранее, в работе [19] инварианты были построены для обобщенного уравнения, записанного в [7]. В [20] было предложено преобразование данного уравнения к виду, не содержащему производной от нелинейного отклика среды. Для нелинейного обобщенного уравнения, рассматриваемого в настоящей работе, законы сохранения построены не были, поэтому данная задача является актуальной.

1. Постановка задачи

Распространение лазерного импульса фемтосекундной длительности в кубично нелинейной среде (поляризация пропорциональна напряженности электрического поля в третьей степени)

с учетом производных по времени от нелинейного отклика среды (дисперсии нелинейности), с учетом влияния дифракции оптического излучения и с учетом дисперсии второго порядка описывается безразмерным обобщенным нелинейным уравнением Шредингера (ОНУШ)[8]:

$$\begin{aligned} & \left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial A}{\partial z} + iD_2 \left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + iD \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \\ & + i\alpha \left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 (|A|^2 A) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

которое может быть рассмотрено в области

$$(z, x, t) \in \Omega = (0, L_z] \times (0, L_x) \times (0, L_t),$$

с граничными условиями:

$$A|_{x=0, x=L_x} = A|_{t=0, t=L_t} = \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и начальным условием

$$A|_{z=0} = A_0(x, t). \quad (3)$$

В (1) – (3) функция $A(z, x, t)$ – медленно изменяющаяся во времени и пространстве комплексная амплитуда, связанная с напряженностью электрического поля следующим соотношением:

$$\mathcal{E}(z, x, t) = A(z, x, t)e^{-(i\omega t - ikz)} + \text{к. с.}, \quad (4)$$

где к.с. означает комплексное сопряжение, ω – безразмерная частота световой волны, k – ее волновое число.

Комплексная амплитуда импульса $A(z, x, t)$ нормирована на квадратный корень из максимального значения интенсивности волнового пакета на входе в нелинейную среду. Лазерный импульс распространяется вдоль координаты z , которая измеряется в единицах характерной длины среды, t – нормированное на длительность импульса время в сопровождающей его системе координат, D_2 – коэффициент, равный отношению длины среды к дисперсионной длине, D – коэффициент, характеризующий дифракцию среды, α – отношение начальной мощности импульса к характерной мощности самовоздействия, γ – параметр, обратно пропорциональный произведению длительности импульса на его частоту, L_z, L_x, L_t – безразмерные границы области, в пределах которой анализируется процесс распространения импульса.

2. Преобразование уравнения

Для преобразования уравнения (1) к виду, не содержащему смешанных производных и производных от нелинейного отклика среды, запишем оператор ОНУШ в следующем виде:

$$\left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) g = i\gamma e^{\frac{it}{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(g \cdot e^{-\frac{it}{\gamma}}\right). \quad (5)$$

Учитывая соотношение (5), а также используя формулу интегрирования по частям, уравнение (1) сводится к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(A \cdot e^{-\frac{it}{\gamma}} \right) + iD_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - iD_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \cdot e^{-\frac{it}{\gamma}} \Big|_{t=0} + \\ & + \frac{D}{\gamma} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\int_0^t A(z, x, \eta) \cdot e^{-\frac{i\eta}{\gamma}} d\eta \right) + \\ & + i\alpha e^{-\frac{it}{\gamma}} \left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) (|A|^2 A) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Физически начальное распределение $A_0(x, t)$ представляет собой функцию, финитную по всем переменным, поэтому можно считать, что она обращается в нуль вне некоторого параллелепипеда со сторонами L_z^0, L_x^0, L_t^0 . Так как поставленная задача решается на конечном по z отрезке ($z < L_z$) с конечными коэффициентами дисперсионного D_2 и дифракционного D расплывания, то из физических соображений и финитности входного распределения $A_0(x, t)$ ясно, что можно выбрать параллелепипед со сторонами L_z, L_x, L_t , вне которого при всех z решение будет нулевым (так называемая пространственная и временная ограниченность поля [18]). Поэтому к уравнению (1) можно добавить граничное условие

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

тогда уравнение (6) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial z} + iD_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{D}{\gamma} \cdot e^{\frac{it}{\gamma}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^t A(z, x, \eta) \cdot e^{-\frac{i\eta}{\gamma}} d\eta \right) + \\ & + i\alpha \left(1 + i\gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) (|A|^2 A) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Далее введем новые функции:

$$E(z, x, t) = \int_0^t A(z, x, \eta) \cdot e^{\frac{i(t-\eta)}{\gamma}} d\eta = P(z, x, t) \cdot e^{\frac{it}{\gamma}}, \quad (9)$$

$$\tilde{E}(z, x, t) = \int_0^t E(z, x, \eta) \cdot e^{\frac{i(t-\eta)}{\gamma}} d\eta, \quad (10)$$

тогда, с учетом (9) и (10), а также интегрирования по частям, уравнение (8) сводится к следующему виду:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + iD_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{D}{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} - \alpha\gamma |A|^2 A = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) следует решать наряду с релаксационными уравнениями, следующими из определения новых функций (9), (10):

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{iE}{\gamma} = A, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} - \frac{i\tilde{E}}{\gamma} = E, \quad (13)$$

а также со следующими граничными условиями

$$E|_{x=0, x=L_x} = \tilde{E}|_{x=0, x=L_x} = 0, \quad (14)$$

$$E|_{t=0} = \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{E}|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{iE}{\gamma} \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} - \frac{i\tilde{E}}{\gamma} \right) \Big|_{t=0} = 0, \quad (16)$$

и начальными условиями

$$E|_{z=0} = E_0(x, t) = \int_0^t A(x, \eta) \cdot e^{\frac{i(t-\eta)}{\gamma}} d\eta, \quad (17)$$

$$\tilde{E}|_{z=0} = \tilde{E}_0(x, t) = \int_0^t E(x, \eta) d\eta. \quad (18)$$

3. Основные инварианты

3.1. Закон сохранения энергии

Уравнение (1) с граничными условиями (2), (7) обладает следующим инвариантом энергии:

$$I_E(z) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} |A(z, x, t)|^2 dx dt = const. \quad (19)$$

Для получения инварианта умножим уравнение (8) на A^* , а сопряженное к нему на A , далее сложим полученные уравнения и проинтегрируем результат по x и t в рассматриваемой области, а также применим формулу интегрирования по частям. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dz} \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} |A(z, x, t)|^2 dx dt - \frac{D}{\gamma} \int_0^{L_x} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^2 \Big|_{t=L_t} dx = 0. \quad (20)$$

Далее рассмотрим уравнение (8) в точке $t = L_t$:

$$\frac{D}{\gamma} \cdot e^{\frac{iL_t}{\gamma}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^t A(z, x, \eta) \cdot e^{-\frac{i\eta}{\gamma}} d\eta \right) = \frac{D}{\gamma} \cdot e^{\frac{iL_t}{\gamma}} \frac{\partial^2 P(z, x, L_t)}{\partial x^2} = 0, \quad (21)$$

откуда следует, что функция $P(z, x, t)$ при $t = L_t$ имеет вид:

$$P|_{t=L_t} = C_1(z) + C_2(z)x. \quad (22)$$

Условие (22) означает, что амплитуда импульса на частоте $\omega = 1/\gamma$ может

возрастать при увеличении координаты x . Такие сингулярные частоты возникают даже в линейном случае ($\alpha = 0$). Обычно физическая причина возникновения роста амплитуды на этих частотах отсутствует и условие (22) можно записать в следующем виде:

$$P|_{t=L_t} = 0 \quad (23)$$

на всей трассе распространения излучения. Это означает, что гармоника $1/\gamma$ не попадает в спектр начального распределения.

Учитывая соотношение (21) и условие (23) получаем, что уравнение (1) обладает инвариантом энергии (19).

3.2. Спектральный инвариант

Следующий инвариант – спектральный, он описывает изменение амплитуды импульса на частоте возмущения $\omega = 1/\gamma$ и показывает, что амплитуда не должна возрастать на трассе распространения излучения. Для получения спектрального варианта потребуем выполнения следующего условия, аналогично (7):

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=0, x=L_x} = 0. \quad (24)$$

Уравнение (11) с граничными условиями (2), (7), (23), (24) обладает следующим спектральным инвариантом:

$$I_{SP}(z) = \int_0^{L_x} E(z, x, L_t) dx = e^{\frac{iD_2 z}{\gamma^2}} \int_0^{L_x} E_0(x, L_t) dx. \quad (25)$$

Рассмотрим уравнение (11) при $t = L_t$, с учетом релаксационного уравнения (12) и условия (23), далее проинтегрируем его по координате x в рассматриваемой области:

$$\int_0^{L_x} \left(\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{iD_2}{\gamma} E + \frac{D}{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \right) \Big|_{t=L_t} dx = 0. \quad (26)$$

Несложно показать, что при условии (24) интеграл

$$\int_0^{L_x} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \Big|_{t=L_t} dx \quad (27)$$

обращается в нуль. Таким образом добавляя к (26) начальное условие на функцию $E(z, x, t)$, получаем следующую задачу:

$$\int_0^{L_x} \left(\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{iD_2}{\gamma} E \right) \Big|_{t=L_t} dx = 0, \quad (28)$$

$$\int_0^{L_x} E_0(x, L_t) dx = 0, \quad (29)$$

решением которой является спектральный инвариант (25).

3.3. Гамильтониан

Уравнение (11) с граничными условиями (2), (7), (23), (24) обладает Гамильтонианом следующего вида:

$$I_H(z) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left[\left(iD_2 \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial A^*}{\partial t} + \frac{D}{\gamma} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x} \frac{\partial A^*}{\partial x} \right) + \frac{\alpha\gamma}{2} |A|^4 \right] dx dt = \text{const}. \quad (30)$$

Для получения Гамильтониана умножим уравнение (11) на $\frac{\partial A^*}{\partial z}$, а сопряженное к нему на $\frac{\partial A}{\partial z}$, далее сложим полученные уравнения и интегрируя по координатам x и t в рассматриваемой области, получаем следующую комбинацию интегралов:

$$I_1 + iD_2 I_2 + \frac{D}{\gamma} I_3 - \alpha \gamma I_4 = 0,$$

$$I_1 = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \frac{\partial A^*}{\partial z} + \frac{\partial E^*}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) dx dt,$$

$$I_2 = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \frac{\partial A^*}{\partial z} - \frac{\partial^2 E^*}{\partial t^2} \frac{\partial A}{\partial z} \right) dx dt,$$

$$I_3 = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left(\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \frac{\partial A^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{E}^*}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial z} \right) dx dt,$$

$$I_4 = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left(|A|^2 A \frac{\partial A^*}{\partial z} + |A|^2 A^* \frac{\partial A}{\partial z} \right) dx dt.$$

В результате интегрирования по частям с граничными условиями (2), (7), (23), (24), интеграл I_1 равен нулю; интеграл I_2 преобразуется к следующему виду:

$$I_2 = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \frac{\partial}{\partial z} \left(A^* \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) dx dt, \quad (31)$$

интеграл I_3 , принимая во внимание релаксационное уравнение (13), можно записать в следующем виде:

$$I_3 = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} + \frac{2i}{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \tilde{E}^* \right) dx dt. \quad (32)$$

Последний интеграл I_4 представляет собой полный дифференциал следующего вида:

$$I_4 = \frac{1}{2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \frac{\partial |A|^4}{\partial z} dx dt. \quad (33)$$

Принимая во внимание соотношения (31)-(33), а также релаксационное уравнение (13), получаем Гамильтониан уравнения (11) в виде (30).

4. Другие инварианты

4.1. Второй инвариант по координате x

Уравнение (11) с граничными условиями (2), (7), (23), (24) обладает вторым инвариантом по поперечной координате:

$$I_{2x}(z) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} E \frac{\partial^2 E^*}{\partial x^2} dx dt = const.$$

4.2. Второй инвариант по координате t . Первый тип

Уравнение (11) с граничными условиями (2), (7), (23), (24) обладает вторым инвариантом по временной координате:

$$I_{2t}(z) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left(|E|^2 + \gamma \operatorname{Im} \left(E \frac{\partial E^*}{\partial t} \right) \right) dx dt = const.$$

4.3. Второй инвариант по координате t . Второй тип

Уравнение (11) с граничными условиями (2), (7), (23), (24) обладает вторым инвариантом по временной координате:

$$I'_{2t}(z) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} \left(E \frac{\partial A^*}{\partial t} - E^* \frac{\partial A}{\partial t} \right) dx dt = const.$$

4.4. Дополнительный закон сохранения

Уравнение (11) с граничными условиями (2), (7), (23), (24) обладает следующим инвариантом:

$$I_{2E}(z) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_t} EA^* dx dt = const.$$

5. Заключение

В работе предложено оригинальное преобразование обобщенного уравнения Шредингера, которое позволяет путем введения новых функций привести его к виду (11)-(13), не содержащему производных от нелинейного отклика среды, а также смешанных производных. Такой вид уравнения позволяет построить инварианты рассматриваемой задачи (энергии, спектральный, а также Гамильтониан, и другие). Эти инварианты зависят не только от интенсивности импульса, но и от его фазы. Преобразованное уравнение имеет более простой дифференциальный оператор, который является более удобным для компьютерного моделирования.

Литература

1. Козлов С.А., Самарцев В.В. Основы фемтосекундной оптики. // М. ФИЗМАТЛИТ, 2009.
2. Hovhannisyan D., Manucharyan S. Modeling of energy redistribution process in a spectrum of laser pulse of a few optical cycles propagating in a fused silica. // *Mic.and Op. Tech.Let.*, 2005, т. 47, №4, с. 359-365.
3. Hile C.V., Kath W.L. Numerical solutions of Maxwell's equations for nonlinear-optical pulse propagation. // *J. Opt. Soc. Am. B*, 1996, т. 13, с. 1135-1145.
4. Inan U.S., Marshall R.A. Numerical Electromagnetics. The FDTD Method. //Cambrige University Press, 2011.
5. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики // М.: ВИНТИ. 1964.
6. Бломберген Н. Нелинейная оптика. // М.: Мир. 1966.
7. Tzoar N., Jain M. Self-phase modulation in long-geometry optical waveguides. // *Phys. Rev. A*, 1981, т. 23, №3, с. 1266-1270.
8. Brabec T., Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime. // *Phys. Rev. Lett*, 1997, т. 78, №17, с. 3282-3285.
9. Brabec T., Krausz F. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. // *Rev. Mod. Phys*, 2000, т. 72, № 2, с. 545-591.
10. Kinsler P., New G.H.C. Few-cycle pulse propagation. // *Phys. Rev. A*, 2003, т. 67, с. 023813.
11. Akozbek N., Scalora M., Bowden C., Chin S. White-light continuum generation and filamentation during the propagation of ultra-short laser pulses in air. // *Opt. Comm.*, 2001, т. 191, с. 353-362.
12. Trushin S., Kosma K. и др. Sub-10-fs supercontinuum radiation generated by filamentation of few-cycle 800 nm pulses in argon. // *Opt. Lett*, 2007, т. 32, №16, с. 2432-2434.
13. Couairon A., Mysyrowicz A. Self-focusing and filamentation of femtosecond pulses in air and condensed matter: simulations and experiments. // Springer New York, 2009, с. 297-322.
14. Jiménez S. Derivation of the discrete conservation laws for a family of finite difference schemes. // *Appl. Math and Comp*, 1994, т. 64, с. 13-45.
15. Kim J., Park Q-Han, Shin H.J. Conservation laws in higher-order nonlinear Schrödinger equations. // *Phys. Rev. E*, 1998, т. 58, №5, с. 6746-6751.
16. Biswas A., Kara A. 1-Soliton solution and conservation laws for nonlinear wave equation in semiconductors. // *Appl. Math. and Comp.*, 2010, т. 217, с. 4289-4292.

17. *Brugnano L., Caccia G., Iavernaro F.* Energy conservation issues in the numerical solution of the semilinear wave equation. // *Appl. Math. and Comp.*, 2015, т. 270, с. 842-870.
18. *Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Трофимов В.А.* Математическое моделирование в нелинейной оптике. // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989, 154 с.
19. *Trofimov V.A.* Invariants of nonlinear propagation of femtosecond pulses. // *Radiophysics and Quantum Electronics*, 1992, т. 35, №6-7, с. 339-401.
20. *Trofimov V.A.* On new approach to modeling the nonlinear propagation of ultrashort laser pulses. // *Comp. Math. and Math. Phys.*, 1998, т. 38, №5, с. 805-809.

Раздел III. Информатика

А.Г. Белов^{*1}

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ПОЛОС СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ПОВТОРНЫХ ОТКЛИКОВ

Введение

В статье рассматриваются различные численные методы построения доверительных полос для среднего значения повторных откликов в линейной множественной нормальной регрессионной модели в зависимости от множества значений предикторов. В случае конечного множества значений предикторов возможно применение метода Бонферрони и его аналогов коррекции уровня доверия. Однако наиболее точные результаты дает метод статистического моделирования, который применен для более общего случая — прямоугольной области изменений предикторов. Проведены численные расчеты и сравнительный анализ совместного доверительного интервала с поточечным аналогом.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную множественную нормальную регрессионную модель наблюдений,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ — вектор-столбец случайных величин (с.в.) y_i откликов, описывающих результаты i -го опыта, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ — вектор-столбец случайных «ошибок» с нормальным законом распределения $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$, не зависящий от вектора параметров $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$; $\mathbf{X} = \|\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}\|^T \in R^{n \times k}$ — регрессионная матрица из вектор-столбцов $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{1j}, \dots, x_{nj})^T$, оказывающих влияние только на среднее значение отклика $E y_i$, при этом $\mathbf{I}_n = \text{diag}(1, \dots, 1) \in R^{n \times n}$, $\text{rank} \mathbf{X} = k$, $k \leq n$.

Пусть имеется m повторных наблюдений $\mathbf{y}_m = (y_1, \dots, y_m)^T$, соответствующих фиксированным значениям регрессоров $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^T$, $y_i = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_j$, $1 \leq j \leq m$, где вектор-столбец случайных «ошибок»

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 14-07-00912-а;

¹ Факультет ВМК МГУ, ст. науч. сотр., к.ф.-м.н., e-mail: ba511@bk.ru;

$\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^T$ не зависит от $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_m \sim N_m(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_m)$, а $\boldsymbol{\varepsilon}_{m0} \sim N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$ для $\boldsymbol{\varepsilon}_{m0} = \boldsymbol{\varepsilon}_m / \sigma$.

Для среднего значения повторных откликов $\bar{y}_m = \frac{1}{m} \mathbf{e}_m^T \mathbf{y}_m = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{m} \sigma \mathbf{e}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_{m0}$, где $\mathbf{e}_m = (1, \dots, 1)^T \in R^m$ для вектора заданных значений регрессоров \mathbf{x} используется $100(1-\alpha)\%$ -й доверительный поточечный интервал (ПДИ) [1, 2]

$$\left(\hat{y} \mp t_{1-\alpha/2, n-k} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, $\hat{y} = \mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}$ — оценка отклика y для \mathbf{x} , $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \boldsymbol{\beta} + \sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0$ — оценка вектора параметров $\boldsymbol{\beta}$, найденная по выборке y с помощью метода наименьших квадратов (МНК), $\hat{\sigma}^2 = S(\hat{\boldsymbol{\beta}})/(n-k)$ — оценка σ^2 , $t_{1-\alpha/2, n-k}$ есть $100(1-\alpha/2)\%$ -й квантиль распределения Стьюдента $St(n-k)$, такая что

$$1-\alpha = P\left\{ |t_{n-k}| < t_{1-\alpha/2, n-k} \right\}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$S(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon} / \sigma, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n).$$

Из (1) следуют известные $100(1-\alpha)\%$ -е доверительные поточечные интервалы [3, с.132,134] для регрессии $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$ (при $m \rightarrow \infty$) и индивидуального $y = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_1$ (при $m=1$) значения отклика для вектора заданных значений регрессоров \mathbf{x} , соответственно:

$$\left(\hat{y} \mp t_{1-\alpha/2, n-k} \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \right), \left(\hat{y} \mp t_{1-\alpha/2, n-k} \hat{\sigma} \sqrt{1 + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \right), \quad (2)$$

где $\varepsilon_1 \sim N_1(0, \sigma^2)$ и не зависит от $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Таким образом, для всех трех поточечных доверительных интервалов имеет место единая критическая константа $c = t_{1-\alpha/2, n-k}$, которая определяет доверительный уровень $1-\alpha$.

Цель статьи заключается в построении совместной доверительной полосы (СДП) среднего повторных откликов вида

$$\left(\hat{y} \mp c \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \right) \forall \mathbf{x} \in M, \quad (3)$$

а, следовательно, и для СДП регрессии и индивидуального значения отклика соответственно:

$$\left(\hat{y} \mp c \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \right), \left(\hat{y} \mp c \hat{\sigma} \sqrt{1 + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}} \right) \forall \mathbf{x} \in M, \quad (4)$$

где M есть некоторое множество значений регрессоров

$$M = \left\{ (x_1, \dots, x_k)^T : x_i \in M_i, i = 1, \dots, k \right\}.$$

Основная задача состоит в определении критической константы c , определяемой как $P\{T < c\}$, такой, чтобы доверительная полоса (3), а, значит, и (4), имели уровень $1 - \alpha$, где

$$T = \sup_{x_i \in M_i, i=1, \dots, k} \frac{|\hat{y} - \bar{y}_m|}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}}} = \sup_{x_i \in M_i, i=1, \dots, k} \frac{\left| \mathbf{x}^T (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_{m0} \right|}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}}}. \quad (5)$$

Методы коррекции

Рассмотрим случай конечного множества значений предикторов $\mathbf{x}_r, r = 1, \dots, N$. Для этого случая наиболее часто применяют метод коррекции Бонферрони (Bonferroni) [4], названного в честь итальянского статистика Карло Бонферрони (1892-1960), или любой из его аналогов. В настоящее время нет единого лучшего среди всех методов коррекции, однако простота их реализации позволяет им иметь широкое применение в ряде областей естествознания, например, в клинической и экспериментальной оптометрии [5]. Поэтому отдельно остановимся на их описании.

Пусть имеют место ПДИ (1) с уровнем доверия $1 - \alpha_r$, т.е. $1 - \alpha_r = P\{\bar{y}_r \in D_r\}$, $r = 1, \dots, N$. Тогда справедливы следующие Булевы неравенства:

$$P\left\{ \bigcap_{r=1}^N (\bar{y}_r \in D_r) \right\} = 1 - P\left\{ \left(\bigcap_{r=1}^N (\bar{y}_r \in D_r) \right)^c \right\} =$$

$$1 - P\left\{ \bigcup_{r=1}^N (\bar{y}_r \in D_r)^c \right\} \geq 1 - \sum_{r=1}^N P\{(\bar{y}_r \in D_r)^c\} = 1 - \sum_{r=1}^N \alpha_r,$$

где $(.)^c$ — операция дополнения. Таким образом, если выбрать $\alpha_r = \alpha/N, r = 1, \dots, N$ и построить N ПДИ с индивидуальным уровнем покрытия $1 - \alpha_r$, то получим СДП с уровнем не менее $1 - \alpha$, т.е.

$$P\left\{ \bigcap_{r=1}^N (\bar{y}_r \in D_r) \right\} \geq 1 - \alpha.$$

Пример 1. Для иллюстрации рассчитаем кривые СДП методом Бонферрони для простой регрессии на основе ПДИ для модельных данных. Для этого выберем $l = 10$ натуральных значений регрессора $x = 1, \dots, l$ линейной $f(x) = 0.5x + 2$ зависимости. Затем для каждого из

$f(x_i), i=1, \dots, l$, независимо моделируем $q=20$ случайных значений y_{ij} путем аддитивного внесения в $f(x_i)$ случайной нормально распределенной ошибки $\varepsilon \sim N_1(0,4)$ с дисперсией $\sigma^2 = 4$. В результате получим облако из $n=lq$ значений $y_{ij} = f(x_i) + \varepsilon_{ij}, i=1, \dots, l, j=1, \dots, q$, изображенных в виде кружков на рис.1. При этом каждому x_i соответствует q повторяющихся наблюдений. На рис.1 изображены функция $f(x)$ (сплошная линия), 95%-е СДП (линия 4) и ПДИ (линия 3) среднего значения повторных откликов для случая $m=q$, а также 95%-е границы для регрессии (линия 1) и отдельных наблюдений (линия 2). Хорошо видно, что, как и предполагалось, СДП располагаются несколько выше ПДИ и равномерны для всех значений регрессоров.

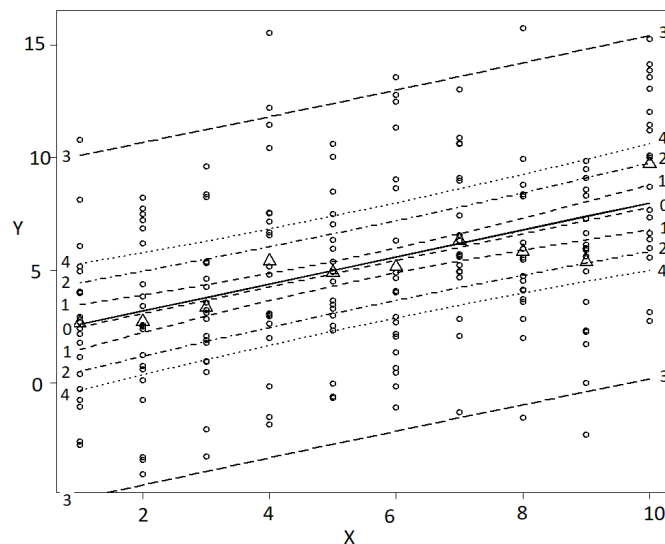


Рис.1. Функция $f(x)$ (сплошная линия), 95%-е СДП (линии 4), ПДИ среднего (треугольники) повторных наблюдений (линии 3), регрессии (линии 1), отдельных наблюдений (линии 2) для $x=1, \dots, 10, n=200, q=20$

Альтернативной процедурой для метода Бонферрони является коррекция достигаемых p -значений $p_r, r=1, \dots, N$, t -статистик [1,2], соответствующих N ПДИ по формуле $\tilde{p}_{(r)} = \min(1, Np_r)$. Как известно, [6] при увеличении N в результате применения метода Бонферрони групповая вероятность отклонить хотя бы одну истинную гипотезу (ПДИ покрывает среднее) в группе растет и может превысить α . Шансы отклонить неверные гипотезы (ПДИ не покрывает среднее) падают, т.е. статистическая мощность метода резко уменьшается. Из-за описанного факта применение данного метода не рекомендуется при больших N . Легкой модификацией Бонферрони является метод Шидака (Sidak) [7],

основанный на справедливости неравенства $\alpha/N \leq 1 - (1 - \alpha)^{1/N}$ при $N \geq 1$. Для этого метода полагают $\alpha_r = 1 - (1 - \alpha)^{1/N}$, $r = 1, \dots, N$. Оба метода дают близкие результаты. Более эффективным в ряде случаев является метод Холма (Holm) [8], для которого $\alpha_r = \alpha / (N - r + 1)$, $r = 1, \dots, N$ и их модифицированными альтернативными p -значениями $\tilde{p}_{(r)} = \min\left(1, \max\left((N - r + 1)p_{(r)}, \tilde{p}_{(r-1)}\right)\right)$, где $p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(N)}$ — упорядоченные достигаемые p -значения t -статистик соответствующих ПДИ. Основным его преимуществом является решение проблемы падения мощности при росте числа ПДИ N . При любом характере зависимости между p -значениями t -статистик ПДИ метод Холма обеспечивает получить СДП с уровнем покрытия не менее $1 - \alpha$. С методом Холма схожи процедуры Бенджамина-Хохберга (Benjamini-Hochberg) [9] и Бенджамина-Иекутиели (Benjamini-Yekateuli) [10]: первая из них имеет уровни значимости $\alpha_r = \alpha r / N$, $r = 1, \dots, N$ и модифицированные альтернативные p -значения $\tilde{p}_{(r)} = \min\left(1, \max\left(Np_{(r)} / r, \tilde{p}_{(r-1)}\right)\right)$; вторая имеет уровни значимости $\alpha_r = \alpha r / (Nd)$, $r = 1, \dots, N$ и модифицированные альтернативные p -значения $\tilde{p}_{(r)} = \min\left(1, \max\left(Np_{(r)}d / r, \tilde{p}_{(r-1)}\right)\right)$, где $d = \sum_{i=1}^N 1/i$.

Метод Бонферрони и его аналоги не обладают высокой точностью построения СДП. Поэтому рассмотрим более точный метод статистического моделирования для прямоугольной области значений предикторов $M = \{(x_1, \dots, x_k)^T : x_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, k\}$, включающего случай конечного множества значений предикторов.

Метод моделирования

Поскольку искомая критическая константа c определяет доверительные полосы (3), (4), то достаточно уметь рассчитывать ее для какой-нибудь из полос, в частности, для регрессии $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}$. В этом случае константа c определяется как $P\{T < c\}$, где из (5) имеем

$$T = \sup_{x_i \in [a_i, b_i], i=1, \dots, k} \frac{|\mathbf{x}^T (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})|}{\hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}}}. \quad (6)$$

Для решения последней оптимизационной задачи существует множество похожих подходов [11]. Представим величину T в виде

$$T = Q \frac{\|\mathbf{Z}\|}{(\hat{\sigma}/\sigma)}, \quad Q = \sup_{x_i \in [a_i, b_i], i=1, \dots, k} \frac{|(\mathbf{P}\mathbf{x})^T \mathbf{Z}|}{\|\mathbf{P}\mathbf{x}\| \|\mathbf{Z}\|}, \quad (7)$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) \in R^{k \times k}, \quad \mathbf{Z} = (\mathbf{P}^T)^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) / \sigma \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k).$$

Поскольку получить формулу для распределения T сложно, то необходимо проводить ее моделирование посредством генерации с.в. \mathbf{Z} и с.в. $\hat{\sigma}/\sigma \sim \sqrt{\chi_{n-k}^2/(n-k)}$ с дальнейшей подстановкой в (7). Основная трудность расчета T заключается в вычислении Q . Величина Q может быть получена посредством решения задачи

$$Q = \sup_{\mathbf{s} \in \Omega} \frac{|\mathbf{s}^T \mathbf{Z}|}{\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{Z}\|}, \quad (8)$$

где $\Omega = \{\mathbf{s} : \mathbf{s} = \gamma \mathbf{v}, \mathbf{v} \in L, \gamma > 0\}$, $L = \{\mathbf{P}\mathbf{x} : x_i \in [a_i, b_i], i=1, \dots, k\}$. Нетрудно заметить, что $\mathbf{s}^T \mathbf{Z} / (\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{Z}\|)$ есть косинус угла между \mathbf{s} и \mathbf{Z} . Поэтому, если $\hat{\mathbf{s}} \in \Omega$ есть решение (8), то оно также является решением

$$\inf_{\mathbf{s} \in \Omega} \|\mathbf{s} - \mathbf{Z}\|^2.$$

Для решения этой задачи квадратичного программирования ниже будет использован «active set»-алгоритм, подробно описанный в [11], как наиболее эффективный и сходящийся за конечное число шагов.

Таким образом, критическая константа c может определяться следующим путем. Моделируется достаточно большое число M значений T_i с.в. T . Тогда $(1-\alpha)M$ -е наибольшее значение \hat{c} из сгенерированного вариационного ряда считается оценкой c . Такой подход основан на том факте, что выборочная $100(1-\alpha)$ -я перцентиль \hat{c} сходится почти наверное к теоретической $100(1-\alpha)$ -й перцентили c при $M \rightarrow \infty$. При этом, учитывая асимптотическую нормальность \hat{c} со средней c и стандартной ошибкой $s = \sqrt{\alpha(1-\alpha)/(g^2(c)M)}$, может быть рассчитана стандартная ошибка оценки \hat{c} , где h — параметр сглаживания (в вычислениях ниже $h=0,01$), $g(c)$ — функция плотности распределения с.в. T , которая может быть оценена как

$$g(\hat{c}) \approx \frac{1}{Mh\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^M \exp \left\{ - \left(\frac{\hat{c} - T_i}{4h} \right)^2 \right\}.$$

Пример 2. Проиллюстрируем метод статистического моделирования на данных примера 1. На *рис.2* изображены функция

регрессии (линия 1), 95% -е доверительная полоса регрессии (линии 2), 95% -е СДП среднего значения повторных откликов для случая $m = q$ (линии 3), а также 95% -е доверительная полоса отдельных наблюдений для случая $m = 1$ (линии 4). При моделировании T было использовано до 30000 генераций, при этом вычислялась критическая величина \hat{c} и ее стандартная ошибка $s(\hat{c})$. В табл.1 представлены промежуточные результаты расчетов.

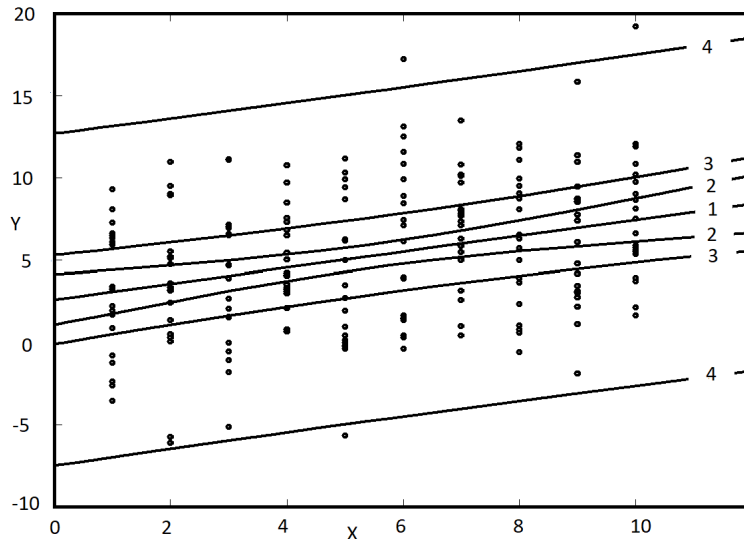


Рис.2. Доверительные полосы: функция регрессии (линия 1); 95% -е доверительная полоса регрессии (линии 2); 95% -е совместные границы среднего значения повторных откликов ($m = q$, линии 3); 95% -е доверительная полоса отдельных наблюдений ($m = 1$, линии 4) для $x = 1, \dots, 10$, $n = 200$, $q = 20$

Таблица 1. Данные моделирования

n	Число генераций	\hat{c}	$s(\hat{c})$
1	6840	2,3943	0,0276
2	9120	2,4031	0,0222
3	11400	2,4031	0,0205
4	13680	2,4042	0,0177
5	15960	2,4073	0,0163
6	18240	2,4072	0,0140
...
10	27360	2,4172	0,0116
11	29640	2,4144	0,0115
12	30000	2,4155	0,0114

Сравнивая $c = t_{1-\alpha/2, n-k} = t_{0.975, 198} = 1,972$ с вычисленной при $M = 30000$ величиной $\hat{c} = 2,4155$ (см. табл.1), можно сделать вывод, что ширина ПДИ (1) будет меньше соответствующих смоделированных совместных полос. Однако последние полосы более узки, чем СДП, полученные менее точным методом коррекции Бонферрони [4] (для данного примера $\hat{c} = t_{1-\alpha/2l, n-k} = t_{0.9975, 198} = 2,839$).

Пример 3. Для двухфакторной модели $k = 2$ рассмотрим выборку $n = 35$ цен на шестиядерные процессоры серии Phenom 2 фирмы AMD, различающиеся рабочей частотой и тепловыделением (см. табл. 2). Данные получены из интернет-ресурса <http://market.yandex.ru>.

Таблица 2. Данные по процессорам AMD

n	Частота, МГц	Тепло, Вт	Цена, руб	n	Частота, МГц	Тепло, Вт	Цена, руб
1	2900	95	5164	19	2600	95	5022
2	2900	95	5198	20	2600	95	5687
3	2900	95	5523	21	3250	125	6311
4	2900	95	5785	22	3250	125	6668
5	2900	95	6370	23	3250	125	6886
6	2900	95	4710	24	3250	125	6992
7	2800	95	4800	25	3250	125	7242
8	2800	95	5275	26	3000	125	5732
9	2800	95	5501	27	3000	125	5786
10	2800	95	5580	28	3000	125	5809
11	2700	95	4663	29	3000	125	5870
12	2700	95	4690	30	3000	125	5920
13	2700	95	4804	31	2800	125	4636
14	2700	95	4857	32	2800	125	4740
15	2700	95	4890	33	2800	125	4772
16	2600	95	4611	34	2800	125	4969
17	2600	95	4719	35	2800	125	5200
18	2600	95	4860				

Для этих данных проведены расчеты доверительных полос для среднего значения повторных откликов ($m = 5$) и наблюдения ($m = 1$), которые представлены на рис.3. Для числа генераций $M = 30000$ имеем $\hat{c} = 2,9093$, $s(\hat{c}) = 0,0137$.

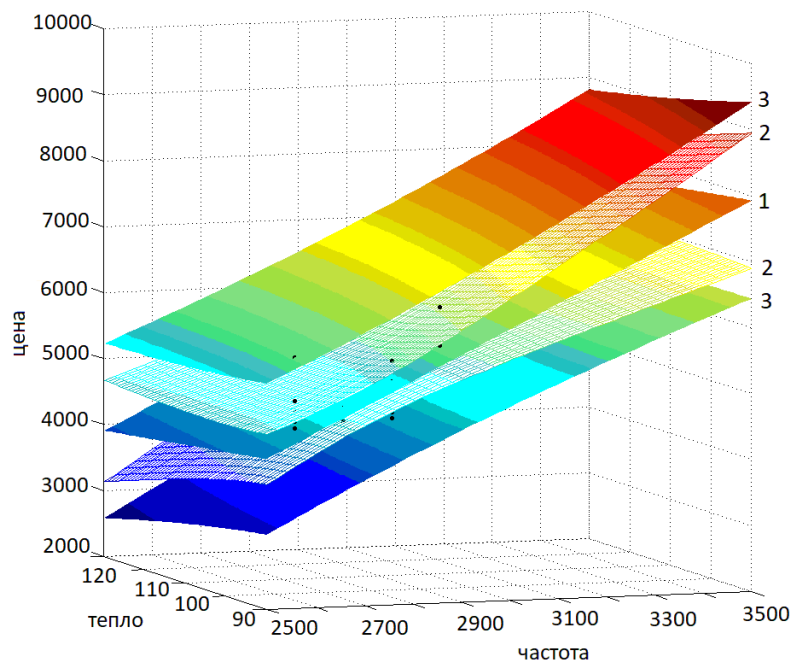


Рис.3. Совместные доверительные границы: оценка регрессии (плоскость 1); 95% -я доверительная полоса для среднего значения для повторных откликов ($m=5$, плоскости 2) и отдельного наблюдения ($m=1$, плоскости 3)

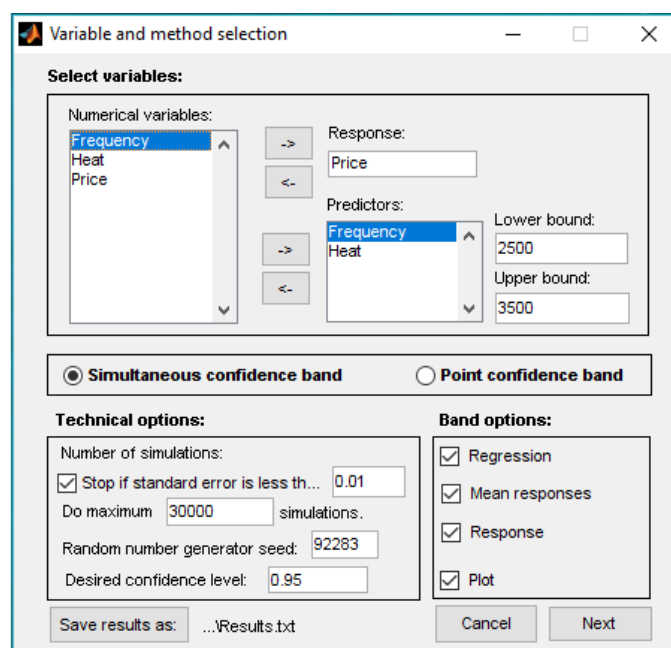


Рис.4. Окно интерфейса программы SSB

Представленные выше расчеты выполнены с помощью авторской программы SSB (Simulation Simultaneous Bands), написанной в среде MatLab версии 7.0.5. Программа включает в себя интерфейс для импорта данных и задания желаемых параметров моделирования (см. рис.4).

Результаты вычислений записываются в отдельный файл и могут быть представлены графически для моделей с одним или двумя предикторами.

Заключение

Таким образом, в работе описаны различные численные методы расчета совместной доверительной полосы для среднего значения повторных откликов в линейной множественной нормальной регрессии с дискретной и прямоугольной областью для предикторов. С помощью созданного программного комплекса проведено численное моделирование критического значения с вычислением доверительных полос для среднего значения повторных откликов, регрессии и наблюдения. Выполнен сравнительный анализ рассчитанных полос.

Литература

1. Белов А.Г. Доверительное прогнозирование среднего значения повторных наблюдений // Вестник Моск. ун-та, Сер.15, Вычислительная математика и кибернетика, 2016. №2. С.14-19.
2. Belov A.G. Confidence prediction of the mean value of multiple observations // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2016. 36, №2. P.65-70.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
4. Bonferroni C.E. Il calcolo delle assi curazioni su gruppi di test // in Studi Onore del Professore Salvatore Ortu Carboni. Rome, Italy, 1935. P.13-60.
5. Armstrong R.A. When to use the Bonferroni correction // Ophthalmic Physiol Opt, 2014. 34. P.502-508.
6. Abdi H. Bonferroni and Sidak corrections for multiple comparisons // Encyclopedia of measurement and statistics. Thousand Oaks, CA: Sage, 2007.
7. Sidak Z. Rectangular confidence region for the means of multivariate normal distributions // Journal of the American Statistical Association. 1967. 62. P.626-633.
8. Holm S. A Simple Sequentially Rejective Bonferroni Test Procedure // Scandinavian Journal of Statistics. 1979. 6, №2. P.65-70.
9. Hochberg Y., Benjamini Y. More powerful procedure for multiple significance testing // Statistics in Medicine. 1990. 9. P.811-818.
10. Yekateuli D., Benjamini Y. Resampling-based false discovery rate controlling multiple test procedure for correlated test statistics // Journal of Statistical Planning and Inference. 1999. 82. P.171-196.
11. Liu W., Jamshidian M., Zhang Y., Donnelly J. Simulation-based simultaneous confidence bands in multiple linear regression with predictor variables constrained in intervals // Journal of Computational and Graphical Statistics. 2005. 14, №2. P.459-484.

В.В. Морозов

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОДАЖИ ЦЕННЫХ БУМАГ*

1. Введение

Лоренц в [1] рассмотрел следующую задачу продажи ценных бумаг на финансовом рынке. Инвестор намеревается продать k бумаг в течение n торгов ($k < n$), происходящих в моменты времени $i = 1, \dots, n$. С целью минимизации влияния этих продаж на стоимость бумаги он сбывает не более одной бумаги в одном торге. В момент i стоимость бумаги является неопределенным фактором $p_i \in [m, M]$, где $0 < m < M$ – предполагаемые нижняя и верхняя границы стоимости. Для оценки результатов продаж используется конкурентное отношение (competitive ratio) суммы k наибольших стоимостей бумаг к сумме, полученной от их продажи. Этот критерий был введен Яо в [2]. Если вместо отношения указанных сумм взять их разность, то получим критерий сожаления Сэвиджа [3]. В этих условиях инвестор должен оптимизировать продажу бумаг.

В разделе 2 даются игровые постановки, в которых инвестор выступает в роли второго (минимизирующего критерий) игрока, а природа, выбирающая стоимости бумаг, является первым (максимизирующим) игроком. Для критерия отношения при $2k \leq n$ игра была решена в [1]. В настоящей работе дается метод ее решения в общем случае. Кроме того, оптимальные стратегии игроков найдены и для критерия сожаления.

2. Постановка задачи

Дадим формулировку многошаговой антагонистической игры. В момент i инвестор выбирает величину $z_i \in \{0, 1\}$, где $z_i = 1$ ($z_i = 0$) означает, что инвестор продает (не продает) бумагу в момент i . На последовательности $z = (z_1, \dots, z_n) \in \{0, 1\}^n$ накладываются следующие ограничения: если при $i > 1$ $z_1 + \dots + z_{i-1} = k - n + i - 1 > 0$, то $z_i = 1$, а если $z_1 + \dots + z_{i-1} = k$, то $z_i = 0$. Другими словами, если к моменту $i > 1$ число непроданных бумаг равно числу оставшихся торгов $n - i + 1$, то инвестор продает бумаги во все оставшиеся моменты $j = i, \dots, n$ независимо от их стоимостей. В противном случае при $z_1 + \dots + z_{i-1} < k$ инвестор имеет возможность выбора продавать бумагу в данный момент или нет.

* Исследование выполнено в рамках госбюджетной темы и частично при финансовой поддержке РФФИ, научный проект № 19-01-00533 а.

Последовательность $h_i = (z_j, p_j, j < i) \in H_i$ назовем предысторией торгов, сложившей к моменту i . Множество предысторий H_i удовлетворяет условиям $z_j \in \{0,1\}, p_j \in [m, M], j < i$, а также указанным выше ограничениям. Инвестор принимает решение о продаже бумаги в зависимости от предыстории h_i и текущей стоимости бумаги p_i . Поэтому стратегия инвестора задается вектором функций $\tilde{z} = (\tilde{z}_i, i = 1, \dots, n)$, где $\tilde{z}_1 : [m, M] \rightarrow \{0,1\}, \tilde{z}_i : H_i \times [m, M] \rightarrow \{0,1\}, i = 2, \dots, n$. Определим так называемые пороговые стратегии. Введем вектор порогов

$$y = (y_1, \dots, y_k) \in Y = \{y \mid m \leq y_1 \leq \dots \leq y_k \leq M\}.$$

Вектор y определяет пороговую стратегию инвестора следующим образом: если к моменту i были проданы $l \in [0, k)$ бумаг и инвестор имеет возможность выбора $z_i \in \{0,1\}$, то он продает бумагу только в случае выполнения неравенства $p_i \geq y_{l+1}$. Таким образом, векторы p и y однозначно определяют вектор z . В дальнейшем основную роль играют пороговые стратегии инвестора, которые будем отождествлять с векторами $y \in Y$.

Природа выбирает вектор $p = (p_1, \dots, p_n) \in P = [m, M]^n$. Она использует стратегию в виде вектора функций $\tilde{p} = (p_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$, где $p_1 \in [m, M]$, а $\tilde{p}_i : H_i \rightarrow [m, M], i = 2, \dots, n$. Обратимся к функции выигрыша природы. Определим функции: $O(p)$ – сумма k наибольших компонент вектора p и $F(p, y)$ – сумма от продаж, полученная инвестором при использовании пороговой стратегии y . Выигрыш природы зададим конкурентным отношением $R_1(p, y) = O(p) / F(p, y) \geq 1$, которое можно рассматривать как меру неудовлетворенности инвестора результатом продаж. Другим вариантом выигрыша природы является разность $R_2(p, y) = O(p) - F(p, y)$ – критерий сожаления инвестора по Сэвиджу. Итак, определили две антагонистические игры $G_i = \langle P, Y, R_i(p, y) \rangle, i = 1, 2$.

3. Решение игр G_1 и G_2

Вначале займемся решением игры G_1 .

Лемма 1. *Зафиксируем пороговую стратегию инвестора y в игре G_1 . Пусть к моменту i он сделал $l \in [0, k)$ продаж и не обязан продавать. Тогда наихудшая для него цена равна либо $p_i = y_{l+1}$, либо $p_i = y_{l+1} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и мало. Если к моменту i инвестор обязан продавать, то наихудшая для него цена равна $p_i = m$. Если к моменту i он сделал все k продаж, то наихудшая цена равна $p_i = M$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть природа выбирает $p_i > y_{l+1}$, т.е. вынуждает инвестора продавать. Тогда после завер-

шения торгов величину $F(p, y)$ можно записать в виде $F(p, y) = p_i + a$, где a – сумма, вырученная инвестором за вычетом p_i . Если величина p_i не входит в число k наибольших стоимостей, то она не содержится в сумме $O(p)$ и для увеличения отношения $R_1(p, y)$ ее следует уменьшить до y_{l+1} . Противном случае сумма $O(p)$ представима в виде $O(p) = p_i + b$, где $b \geq a$. В этом случае отношение $R_1(p, y) = (p_i + b)/(p_i + a)$ не возрастает по p_i и стоимость p_i вновь следует уменьшить.

Если $p_i < y_{l+1}$, то инвестор не продает бумагу и p_i не входит в сумму $F(p, y)$. Поэтому для увеличения отношения $R_1(p, y)$ природа должна выбрать p_i сколь угодно близким к y_{l+1} . Остальные утверждения леммы доказываются аналогично. ■

Из леммы 1 следует, что

$$\sup_{p \in P} R_1(p, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \max_{i=0,1,\dots,k} R_1(p^{(i)}(y, \varepsilon), y) = \max_{i=0,1,\dots,k} R_1(p^{(i)}(y, 0), y),$$

где

$$p^{(j)}(y, \varepsilon) = (y_1, \dots, y_j, \underbrace{y_{j+1} - \varepsilon, \dots, y_{j+1} - \varepsilon}_{n-k}, \underbrace{m, \dots, m}_{k-j}), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

$$p^{(k)}(y) = (y_1, \dots, y_k, \underbrace{M, \dots, M}_{n-k}).$$

Используя вектор стоимостей $p^{(i)}(y, \varepsilon)$, природа сначала позволяет инвестору сделать i продаж по ценам $y_j, j = 1, \dots, i$, а затем вынуждает его продавать оставшиеся $k-i$ бумаг по минимальным ценам в конце торгов. Рассмотрим систему уравнений относительно переменных y_1, \dots, y_k, v

$$R_1(p^{(0)}(y, 0), y) = R_1(p^{(1)}(y, 0), y) = \dots = R_1(p^{(k)}(y), y) = v. \quad (1)$$

Лемма 2. Система уравнений (1) имеет единственное решение y_1^*, \dots, y_k^*, v^* , для которого $y_1^* < \dots < y_k^*$ и $v^* > 1$.

Доказательство. При $2k \leq n$ система (1) приобретает вид (см. [1])

$$\frac{ky_{j+1}}{y_1 + \dots + y_j + (k-j)m} = v, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad \frac{kM}{y_1 + \dots + y_k} = v. \quad (2)$$

В [1] показано, что система (2) имеет решение

$$y_i^* = m \left(1 + (v^* - 1) \left(1 + \frac{v^*}{k} \right)^{i-1} \right), \quad i = 1, \dots, k,$$

где v^* – единственный корень уравнения $m \left(1 + (v-1) \left(1 + v/k \right)^k \right) = M$.

В частности, при $k=1$ имеем $v^* = \sqrt{M/m}$, $y_1^* = \sqrt{Mm}$ – результат, полученный Бородиным и Эль-Яневым в [4].

В случае $2k > n$ положим $s = 2k - n$ и систему (1) перепишем в виде

$$\frac{y_1 + \dots + y_j + (n-k)y_{j+1} + (s-j)m}{y_1 + \dots + y_j + (k-j)m} = v, \quad j = 0, 1, \dots, s, \quad (3)$$

$$\frac{y_l + \dots + y_{l+s-1} + (n-k)y_{l+s}}{y_1 + \dots + y_{l+s-1} + (n-k-l+1)m} = v, \quad l = 2, \dots, n-k, \quad (4)$$

$$\frac{y_{n-k+1} + \dots + y_k + (n-k)M}{y_1 + \dots + y_k} = v. \quad (5)$$

Отметим, что в (3) при $j=0$ полагаем $y_1 + \dots + y_0 = 0$, а при $k = n-1$ система (4) отсутствует. Введем обозначение $\beta = (v-1)/(n-k)$. Из системы (3) находим y_j как функции переменной v :

$$y_j = y_j(v) = (k\beta(1+\beta)^{j-1} + 1)m, \quad j = 1, \dots, s+1. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что эти функции возрастающие и $y_j(1) = m, j = 1, \dots, s+1$. Подставим их в систему (4) и выразим последовательно переменные $y_j = y_j(v), j = s+2, \dots, k$, как функции переменной v . Поскольку $v \geq 1$, эти функции также возрастают и $y_j(1) = m, j = s+2, \dots, k$. Подставим полученные функции $y_j(v), j = 1, \dots, k$, в уравнение (5), которое перепишем в виде

$$(n-k)M = (v-1)(y_{n-k+1}(v) + \dots + y_k(v)) + v(y_1(v) + \dots + y_{n-k}(v)). \quad (7)$$

Его правая часть – возрастающая функция, принимающая при $v=1$ значение $(n-k)m < (n-k)M$. Отсюда следует, что уравнение (7) имеет единственное решение $v^* > 1$. По v^* однозначно определяются и величины $y_j^* = y_j(v^*), j = 1, \dots, k$. Осталось доказать их монотонность по j . Неравенства $y_1^* < \dots < y_{s+1}^*$ следуют из вида формул (6). Покажем, что $y_{s+l}^* < y_{s+l+1}^*$ при $l = 1, \dots, n-k-1$. Из системы (4) следуют равенства

$$(n-k)y_{l+s+1}^* = (v^*-1)(y_{l+1}^* + \dots + y_{l+s}^*) + v^*(y_1^* + \dots + y_l^*) + (n-k-l)mv^*,$$

$$(n-k)y_{l+s}^* = (v^*-1)(y_l^* + \dots + y_{l+s-1}^*) + v^*(y_1^* + \dots + y_{l-1}^*) + (n-k-l+1)mv^*.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(n-k)(y_{l+s+1}^* - y_{l+s}^*) = (v^*-1)(y_{l+s}^* - y_l^*) + v^*(y_l^* - m).$$

Теперь доказательство завершается по индукции, поскольку из неравенства $y_{l+s}^* > y_l^*$ следует $y_{l+s+1}^* > y_{l+s}^*$. ■

Отметим, что в доказательстве леммы 1 содержится метод решения системы (1). Он сводится к построению функций $y_j(v), j = 1, \dots, k$, и нахождению корня уравнения (7).

Теорема. В игре G_1 оптимальная стратегия инвестора $y^* = (y_1^*, \dots, y_k^*)$ и значение игры v^* удовлетворяют системе уравнений (1).

Доказательство. Используя пороговую стратегию y^* , инвестор гарантирует, что $R_1(p, y^*) \leq v^*$ при любом $p \in P$. Следуя [1], укажем оптимальную стратегию природы \tilde{p}^* . В момент $i=1$ природа устанавливает стоимость бумаги $p_1^* = y_1^*$. Если инвестор продает бумагу, то в следующий момент природа выбирает стоимость $p_2^* = y_2^*$. В противном случае она повторяет выбор $p_2^* = y_1^*, p_3^* = y_1^*, \dots$ до тех пор, пока инвестор в некоторый момент j не продаст бумагу. Затем природа устанавливает стоимость $p_{j+1}^* = y_2^*$ и т.д. Если инвестор вынужден продавать, то природа устанавливает минимальную стоимость бумаги m , а после окончания продаж – максимальную стоимость M . Пусть природа применяет стратегию \tilde{p}^* , а инвестор – произвольную стратегию \tilde{z} . Тогда сумма, вырученная инвестором от продажи бумаг, равна одному из следующих значений $y_1^* + \dots + y_j^* + (k-j)m, j \in \{0, \dots, k\}$. При этом $O(p^*)$ не меньше соответствующей величины $O(p^{(j)}(y^*, 0))$. Отсюда следует неравенство $R_1(\tilde{p}^*, \tilde{z}) \geq R_1(p^*, y^*) = v^*$. Тем самым доказано, что \tilde{p}^* и y^* – оптимальные стратегии игроков, а v^* – значение игры G_1 (определение решения антагонистической игры см., например, в [5]). ■

Аналогичный метод решения справедлив и для игры G_2 . При этом в системах (2) и (3)–(5) дроби следует заменить на разности и получить линейные системы. При $2k \leq n$ получаем систему

$$ky_{j+1} - (y_1 + \dots + y_j) - (k-j)m = v, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad kM - (y_1 + \dots + y_j) = v,$$

из которой находим оптимальные пороги для инвестора и значение игры

$$y_i^* = m + (M - m) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{i-k-1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad v^* = k(M - m) \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}.$$

В частности, при $k=1$ $v^* = (M - m) / 2, y_1^* = (M + m) / 2$.

Если $2k > n$, то получаем систему

$$\begin{aligned} (n-k)y_j - (n-k)m &= v, \quad j = 1, \dots, s+1, \\ (n-k)y_{l+s} - (y_1 + \dots + y_{l-1}) - (n-k-l+1)m &= v, \quad l = 2, \dots, n-k, \\ (n-k)M - (y_1 + \dots + y_{n-k}) &= v. \end{aligned}$$

Отсюда из первой группы уравнений получим

$$y_i = m + \frac{v}{n-k}, \quad i = 1, \dots, s+1.$$

Затем из второй группы уравнений выражаем $y_i = y_i(v), i = s+2, \dots, k$, как функции переменной v . Из последнего уравнения находим значение игры v^* , а потом и оптимальные пороги $y_i^* = y_i(v^*), i = 1, \dots, k$.

Замечание. Если бы инвестор максимизировал сумму $F(p, y)$, полученную от продаж, то значение игры равнялось kt и любая его стратегия была бы оптимальной. Следовательно, критерий $F(p, y)$ бесполезен и его необходимо сменить, что соответствует подходу Ю.Б. Гермейера к формированию модели операции [6].

4. Примеры

Пусть $n = 10$, $m = 70$, $M = 100$. Будем изменять k от 1 до 9. Значения игры G_1 в зависимости от k равны (указаны два знака после запятой):

$$v(1) = 1.2, v(2) = 1.17, v(3) = 1.16, v(4) = 1.15, \\ v(4) = 1.15, v(5) = 1.15, v(6) = 1.12, v(7) = 1.08, v(8) = 1.05, v(9) = 1.02.$$

Таблица 1. Оптимальные пороги для инвестора в игре G_1 .

	y_1^*	y_2^*	y_3^*	y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_8^*	y_9^*
$k = 1$	83.67								
$k = 2$	81.94	88.92							
$k = 3$	81.25	85.6	91.63						
$k = 4$	80.87	84.01	88.06	93.28					
$k = 5$	80.64	83.09	86.11	89.82	94.38				
$k = 6$	82.75	83.14	83.54	87.13	90.93	94.96			
$k = 7$	83.23	83.63	84.	84.38	84.77	89.6	94.67		
$k = 8$	83.44	83.76	84.1	84.43	84.77	85.13	85.49	92.58	
$k = 9$	83.57	83.86	84.16	84.46	84.77	85.01	85.42	85.75	86.09

Значения игры G_2 в зависимости от k равны:

$$v(1) = 15, v(2) = 26.67, v(3) = 37.97, v(4) = 49.15, \\ v(5) = 60.28, v(6) = 58.18, v(7) = 45, v(8) = 30, v(9) = 15.$$

Таблица 2. Оптимальные пороги для инвестора в игре G_2 .

	y_1^*	y_2^*	y_3^*	y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_8^*	y_9^*
$k = 1$	85.								
$k = 2$	83.33	90.							
$k = 3$	82.67	86.87	92.5						
$k = 4$	82.28	85.36	89.2	94.					
$k = 5$	82.06	84.47	87.36	90.83	95.				
$k = 6$	84.54	84.54	84.54	88.18	91.82	95.45			
$k = 7$	85.	85.	85.	85.	85.	90.	95.		
$k = 8$	85.	85.	85.	85.	85.	85.	85.	92.5	
$k = 9$	85.	85.	85.	85.	85.	85.	85.	85.	85.

Литература

1. *Lorenz J.M.* Optimal trading algorithms: portfolio transactions, multiperiod portfolio selection, and competitive online search. Phd-thesis. Technische Universität München. 2008.
2. *Yao A.* New algorithms for bin packing // *Journal of the Association for Computing Machinery*. 1980. V. 27. № 2. P. 207–227.
3. *Savage L.J.* The foundations of statistics. N.Y.: Dover Publications, 1972.
4. *Borodin A., El-Yaniv R.* Online computation and competitive analysis. N.Y.: Cambridge University Press, 1998.
5. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2008.
6. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

В.Д. Козлов, А.И. Майсурадзе

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛОГНОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*

Введение

Задача восстановления распределения по конечной выборке наблюдений является одной из генеральных задач статистики и вообще анализа данных. Для её решения уже существует множество методов, считающихся стандартными. Однако в практической деятельности в разных предметных областях возникают задачи, для решения которых стандартные методы оказываются плохо применимы. И тогда приходится разрабатывать новые предметно-ориентированные методы восстановления распределения.

В работе [1] такая предметно-ориентированная задача восстановления плотности распределения возникает при построении модели задержек при пересылке данных на вычислительном кластере, в частности суперкомпьютере, от одного узла к другому. Ранее подобные исследования проводились в локальных сетях и сети Интернет [2–4]. Все эти исследования показывают, что величины задержек хорошо описываются трёхпараметрическим гамма-распределением или трёхпараметрическим логнормальным распределением. Специфика задачи обусловлена тем, что в коммуникационной среде различных суперкомпьютеров наблюдаются следующие особенности [1]:

1. распределение является многомодальным;
2. распределение имеет тонкую многомодальную структуру, т. е. большой пик плотности на самом деле состоит из множества мелких пиков;
3. в данных очень много повторов и мало различных уникальных значений;
4. наблюдается достаточно много задержек максимальной величины, что может говорить о тяжёлом хвосте распределения.

Из-за вышеперечисленных особенностей моделирование задержек передачи информации в коммуникационной среде суперкомпьютера представляет собой нетривиальную задачу, требующую аккуратной постановки и по-

*Исследование выполнено при финансовой поддержке МГУ (НИР 5.1.16) и РФФИ (проект 17-01-00917).

иска новых специализированных методов. Эта задача может быть формализована как задача разделения конечной смеси трёхпараметрических логнормальных распределений [1]. Однако проблемы возникают даже при параметрическом восстановлении одного компонента такой смеси. Соответственно, данная работа посвящена анализу и сравнению различных методов оценки параметров трёхпараметрического логнормального распределения по конечной выборке.

Работа организована следующим образом: сначала даются базовые обозначения и определения, в следующих разделах даются методы максимального правдоподобия, моментов и минимального расстояния применительно к рассматриваемой задаче оценки параметров трёхпараметрического логнормального распределения, затем приводится описание данных, использованных для тестирования методов, производится сравнение методов оптимизации функционалов расстояния между распределениями, затем проводится сравнение различных методов оценки параметров, и наконец «Заключение» завершает статью.

Основные определения и обозначения

Трёхпараметрическое логнормальное распределение (3LN распределение, 3LND)— это абсолютно непрерывное одномерное распределение с функцией плотности

$$p(x; \gamma, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(x-\gamma)}} \exp\left(-\frac{(\ln(x-\gamma)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & , x \geq \gamma, \\ 0 & , x < \gamma. \end{cases} \quad (1)$$

Случайная величина X имеет 3LN распределение с параметрами γ , μ и σ , если случайная величина $\ln(X - \gamma)$ распределена нормально с параметрами μ и σ [7], поэтому её функция распределения может быть записана в виде $F(x; \gamma, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right)$ при $x > \gamma$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона. Основные числовые характеристики 3LN распределения указаны в таб. 1, они понадобятся ниже.

Момент	Формула
Математическое ожидание \mathbb{E}	$\gamma + \beta\sqrt{\omega}$
Дисперсия \mathbb{V}	$\beta^2\omega(\omega - 1)$
Коэффициент асимметрии α_3	$\sqrt{\omega - 1}(\omega + 2)$
Коэффициент эксцесса α_4	$\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - 6$

Таблица 1. Основные числовые характеристики 3LN распределения с параметрами γ , μ , σ [9]. $\beta = \exp(\mu)$, $\omega = \exp(\sigma^2) \geq 1$

Ниже в работе будут использоваться следующие обозначения:

- $F(\cdot; \theta)$ — вероятностное распределение с набором параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$; для 3LND положим $\theta = (\gamma, \mu, \sigma)$, $\theta_1 = \gamma$, $\theta_2 = \mu$, $\theta_3 = \sigma$;
- $X \sim F(\cdot)$ — случайная величина X , имеющая распределение $F(\cdot)$;
- $X^n = \{X_1, \dots, X_n\}$ — выборка из n независимых одинаково распределённых случайных величин; $X_{(k,n)}$ — k -ая порядковая статистика X^n ;
- $x^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ — наблюдаемая выборка, $x_{(k)}$ — k -ый член её вариационного ряда;
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция распределения стандартного нормального закона, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ — функция ошибок;
- $\overline{1, k}$ — множество целых чисел от 1 до k включительно.

Метод максимального правдоподобия

Наиболее популярным подходом к оценке параметров распределения является метод максимального правдоподобия. В качестве меры соответствия распределения $F(\cdot; \theta)$ наблюдаемым данным x^n используется функция правдоподобия $L(\theta)$, равная $p(x_1, \dots, x_n; \theta)$ — совместной плотности вероятности объектов выборки. Полагается, что чем больше правдоподобие, тем лучше модель описывает данные [5].

Для 3LND логарифм функции правдоподобия записывается как

$$\ln L(\theta) = -n \ln \sigma \sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \gamma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\ln(x_i - \gamma) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad (2)$$

причём выражение имеет смысл только при $\gamma < x_{(1)}$. Необходимые условия экстремума для (2):

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \gamma} \left(1 + \frac{\ln(x_i - \gamma) - \mu}{\sigma^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i - \gamma) - \mu}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left(-1 + \frac{(\ln(x_i - \gamma) - \mu)^2}{\sigma^2} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Метод максимального правдоподобия с успехом применяется для решения многих задач оценки параметров. Однако его применение для оценки параметров 3LND проблематично. Показано [10], что для любой выборки x^n функция правдоподобия $L(\theta)$ не ограничена, а именно существуют траектории в трёхмерном пространстве параметров (γ, μ, σ) , сходящиеся к $(x_{(1)}, -\infty, +\infty)$, при движении вдоль которых $L(\theta)$ сходится к $+\infty$, при том что в самой точке $(x_{(1)}, -\infty, +\infty)$ функция правдоподобия равна 0. Однако утверждается [10], что, несмотря на общую неограниченность функции правдоподобия $L(\theta)$, если элементы выборки принимают достаточно много различных значений, «вблизи» истинных значений параметров θ у неё зачастую наблюдается локальный максимум. Это приводит к идее использования так называемых локальных оценок максимального правдоподобия, соответствующих локальному максимуму функции правдоподобия. Локальные оценки можно получить как численное решение системы уравнений (3) [11]:

$$\begin{aligned} \mu(\gamma) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \gamma), \\ \sigma^2(\gamma) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i - \gamma) - \mu(\gamma))^2, \\ \gamma &: \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \gamma} \left(1 + \frac{\ln(x_i - \gamma) - \mu(\gamma)}{\sigma^2(\gamma)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Обобщённый метод моментов

При оценке параметров с использованием обобщённого метода моментов на распределение $F(\cdot; \theta)$ накладываются ограничения, образующие систему уравнений вида $g_i(\theta) = h_i(x^n)$, $i = \overline{1, k}$, где функции $g_i(\theta)$ характеризуют распределение, а $h_i(x^n)$ являются их выборочными оценками, как правило, несмещёнными или хотя бы асимптотически несмещёнными [5].

Общий метод моментов применялся ранее для оценки параметров 3LND в связи с указанными выше проблемами, возникающими при использовании метода максимума правдоподобия [8, 9]. Если взять в качестве $g_{1,2,3}(\theta)$ математическое ожидание, дисперсию и коэффициент асимметрии (см. таб. 1), в качестве $h_{1,2,3}(X^n)$ — их выборочные оценки [6], то можно получить систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma + \beta\sqrt{\omega} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \\ \beta^2\omega(\omega - 1) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ \sqrt{\omega - 1}(\omega + 2) &= \frac{\frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = a \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Третье уравнение при любых значениях правой части a имеет единственное

решение $\omega = 1 + \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}} \right)^2$ [9], что позволяет получить оценки для $\sigma = \sqrt{\ln \omega}$, $\mu = \ln \beta$ и γ аналитически.

Также для оценки параметров 3LND было предложено использовать метод L-моментов [12]. L-моментом порядка r для распределения $F(\cdot)$ называется величина $\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E} X_{(r-k,r)}$. Статистика $l_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} x_{(i_{r-k})}$ является несмещённой оценкой для λ_r [13]. Для 3LND можно выписать следующую систему ограничений [12, 13]:

$$\begin{cases} \gamma + \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = l_1, \\ \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{2}\right) = l_2, \\ \frac{6}{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{2}\right)} \int_0^{\frac{\sigma}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \exp(-x^2) dx = \frac{l_3}{l_2}. \end{cases} \quad (6)$$

Следует отметить, что для упорядоченной выборки x^n вычисление l_1 , l_2 и l_3 имеет сложность $O(n)$. Для системы (6) можно получить приближённое решение [12]:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{8}{3}} \Phi^{-1}\left(\frac{1 + \frac{l_3}{l_2}}{2}\right), \\ \sigma &\approx 0,999281z - 0,006118z^3 + 0,000127z^5, \\ \mu &= \ln\left(\frac{l_2}{\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}\right) - \frac{\sigma^2}{2}, \\ \gamma &= l_1 - \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Метод минимизации расстояния

В классе методов минимизации расстояния мерой соответствия модели данным служит некоторым образом выбранное расстояние $d[\cdot, \cdot]$ между теоретическим и эмпирическим распределением данных. Полагается, что чем меньше это расстояние, тем лучше модель описывает данные. Для непрерывных распределений расстояние обычно берётся между функцией распределения модели $F(x; \theta)$ и эмпирической функцией распределения $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}[x > x_{(i)}]$. Термин «расстояние» в данном случае используется условно: функционал d может быть даже несимметричен, обычно от него требуется только неотрицательность и равенство нулю только в случае равенства распределений [14].

Расстояние	$d[F, G]$
Колмогорова—Смирнова	$\sup_x F(x) - G(x) $
Крамера—фон Мизеса	$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(x) - G(x))^2 dF(x)$
Андерсона—Дарлингга	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F(x) - G(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x)$

Таблица 2. Расстояния между распределениями $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ [6].

Применение метода минимального расстояния к задаче оценки параметров 3LND достаточно слабо освещено в существующей литературе. В настоящей работе мы рассмотрим методы минимизации расстояния Колмогорова—Смирнова, Крамера—фон Мизеса и Андерсона—Дарлингга (см. таб. 2). Отметим, что для упорядоченной выборки x^n вычисление $d[F, F_n]$ имеет сложность $O(n)$.

Вычислительные эксперименты

В данном разделе мы проводим сравнение описанных выше методов оценки параметров 3LND: метод локального максимума правдоподобия (далее сокращённо ЛМП), обобщённый метод моментов (ОММ), метод L-моментов (L-мом), методы минимизации расстояния Колмогорова—Смирнова (КС), Крамера—фон Мизеса (КфМ) и Андерсона—Дарлингга (АД). Методы были реализованы на языке программирования Python с использованием библиотек SciPy и NLopt для решения задач численной оптимизации.

Для тестирования методов мы использовали модельные данные—выборки из 3LND с известными наборами параметров $\theta = (\gamma, \mu, \sigma)$. Мы взяли 7 наборов параметров (см. таб. 3), которые сформировали по результатам анализа задержек при передаче сообщений в локальной сети и сети Интернет [3]. После чего для каждого из набора параметров генерировали $n = 100$ выборок размером $N = 10000$ из 3LND. Это позволяет сравнивать полученные различными методами оценки с истинным значением параметра и исследовать их статистические свойства.

	θ^1	θ^2	θ^3	θ^4	θ^5	θ^6	θ^7
γ	3	10	16	10	10	10	10
μ	3	3	3	2	4	3	3
σ	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.1	0.35

Таблица 3. Наборы параметров для генерации модельных данных.

Для сравнения качества различных методов оценки мы использовали следующие характеристики качества:

- смещение оценки параметра z : $b_z = (\bar{z} - z)^2$;

- эффективность оценки параметра z : $p_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - \bar{z})^2$;
- среднее время работы метода оценки параметров.

Здесь z — условное обозначение параметра γ , μ или σ , \hat{z}_i — оценка параметра z по i -ой выборке, $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{z}_i$. При этом общая точность оценки параметра z $a_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{z}_i - z)^2$ выражается как $a_z = b_z + p_z$. Полученные результаты представлены в таб. 4 и 5.

Выводы

Прежде всего следует отметить, что для всех методов смещение оценок параметров близко к 0, что даёт основания говорить об асимптотической несмещённости всех методов. При этом на общую точность оценки a_z подавляющее влияние оказывает её эффективность: из таб. 4 видно, что она, как правило, превосходит смещение на два порядка. Таким образом, наибольший интерес представляет именно эффективность оценки.

Можно заметить, что различные методы приблизительно одинаково упорядочиваются с точки зрения качества оценки разных параметров. Не возникает ситуации, когда из пары методов один давал бы заметно лучшую оценку для одного из параметров и заметно худшую — для другого. Таким образом, не имеет смысла оценивать различные параметры различными методами. Кроме того, относительное качество оценивания мало зависит от конкретного набора параметров. Это позволяет нам явно упорядочить методы по качеству.

		θ^1	θ^2	θ^3	θ^4	θ^5	θ^6	θ^7
b_γ $\sim 10^{-2}$	ЛМП	0.2	0.002	1.2	0.03	3.6	18.1	0.2
	ОММ	0.6	3.4	0.3	0.2	1.4	17.1	0.2
	L-мом	0.6	1.1	0.03	0.005	1.0	11.9	0.1
	КС	3.4	2.6	0.3	0.2	1.1	5.5	0.1
	КфМ	3.3	4.4	1.6	0.1	6.3	1.9	0.1
	АД	3.6	3.6	0.01	0.04	0.1	6.0	0.03
b_μ $\sim 10^{-5}$	ЛМП	0.4	0.0002	3.4	1.0	1.6	31.5	0.5
	ОММ	1.0	7.5	1.2	5.4	1.3	27.2	0.3
	L-мом	1.1	2.4	0.2	0.0004	0.7	17.5	0.3
	КС	2.2	1.7	1.2	5.2	2.5	3.8	0.8
	КфМ	2.3	3.9	2.1	0.7	5.5	0.2	0.8
	АД	2.5	2.9	0.2	0.3	1.5	4.8	0.6
b_σ $\sim 10^{-7}$	ЛМП	2.1	0.7	12.7	7.5	14.7	21.4	3.0
	ОММ	4.1	23.5	4.7	36.6	17.3	16.1	0.4
	L-мом	4.9	5.0	0.4	0.4	10.3	9.6	1.0
	КС	0.2	2.6	7.0	38.2	44.7	0.2	41.2
	КфМ	0.4	0.05	7.3	0.1	69.7	1.6	42.1
	АД	0.4	0.6	0.7	0.2	34.7	0.5	36.2
p_γ $\sim 10^0$	ЛМП	0.47	0.48	0.36	0.06	3.84	2.81	0.17
	ОММ	0.83	0.83	0.69	0.13	9.09	3.41	0.76
	L-мом	0.65	0.62	0.51	0.09	5.99	3.34	0.32
	КС	4.0	3.8	0.70	0.13	18.9	4.61	1.83
	КфМ	3.89	4.0	1.47	0.22	17.34	4.42	1.83
	АД	4.05	3.91	0.71	0.11	19.44	4.31	1.82
p_μ $\sim 10^{-3}$	ЛМП	1.21	1.25	0.95	1.19	1.33	6.80	0.47
	ОММ	2.15	2.16	1.81	2.57	3.20	8.17	2.06
	L-мом	1.68	1.59	1.31	1.72	2.04	7.81	0.88
	КС	9.50	8.81	1.81	1.53	6.39	11.23	4.42
	КфМ	9.26	9.24	3.59	4.15	5.95	11.73	4.42
	АД	9.6	9.06	1.78	2.13	6.57	10.76	4.40
p_σ $\sim 10^{-5}$	ЛМП	6.78	6.42	5.09	6.47	6.91	6.59	6.15
	ОММ	11.15	10.88	9.08	12.97	16.56	7.94	23.29
	L-мом	9.14	7.91	6.64	9.06	10.37	7.32	10.53
	КС	52.24	47.09	8.97	12.42	34.68	11.28	60.23
	КфМ	51.07	49.44	18.27	22.47	32.94	13.06	60.20
	АД	52.71	48.13	9.42	11.64	35.94	11.12	59.94

Таблица 4. Смещение и эффективность оценок γ , μ и σ . Для наглядности порядок величин в каждом блоке вынесен в первый столбец.

	θ^1	θ^2	θ^3	θ^4	θ^5	θ^6	θ^7
ЛМП	0.0355	0.0333	0.0335	0.0313	0.0377	0.0399	0.0317
ОММ	0.0015	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015
L-мом	0.0019	0.0022	0.002	0.0022	0.002	0.0018	0.0020
КС	0.3588	0.3472	0.1761	0.2079	0.3994	0.1916	0.3129
КфМ	0.3087	0.3672	0.2139	0.4212	0.3259	0.2095	0.2505
АД	0.3623	0.3728	0.2659	0.2454	0.3571	0.21	0.2467

Таблица 5. Время работы различных методов в секундах.

Как видно из таб. 4, метод локального максимума правдоподобия даёт наилучшие оценки, близкие к нему результаты показывает метод L-моментов, за ним идёт обобщённый метод моментов; далее идут методы Колмогорова—Смирнова и Андерсона—Дарлинга, а замыкает список метод Крамера—фон Мизеса. Отметим особо, что метод L-моментов и обобщённый метод моментов дают результаты, сравнимые с методом локального максимума правдоподобия, но при этом работают на порядок быстрее (см. таб. 5); кроме того, для обобщённого метода моментов, в отличие от метода локального максимума правдоподобия, гарантируется наличие оценки для любой выборки.

Заключение

В работе рассмотрены различные методы оценки параметров трёхпараметрического логнормального распределения. Впервые детально исследовано применение класса методов минимального расстояния к задаче оценки параметров 3LN распределения. Впервые проведено тестирование и сравнение методов на модельных данных в плане вычислительной эффективности и точности. Показано, что методы можно упорядочить по качеству оценки. Найдены методы с высокой вычислительной эффективностью при малой потере точности по сравнению с лидерами. Результаты работы необходимы в дальнейшем для решения задачи разделения смеси трёхпараметрических логнормальных распределений, которая в свою очередь востребована при моделировании задержек передачи информации в коммуникационных средах различных вычислительных кластеров.

Литература

1. Gorelov A. A., Maysuradze A. I., Salnikov A. N. Delay structure mining in computing cluster. // CEUR Workshop Proceedings. — Vol. 1482. — Aachen: M. Jeusfeld c/o Redaktion Sun SITE, Informatik V, RWTH Aachen Germany Germany, 2015. — P. 546–551.

2. *Corlett A., Pullin D. I., Sargood S.* Statistics of One-Way Internet Packet Delays. // Proceedings of the 53rd Internet Engineering Task Force. — 2002.
3. *Karakaş M.* Determination of Network Delay Distribution over the Internet. // The Middle East Technical University. — Master Thesis, 2003.
4. *Mukherjee A.* On the Dynamics and Significance of Low Frequency Components of Internet Load. // *Internetworking: Research and Experience.* — Vol. 5. — 1994. — P. 163–205.
5. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика. Основы эконометрики. Т. 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. — М.: Юнити-Дана, 2001.
6. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006.
7. *Johnson N. L., Kotz S. B., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. — New York: Wiley, 1994.
8. *Cohen A. C., Whitten B. J.* Estimation in the Three-Parameter Lognormal Distribution. // *Journal of the American Statistical Association.* — Vol. 75, No. 370. — Taylor & Francis, Ltd., 1980. — P. 399–404.
9. *Cohen A. C., Whitten B. J.* Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models. — Marcel Dekker, Inc., 1988.
10. *Hill, B. M.* The Three-Parameter Lognormal Distribution and Bayesian Analysis of a Point-Source Epidemic. // *Journal of the American Statistical Association.* — Vol. 58, No. 301. — Taylor & Francis, Ltd., 1963. — P. 72–84.
11. *Calitz, F.* Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Three-Parameter Lognormal Distribution — a Reconsideration. // *Australian Journal of Statistics.* — Vol. 15, No. 3. — 1973. — P. 185–190.
12. *Bílková D.* Three-parametric lognormal distribution and estimating its parameters using the method of L-moments. // *RELIK — Reprodukce lidského kapitálu.* — 2011.
13. *Hosking J. R. M.* L-Moments: Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combinations of Order Statistics. // *Journal of the Royal*

Statistical Society. Series B (Methodological). — Vol. 52, No. 1. — Royal Statistical Society, Wiley. — P. 105–124.

14. *Basu A., Shioya H., Park C.* Statistical Inference: The Minimum Distance Approach. — Taylor & Francis, Ltd., 2011.

В.Д. Козлов, А.И. Майсурадзе

РАЗДЕЛЕНИЕ СМЕСИ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛОГНОРМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ КОММУНИКАЦИОННЫХ СРЕД*

Введение

В настоящее время преобладает тенденция роста вычислительных систем «в ширину», когда развитие большой системы происходит путём добавления в неё многочисленных «слабосвязанных» малых систем. Вычислительный кластер — это группа вычислительных узлов, объединённых каналами связи, представляющая с точки зрения пользователя единый ресурс. Суперкомпьютер является вычислительным кластером, к коммуникационной среде которого ещё при проектировании предъявляются высокие требования, а характеристики узлов согласованы.

По мере роста количества вычислительных узлов в распределённой вычислительной системе растёт — причём нелинейно — сложность её коммуникационной среды и, как следствие, накладные расходы на обмен информацией между узлами. Таким образом, производительность современных вычислительных кластеров существенно зависит не только от характеристик отдельных вычислительных устройств, но и от характеристик коммуникационной среды. В связи с этим возникает потребность в анализе коммуникационной среды вычислительного кластера.

Обычно информация передаётся между узлами в виде отдельных сообщений. Важной характеристикой коммуникационной среды являются задержки (время) передачи сообщений между узлами кластера. Информация о задержках может быть использована для мониторинга и оптимизации работы вычислительной системы, в частности для динамического планирования исполнения программ или диагностики неполадок. Существующие системы тестирования коммуникационной среды (benchmarks) многократно измеряют время передачи информации от каждого узла к каждому при различных параметрах сообщения и различных режимах функционирования коммуникационной среды; в качестве примера можно привести систему PARUS [1]. При этом размер получаемых данных затрудняет их сбор, хранение и использование в реальном времени. Таким образом, возникает потребность в

*Исследование выполнено при финансовой поддержке МГУ (НИР 5.1.16) и РФФИ (проект 17-01-00917).

агрегировании данных для дальнейшего анализа [2].

В работе [3] был предложен стохастический подход к агрегированию данных: при фиксированных условиях (узел-отправитель, узел-получатель и длина сообщения) задержки рассматриваются как случайные величины из некоторого параметрического семейства, при этом моделирование задержек сводится к оценке параметров распределения случайной величины по конечной выборке. Проводившиеся ранее исследования задержек в локальных сетях и сети Интернет [4–6] показывают, что величины задержек хорошо описываются трёхпараметрическим гамма-распределением или трёхпараметрическим логнормальным распределением. В коммуникационной среде различных суперкомпьютеров наблюдаются следующие особенности [3]:

1. распределение является многомодальным;
2. в данных очень много повторов и мало уникальных значений;
3. наблюдается достаточно много задержек максимальной величины, что может говорить о тяжёлом хвосте распределения.

В связи с этим в работе [3] для моделирования задержек было предложено использовать смеси трёхпараметрических логнормальных распределений. Однако оценка параметров такой смеси представляет собой нетривиальную задачу; подробнее о причинах этого будет сказано ниже. Данная работа как раз и посвящена разработке и исследованию специализированных методов разделения смеси трёхпараметрических логнормальных распределений по конечным выборкам задержек передачи информации в коммуникационной среде суперкомпьютера.

Работа организована следующим образом: сначала даются базовые обозначения и определения, доказывається важное для задачи разделения смеси свойство идентифицируемости семейства трёхпараметрических логнормальных распределений, теоретически рассматриваются различные варианты EM-алгоритма, проводится экспериментальное сравнение методов на реальных данных, наконец «Заключение» завершает статью.

Основные определения и обозначения

Трёхпараметрическое логнормальное распределение (3LN распределение, 3LND) — это абсолютно непрерывное одномерное распределение с функцией плотности

$$p(x; \gamma, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-\gamma)} \exp\left(-\frac{(\ln(x-\gamma)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & , x \geq \gamma, \\ 0 & , x < \gamma. \end{cases}$$

Важно отметить, что у данного распределения ограниченный носитель, существенно зависящий от параметров. Случайная величина X имеет трёхпараметрическое логнормальное распределение с параметрами γ , μ и σ , если величина $\ln(X - \gamma)$ распределена нормально с параметрами μ и σ [7], поэтому её функция распределения может быть записана в виде $F(x; \gamma, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right)$ при $x > \gamma$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Конечная смесь распределений из параметрического семейства $F = \{F(\cdot, \theta) | \theta \in \Theta\}$ — это вероятностное распределение с функцией распределения вида

$$F(x; \bar{w}, \bar{\theta}) = \sum_{i=1}^k w_i F(x; \theta^i),$$

где $0 \leq w_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^k w_i = 1$. Аналогичное равенство выполняется и для плотности смеси распределений. Распределения $F(x; \theta^i)$ называются компонентами смеси, величины w_1, \dots, w_k — весами компонентов. Задача оценки параметров смеси носит специальное название «разделение смеси».

Ниже в работе будут использоваться следующие сокращения и обозначения:

- 3LNDM — смесь трёхпараметрических логнормальных распределений;
- $F(\cdot; \theta)$ — вероятностное распределение с набором параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$; для 3LNDM положим $\theta = (\gamma, \mu, \sigma)$, $\theta_1 = \gamma$, $\theta_2 = \mu$, $\theta_3 = \sigma$;
- $X \sim F(\cdot)$ — случайная величина X , имеющая распределение $F(\cdot)$;
- $X^n = \{X_1, \dots, X_n\}$ — случайная выборка из n независимых одинаково распределённых случайных величин, $x^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ — наблюдаемая реализация выборки;
- $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция распределения стандартного нормального закона, $\phi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ — плотность нормального распределения с параметрами μ и σ ;
- $\overline{1, k}$ — множество целых чисел от 1 до k включительно.

Идентифицируемость семейства 3LND

Следует отметить, что существуют такие семейства распределений, при работе с которыми одна и та же смесь может задаваться разными наборами весов и параметров компонентов. Для таких семейств задача разделения смеси может иметь не единственное решение, т. е. сразу же оказывается некорректно поставленной. Семейства распределений, конечные смеси которых взаимно однозначно соответствуют наборам весов и параметров компонентов с точностью до перенумерации, добавления и удаления компонентов с нулевыми весами и перераспределения весов между компонентами с одинаковыми параметрами, называются идентифицируемыми [8].

Теорема. Семейство 3LND является идентифицируемым.

Доказательство. Семейство распределений идентифицируемо тогда и только тогда, когда множество функций распределения линейно независимо [10]. Пусть существуют такие c_1, \dots, c_n , $c_i \neq 0$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, μ_1, \dots, μ_n , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, все тройки параметров $(\gamma_i, \mu_i, \sigma_i)$ различны, что

$$\sum_{i=1}^n c_i F(x; \gamma_i, \mu_i, \sigma_i) = 0. \quad (1)$$

Пусть $\gamma'_1 < \dots < \gamma'_m$ — все различные значения $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, $m \leq n$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j: \gamma_j = \gamma'_i} c_j F(x; \gamma'_i, \mu_j, \sigma_j) = 0.$$

Рассмотрим $\sum_{j: \gamma_j = \gamma'_1} c_j F(x; \gamma'_1, \mu_j, \sigma_j) = \sum_{\gamma_j = \gamma'_1} c_j \Phi\left(\frac{\ln(x - \gamma'_1) - \mu_j}{\sigma_j}\right)$. Это выражение должно быть равно 0 на $[\gamma'_1, \gamma'_2]$. Покажем, что такое возможно только при равенстве всех c_j в этой сумме 0. Для этого исследуем определитель Вронского системы функций плотности вероятности нормального распределения $\{\phi_j(x) = \phi(x; \mu_j, \sigma_j)\}$ на равенство 0. Без ограничения общности можно считать, что $j = 1, \dots, k$.

Производная функции $\phi(x; \mu, \sigma)$ i -го порядка вычисляется по формуле $\phi^{(i)}(x; \mu, \sigma) = \phi(x; \mu, \sigma) s_i(x)$, где

$$\begin{aligned} s_i(x) &= s_{i-1}(x) \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) + s'_{i-1}(x), \\ s_0(x) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) следует, что $s_i(x) = \sum_{k=0}^i a_{ik}(\sigma) \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^k$ — многочлен степени i от

$\left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)$, коэффициенты a_{ik} которого зависят только от σ и не зависят от μ , причём $a_{ii}(\sigma) = 1$, $a_{i,i-1}(\sigma) = 0$.

Запишем определитель Вронского системы функций $\{\phi_j(x)\}$:

$$\begin{aligned}
W[\phi_1, \dots, \phi_k](x) &= \\
&= \det \left| \phi_j(x) \left(\sum_{l=0}^i a_{il}(\sigma_j) \left(-\frac{x-\mu_j}{\sigma_j^2}\right)^l \right) \right|_{j=1, \overline{k}}^{i=0, \overline{k-1}} = \\
&= \prod_{j=1}^k \phi_j(x) \cdot \det \left| \sum_{l=0}^i a_{il}(\sigma_j) \left(-\frac{x-\mu_j}{\sigma_j^2}\right)^l \right|_{j=1, \overline{k}}^{i=0, \overline{k-1}} = \\
&= \prod_{j=1}^k \phi_j(x) \cdot \sum_{\alpha \in S(k)} (-1)^{N(\alpha)} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=0}^i a_{il}(\sigma_{\alpha_i}) \left(-\frac{x-\mu_{\alpha_i}}{\sigma_{\alpha_i}^2}\right)^l \right), \quad (3)
\end{aligned}$$

где $S(k)$ — симметрическая группа на $\{1, \dots, k\}$, $N(\alpha)$ — число инверсий в перестановке $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$. Если раскрыть скобки во внутреннем произведении сумм, получим

$$\begin{aligned}
W(x) &= \sum_{\alpha \in S(k)} (-1)^{N(\alpha)} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=0}^i a_{il}(\sigma_{\alpha_i}) \left(-\frac{x-\mu_{\alpha_i}}{\sigma_{\alpha_i}^2}\right)^l \right) = \\
&= \sum_{\alpha \in S(k)} (-1)^{N(\alpha)} \sum_{\substack{l_i=0, \dots, i \\ i=0, \overline{k-1}}} \prod_{r=0}^{k-1} a_{rl_r}(\sigma_{\alpha_r}) \left(-\frac{x-\mu_{\alpha_r}}{\sigma_{\alpha_r}^2}\right)^{l_r}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Поскольку $\prod_{j=1}^k \phi_j(x) > 0$, $W[\phi_1, \dots, \phi_k](x) = 0$ тогда и только тогда, когда $W(x) = 0$. Докажем, что $W(x) \not\equiv 0$.

$W(x)$ является многочленом от x . Рассмотрим слагаемое $V(x)$, соответствующее $l_i = i$. Это определитель Вандермонда:

$$V(x) = \sum_{\alpha \in S(k)} (-1)^{N(\alpha)} \prod_{r=0}^{k-1} \left(-\frac{x-\mu_{\alpha_r}}{\sigma_{\alpha_r}^2}\right)^r = \prod_{i < j} \left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i^2} - \frac{x-\mu_j}{\sigma_j^2} \right).$$

Если все $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, различны, то $\deg V(x) = \frac{k(k-1)}{2}$, и это, очевидно, наибольшая степень в $W(x)$. Из этого следует, что $W(x) \not\equiv 0$. Если некоторые σ_j равны между собой, то степень $V(x)$ будет меньше $\frac{k(k-1)}{2}$, так как часть скобок обращается в константы. Покажем, что в этом случае $V(x)$ всё равно имеет наибольшую степень в $W(x)$.

Пусть $\sigma_{j_1} = \dots = \sigma_{j_s} = \sigma$. Обозначим подгруппу группы $S(k)$ перестановок на $\{j_1, \dots, j_s\}$ как H . Любую перестановку $\alpha \in S(k)$ можно записать как $\alpha = \beta\alpha'$, где $\beta \in H$, $\alpha' \in H\alpha$ – фиксированный для каждого смежного класса представитель (можно выбрать любой элемент). Поскольку β действует только на $\{j_1, \dots, j_s\}$, $\alpha'_j = \alpha_j$ при $\alpha_j \neq j_1, \dots, j_s$. Тогда $W(x)$ представимо в виде:

$$\begin{aligned}
W(x) &= \sum_{\alpha \in S(k)} (-1)^{N(\alpha)} \sum_{\substack{l_i=0, \dots, i \\ i=0, k-1}} \prod_{r=0}^{k-1} a_{rl_r}(\sigma_{\alpha_r}) \left(-\frac{x - \mu_{\alpha_r}}{\sigma_{\alpha_r}^2} \right)^{l_r} = \\
&= \sum_{\alpha'} (-1)^{N(\alpha')} \sum_{l_i=0, \dots, i} \sum_{\beta \in H} (-1)^{N(\beta)} \prod_{r=0}^{k-1} a_{rl_r}(\sigma_{\alpha_r}) \left(-\frac{x - \mu_{\alpha_r}}{\sigma_{\alpha_r}^2} \right)^{l_r} = \\
&= \sum_{\alpha'} (-1)^{N(\alpha')} \sum_{l_i=0, \dots, i} \left(\prod_{r: \alpha'_r \neq j_1, \dots, j_s} a_{rl_r}(\sigma_{\alpha'_r}) \left(-\frac{x - \mu_{\alpha'_r}}{\sigma_{\alpha'_r}^2} \right)^{l_r} \times \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{\beta \in H} (-1)^{N(\beta)} \prod_{r: \alpha'_r = j_1, \dots, j_s} a_{rl_r}(\sigma_{(\beta\alpha')_r}) \left(-\frac{x - \mu_{(\beta\alpha')_r}}{\sigma_{(\beta\alpha')_r}^2} \right)^{l_r} \right). \quad (5)
\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma_{j_1} = \dots = \sigma_{j_s} = \sigma$, $\sigma_{(\beta\alpha')_j} = \sigma$ при $\alpha_j = j_1, \dots, j_s$. Отсюда

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta \in H} (-1)^{N(\beta)} \prod_{r: \alpha'_r = j_1, \dots, j_s} a_{rl_r}(\sigma_{(\beta\alpha')_r}) \left(-\frac{x - \mu_{(\beta\alpha')_r}}{\sigma_{(\beta\alpha')_r}^2} \right)^{l_r} = \\
&= \prod_{r: \alpha'_r = j_1, \dots, j_s} a_{rl_r}(\sigma) \cdot \sum_{\beta \in H} (-1)^{N(\beta)} \prod_{r: \alpha'_r = j_1, \dots, j_s} \left(-\frac{x - \mu_{(\beta\alpha')_r}}{\sigma^2} \right)^{l_r} = \\
&= \prod_{r: \alpha'_r = j_1, \dots, j_s} \frac{a_{rl_r}(\sigma)}{(-\sigma^2)^{l_r}} \cdot \det \left| (x - \mu_j)^{l_i} \right|_{j=j_1, \dots, j_s}^{i: \alpha'_i = j_1, \dots, j_s}.
\end{aligned}$$

Наконец, преобразуем $\det \left| (x - \mu_j)^{l_i} \right|_{j=j_1, \dots, j_s}^{i: \alpha'_i = j_1, \dots, j_s}$ (без ограничения общности можно считать, что $i = \overline{1, s}$ и $j = \overline{1, s}$):

$$\begin{aligned}
&\det \left| (x - \mu_j)^{l_i} \right|_{j=\overline{1, s}}^{i=\overline{1, s}} = \\
&= \sum_{\beta \in S(s)} (-1)^{N(\beta)} \prod_{r=1}^s (x - \mu_{\beta_r})^{l_r} = \{L = l_1 + \dots + l_s\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\beta \in S(s)} (-1)^{N(\beta)} \sum_{r=0}^L (-1)^r \left(\sum_{\substack{0 \leq g_1 \leq l_1 \\ \dots \\ 0 \leq g_s \leq l_s \\ g_1 + \dots + g_s = r}} \prod_{t=1}^s \mu_{\beta_t}^{g_t} \right) x^{L-r} = \\
&= \sum_{r=0}^L (-1)^r \left(\sum_{g_1 + \dots + g_s = r} \sum_{\beta \in S(s)} (-1)^{N(\beta)} \prod_{t=1}^s \mu_{\beta_t}^{g_t} \right) x^{L-r} = \\
&= \sum_{r=0}^L (-1)^r \left(\sum_{g_1 + \dots + g_s = r} \det \left| \mu_j^{g_i} \right|_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,s}}} \right) x^{L-r} \quad (6)
\end{aligned}$$

Если для каких-либо $u \neq v$ $g_u = g_v$, то $\det \left| \mu_j^{g_i} \right|_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,s}}} = 0$, так как в матрице есть две совпадающие строки. Рассмотрим случай, когда все g_i различны. Без ограничения общности можно считать, что $g_1 < \dots < g_s$. Но тогда $g_i \geq i - 1$, а значит, $g_1 + \dots + g_s \geq \frac{s(s-1)}{2}$. Таким образом, при $0 \leq r < \frac{s(s-1)}{2}$ все g_i различными быть не могут, и $\det \left| \mu_j^{g_i} \right|_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,s}}} = 0$, то есть $\deg \det \left| (x - \mu_j)^{l_i} \right|_{\substack{i=\overline{1,s} \\ j=\overline{1,s}}} \leq L - \frac{s(s-1)}{2}$. Это значит, что если у s функций плотности $\phi_j(x)$ равны параметры σ , то степень каждого слагаемого в $W(x)$ (5) уменьшается по меньшей мере на $\frac{s(s-1)}{2}$. При этом степень $V(x)$ всегда снижается ровно на $\frac{s(s-1)}{2}$. Если таких групп равных параметров σ несколько, то каждая из них будет независимо снижать степень слагаемых в $W(x)$ указанным образом.

Таким образом, $V(x)$ — всегда старший член, и, поскольку все тройки параметров (γ, μ, σ) различны, он не равен тождественно 0. Поэтому $W(x) = 0$ только в конечном числе точек (возможно, вообще нигде). Из этого следует, что $W[\phi_1, \dots, \phi_k](x) \not\equiv 0$ ни на каком отрезке, а значит, системы функций $\{\phi_1(x), \dots, \phi_k(x)\}$, $\{\Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x)\}$ и $\{\Phi_1(\ln(x - \gamma)), \dots, \Phi_k(\ln(x - \gamma))\}$ не являются линейно зависимыми ни на каком отрезке. Таким образом, если $\sum_{j: \gamma_j = \gamma'_1} c_j F(x; \gamma'_1, \mu_j, \sigma_j) = 0$ на $[\gamma'_1, \gamma'_2]$, то все c_j , соответствующие $\gamma_j = \gamma'_1$, равны 0, и соответствующие компоненты, а значит, и γ'_1 , можно не рассматривать. Повторяя те же рассуждения для $\gamma'_2, \dots, \gamma'_m$, получаем, что $c_1 = \dots = c_n = 0$.

Варианты EM-алгоритма

Наиболее популярным подходом к оценке параметров распределения является метод максимума правдоподобия. В качестве меры адекватности распределения $F(\cdot; \theta)$ данным x^n используется функция правдоподобия $L(\theta)$, равная $p(x_1, \dots, x_n; \theta)$ — совместной плотности вероятности объектов выборки. Полагается, что чем больше правдоподобие, тем лучше модель описывает данные [9].

Для смеси распределений логарифм функции правдоподобия записывается как

$$\ln L(\bar{w}, \bar{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ln \sum_{j=1}^k w_j p(x_i, \theta^j). \quad (7)$$

Для поиска максимума такой функции чаще всего используется итерационный EM-алгоритм [11]:

$$\begin{aligned} \text{E-шаг: } q_{ij} &= p(x_i \sim F(\cdot; \theta^j) | \bar{w}, \bar{\theta}) = \frac{w_j p(x_i; \theta^j)}{\sum_{l=1}^k w_l p(x_i; \theta^l)} \\ \text{M-шаг: } w_j &= \frac{\sum_{i=1}^n q_{ij}}{n} \\ \theta^j &= \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^n q_{ij} \ln p(x_i; \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

Метод максимума правдоподобия с успехом применяется для решения многих задач статистики. Однако его применимость для разделения смеси 3LND оказывается под вопросом. Показано [12], что для любой выборки x^n функция правдоподобия 3LND $L(\gamma, \mu, \sigma)$ не ограничена, и существуют траектории в пространстве параметров, сходящиеся к $(x_{(1)}, -\infty, +\infty)$, при движении вдоль которых $L(\gamma, \mu, \sigma)$ сходится к $+\infty$, при том что в самой точке $(x_{(1)}, -\infty, +\infty)$ функция правдоподобия равна 0. Нетрудно видеть, что оценка параметров компонентов смеси θ на M-шаге представляет собой максимизацию взвешенной функции правдоподобия с весами q_{ij} , приписанными объектам x_i ; как следствие, проблема неограниченности правдоподобия распространяется и на случай смеси.

Для решения этой проблемы мы предлагаем использовать результаты нашей предыдущей работы [13]. Мы показали, что методы локального максимума правдоподобия [14], обобщённый метод моментов [15] и метод L-моментов [16] позволяют быстро и с высокой степенью точностью получать оценки параметров для одного 3LND. Теперь мы предлагаем использовать их на M-шаге для получения параметров компонентов смеси по взвешенной выборке x^n . Метод локального максимума правдоподобия обобщается на случай взвешенной выборки очевидным образом; для метода моментов и

L-моментов предлагается использовать взвешенные аналоги эмпирических моментов, оставив теоретические неизменными.

В работе [17] предлагается другая модификация EM-алгоритма для разделения смеси — «усечённый», или «сеточный» EM-алгоритм. Особенность его заключается в том, что вместо задачи максимизации правдоподобия $\max_{\bar{w}, \bar{\theta}} \sum_{i=1}^n \ln \sum_{j=1}^k w_j p(x_i, \theta^j)$ рассматривается сокращённая задача $\max_{\bar{w}} \sum_{i=1}^n \ln \sum_{j=1}^k w_j p(x_i, \theta^j)$ с фиксированными параметрами компонентов θ^j — максимизация усечённой функции правдоподобия. Для оценки весов предлагается использовать EM-алгоритм (8), но без пересчёта параметров θ^j на M-шаге. Такая процедура гарантированно сойдётся к глобальному максимуму усечённой функции правдоподобия [11, 17]. Если значения параметров компонентов лежат близко к истинным параметрам смеси, то можно рассчитывать на высокую точность аппроксимации истинного распределения данных полученной смесью с фиксированными компонентами. В частности, если параметры компонентов — узлы сетки с достаточно малым шагом в пространстве параметров, то можно ожидать, что оптимизационная процедура сойдётся примерно к тем же компонентам и тем же весам, что образуют истинное распределение.

Вычислительные эксперименты и выводы

Тестирование методов проводилось на реальных данных о задержках при пересылке сообщений длиной 5000 байт между 8 вычислительными узлами в системе BlueGene/P. Всего было собрано 56 выборок (по одной для каждой пары узлов) по 10000 задержек каждая. Для сбора данных использовалась система PARUS [1]. Для каждой из них мы оценивали параметры смеси обычным EM-алгоритмом, двумя его модификациями на основе обобщённого метода моментов и метода L-моментов и «усечённым» EM-алгоритмом. Прежде всего нас интересовало среднее время работы методов; результаты представлены в таб. 1. На рис. 1 также продемонстрирован результат работы каждого из методов для одного из наборов данных.

Результаты тестирования дают основания полагать, что использование модифицированных вариантов EM-алгоритма (особенно с использованием L-моментов) в данной задаче является предпочтительным: эти методы в несколько раз превосходят по быстродействию обычный EM-алгоритм, а визуальный анализ результатов (см. рис. 1) позволяет предположить, что EM-алгоритм с использованием L-моментов в некоторых случаях позволяет получать лучшие оценки параметров, чем иные методы. Сетевой EM, напротив, оказался слишком медленным и склонным к переобучению.

Таблица 1. Время работы методов разделения смеси в секундах.

	EM	EM+ОММ	EM+L-мом	Сеточный EM
среднее	11.43	5.40	3.32	33.40
минимальное	0.24	0.03	0.02	5.31
максимальное	98.73	19.26	17.75	110.51

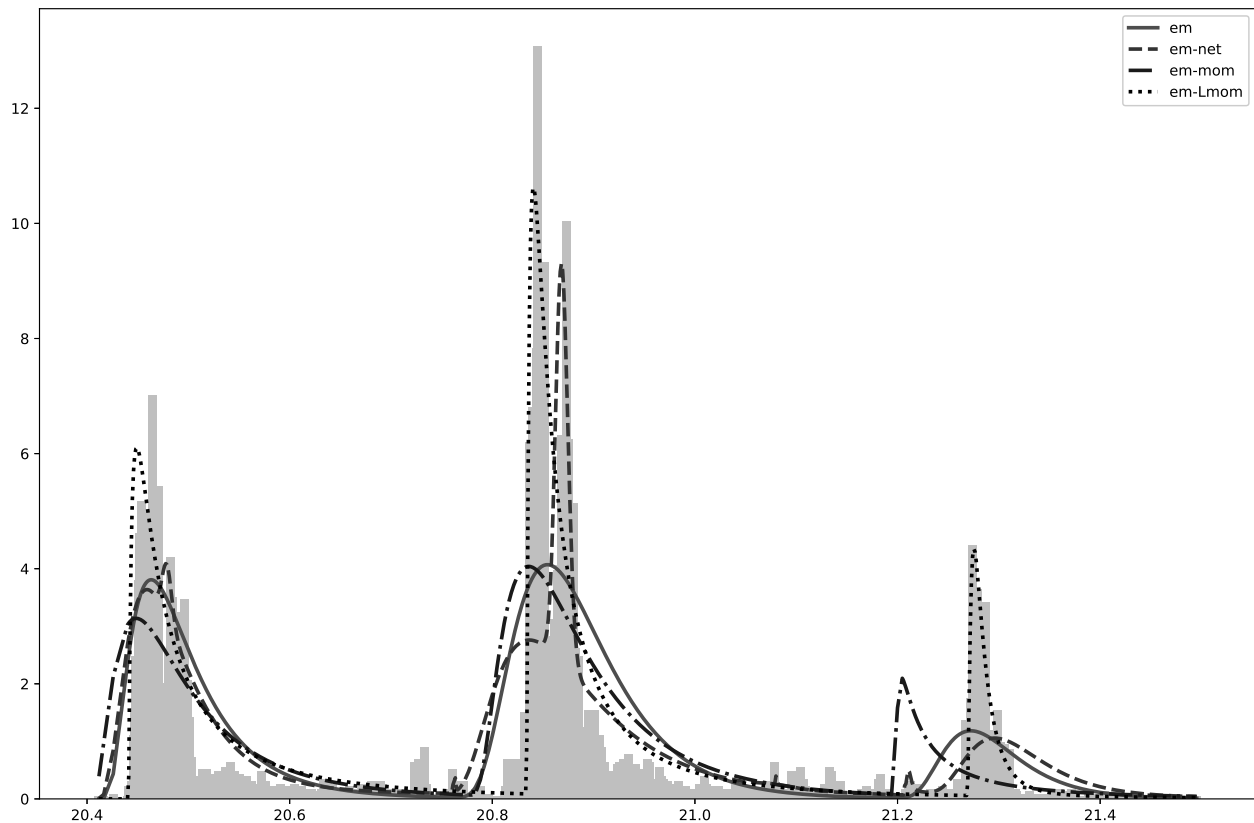


Рисунок 1. Пример работы различных методов разделения смеси, на заднем плане — гистограмма реальных данных.

Заключение

В работе рассмотрена предметно-ориентированная задача разделения смеси трёхпараметрических логнормальных распределений по данным о задержках передачи сообщений в коммуникационной среде вычислительного кластера. Показано, что семейство трёхпараметрических логнормальных распределений является идентифицируемым, что является необходимым условием корректности задачи разделения смеси. Рассмотрены существующие методы решения такой задачи, предложены новые методы. Проведено сравнение методов на реальных данных и показано, что предложенные методы для рассматриваемой предметно-ориентированной задачи превосходят традиционные — принципиально по скорости и заметно по точности.

Литература

1. *Salnikov A. N.* Parus: A parallel programming framework for heterogeneous multiprocessor systems. // Recent Advances in Parallel Virtual Machine and Message Passing Interface. — Springer, 2006. — P. 408–409.
2. *Майсурадзе А. И.* Агрегирование аналитического пространства задержек передачи информации. // Труды IX Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015 г.). — М.: МАКС Пресс, 2015. — С. 151–154.
3. *Gorelov A. A., Maysuradze A. I., Salnikov A. N.* Delay structure mining in computing cluster. // CEUR Workshop Proceedings. — Vol. 1482. — Aachen: M. Jeusfeld c/o Redaktion Sun SITE, Informatik V, RWTH Aachen Germany Germany, 2015. — P. 546–551.
4. *Corlett A., Pullin D. I., Sargood S.* Statistics of One-Way Internet Packet Delays. // Proceedings of the 53rd Internet Engineering Task Force. — 2002.
5. *Karakaş M.* Determination of Network Delay Distribution over the Internet. // The Middle East Technical University. — Master Thesis, 2003.
6. *Mukherjee A.* On the Dynamics and Significance of Low Frequency Components of Internet Load. // Internetworking: Research and Experience. — Vol. 5. — 1994. — P. 163–205.
7. *Johnson N. L., Kotz S. B., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. — New York: Wiley, 1994.
8. *Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989.
9. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика. Основы эконометрики. Т. 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. — М.: Юнити-Дана, 2001.
10. *Yakowitz S. J., Spragins J. D.* On the Identifiability of Finite Mixtures. // The Annals of Mathematical Statistics. — Vol. 39, No. 1. — 1968. — P. 209–214.

11. *Королёв В. Ю.* EM-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. // Теоретический обзор. — М.: ИПИ РАН, 2007 — Т. 102.
12. *Hill, B. M.* The Three-Parameter Lognormal Distribution and Bayesian Analysis of a Point-Source Epidemic. // Journal of the American Statistical Association. — Vol. 58, No 301. — Taylor & Francis, Ltd., 1963. — P. 72–84.
13. *Козлов В. Д., Майсурадзе А. И.* Оценки параметров трёхпараметрического логнормального распределения // Прикладная математика и информатика No 60 М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2018.
14. *Calitz, F.* Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of the Three-Parameter Lognormal Distribution — a Reconsideration. // Australian Journal of Statistics. — Vol. 15, No 3. — 1973. — P. 185–190.
15. *Cohen A. C., Whitten B. J.* Estimation in the Three-Parameter Lognormal Distribution. // Journal of the American Statistical Association. — Vol. 75, No 370. — Taylor & Francis, Ltd., 1980. — P. 399–404.
16. *Bílková D.* Three-parametric lognormal distribution and estimating its parameters using the method of L-moments. // RELIK — Reprodukce lidského kapitálu. — 2011.
17. *Королёв В. Ю., Назаров А. Л.* Разделение смесей вероятностных распределений при помощи сеточных методов моментов и максимального правдоподобия. // Автоматика и телемеханика. — № 3, 2010. — С. 98–116.

УДК 519.6

Мамаев Н.В., Крылов А.С. Использование анизотропной диффузии в многомасштабном методе нахождения хребтовых структур // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Предложен алгоритм поиска хребтовых структур на изображениях и рассмотрено его применение для разметки кровеносных сосудов на изображениях глазного дна. Алгоритм основан на многомасштабном применении метода немаксимального подавления к лапласиану изображения. Многомасштабный алгоритм использует пирамиду детальности аналогичную используемой в методе SIFT. В качестве предобработки предлагается использовать анизотропную диффузию, позволяющую увеличить значение свертки лапласиана с функцией Гаусса на хребтовых структурах. Тестирование предложенного алгоритма выполнялось на офтальмологической базе изображений DRIVE. Показано, что использование предложенной предобработки позволяет улучшить качество детектирования хребтовых структур.

Библиогр.: 17 назв., Ил.: 3.

Ключевые слова: анизотропная диффузия, хребтовые структуры.

УДК 518.12

Дмитриев В.И. Ингтем Ж.Г. Метод регуляризованных сплайнов (R-сплайн) для задач приближения функций. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В литературе встречается много описаний методов построения кубических сплайнов. Большинство этих методов сконцентрированы на изучении кубических сплайнов дефекта 1, т.е. кубических сплайнов непрерывных вместе со своими первой и второй производной. Однако многие задачи в природе не требуют непрерывности второй производной. Для класса таких задач используется эрмитов кубический сплайн. Для построения эрмитова сплайна предполагаются известными на сетке, и значения интерполируемой функции, и значения ее производной. Последние не всегда возможно измерить на практике, тем самым, они заменяются разностными производными и т.д. В настоящей статье предлагается построить кубический сплайн класса C^1 таким образом, чтобы он достигал минимума нормы своей первой производной в пространстве L_2 . Следовательно, задача вычисления значений первой производной на сетке сводится к минимизации нормы первой производной сплайна по этим самым искомым значениям.

Библиогр.: 11 назв., Ил.: 6.

Ключевые слова: Эрмитов кубический сплайн, интерполяция, аппроксимация, регуляризованный сплайн, кубический сплайн класса C^1 .

УДК 519.612

Ян Цзяньсюнь Исследование прямой задачи дисперсии поверхностной волны в слоистых средах. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В настоящей статье рассмотрен новый метод для расчета характеристик бегущей волны в слоистой среде. Чтобы улучшить метод тензора сейсмического импеданса, вводится понятие потенциальной функции, и находятся новые итерационные отношения для изотропных слоистых сред. В процессе сравнения корней дисперсионного уравнения между методом обобщенного коэффициента отражения-передачи (МОК-О/П) (The generalized reflection-transmission coefficient method) и методом тензора сейсмического импеданса (МТСИ) были выявлены некоторые корни, которые не существуют при решении методом МТСИ. Чтобы проверить точность корней двух методов, мы сравнили экспериментальные результаты между классическим методом матрицы перехода 'Thomson Haskell' и нашим новым методом МТСИ при заданной модели слоистой среды. Экспериментальные результаты показывают, что корни, полученные методом импеданса, совпадают с классическим методом матрицы перехода. Это также показывает, что некоторые корни, полученные из дисперсионного уравнения в методе МОК-О/П, не могут быть точно определены.

Библиогр.: 15 назв., Табл.:1, Ил.: 3.

Ключевые слова: характеристика бегущей волны, метод тензора импеданса, дисперсионная кривая, фазовая скорость.

УДК 517.91+517.95

Баев А.В., Гаврилов С.В. Обратная задача рассеяния в нестационарной среде. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Рассмотрена обратная задача рассеяния в однородной нестационарной одномерной среде для системы уравнений акустики. Указан класс граничных источников, для которых задача определения переменной по времени плотности имеет единственное решение. Предложен метод решения обратной задачи, основанный на использовании интегро-функциональных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. Разработан регуляризованный итерационный алгоритм численного решения обратной задачи в рамках теории разностных схем. Приводятся результаты вычислительного эксперимента по применению построенного алгоритма для различных нестационарных сред и граничных источников.

Библиогр.: 23 назв., Ил.: 4.

Ключевые слова: уравнения акустики, нестационарная система Дирака, уравнение Вольтерра третьего рода, метод обращения разностных схем, итерационный метод.

УДК 517.957

Степаненко С.В., Разгулин А.В., Трофимов В.А. Об одной модели, описывающей распространение фемтосекундного импульса в среде с керровской нелинейностью. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В настоящей работе рассматривается модель нелинейного взаимодействия фемтосекундных импульсов со средой, содержащей керровский нелинейный отклик, с учетом дисперсии первого и второго порядков, дисперсии нелинейного отклика среды, а также смешанных производных по времени и пространственным координатам. Для построения инвариантов предложено преобразование обобщенного нелинейного уравнения Шредингера, состоящее в переходе к новым функциям и позволяющее привести исходное уравнение к виду, не содержащему производных от нелинейного отклика среды и смешанных производных. Для этого уравнения были установлены законы сохранения, характеризующие рассматриваемый процесс. Полученные инварианты позволяют строить консервативные разностные схемы и контролировать результаты компьютерного моделирования.

Библиогр.: 20 назв.

Ключевые слова: фемтосекундные импульсы, нелинейное уравнение Шредингера, преобразование уравнения.

УДК 519.233.24, 519.233.5

Белов А.Г. вычисление доверительных полос среднего значения повторных откликов // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Аннотация: В работе рассматривается задача построения совместных доверительных полос для среднего значения повторных откликов в линейной множественной нормальной регрессионной модели. Для ее решения описан и применен численный метод коррекции уровня доверия поточечных доверительных интервалов среднего значения повторных откликов. Более точное решение задачи дает численный метод вычисления критического значения, определяющего совместный доверительный интервал заданного уровня. Проведено численное моделирование и сравнительный анализ совместного доверительного интервала с поточечным аналогом для регрессии, среднего значения повторных откликов и отдельного наблюдения.

Библиогр.: 14 назв., Ил.: 4, Табл. 2.

Ключевые слова: совместные доверительные интервалы, множественная нормальная регрессия, повторные отклики.

УДК 519.832

Морозов В.В. Об одной игровой задаче продажи ценных бумаг. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Рассмотрена задача продажи k ценных бумаг в течение n торгов, не более одной в одном торге. Для оценки результатов продаж используется конкурентное отношение (competitive ratio) суммы k наибольших стоимостей бумаг к сумме, полученной от их продажи. Лоренцем построено решение игры при $2k \leq n$. В статье решение игры найдено в общем случае как для критерия отношения, так и для критерия сожаления Сэвиджа.

Библиогр.: 6 назв., Табл.: 2.

Ключевые слова: антагонистическая игра, финансовый рынок, конкурентное отношение, критерий сожаления Сэвиджа.

УДК 519.233.22, 519.24+.25

Козлов В. Д., Майсурадзе А. И. Оценка параметров трёхпараметрического логнормального распределения. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Исследуются и сравниваются методы точечного оценивания параметров трёхпараметрического логнормального распределения. Данное распределение востребовано в целом ряде предметных областей, однако для него ранее не проводилось сравнительного исследования методов оценивания. Показано, что несмотря на значительное число традиционных методов оценивания, исследуемое распределение требует специальных методов. В связи с этим рассматриваются специализации основных подходов к оценке параметров, включая активно развивающиеся методы минимизации расстояния. Проводится сравнение их точности и быстродействия на модельных данных. Показано, что специализированные методы оценивания параметров могут превосходить наиболее распространенный метод максимального правдоподобия.

Библиогр.: 14 назв. Табл.: 5.

Ключевые слова: точечное оценивание, трёхпараметрическое логнормальное распределение, методы минимизации расстояния, метод максимального правдоподобия, методы моментов, проблемно-ориентированные методы.

УДК 519.233.22, 519.24+.25, 004.75, 51-74

Козлов В. Д., Майсурадзе А. И. Разделение смеси трёхпараметрических логнормальных распределений при анализе коммуникационных сред. // Прикладная математика и информатика № 60, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Теоретически и эмпирически исследуются задачи и методы разде-

ления смеси трёхпараметрических логнормальных распределений при моделировании по данным диагностики задержек передачи сообщений в коммуникационной среде вычислительного кластера. Предлагается метод моделирования задержек, основанный на смесях трёхпараметрических логнормальных распределений, исследуются методы оценки параметров такой модели. Доказывается идентифицируемость указанного семейства распределений, что является необходимым условием корректности задачи разделения смеси. Показано, что предложенные модификации стандартных алгоритмов в проблемно-ориентированной задаче моделирования задержек превосходят традиционные методы.

Библиогр.: 17 назв. Ил.: 1. Табл.: 1.

Ключевые слова: точечное оценивание, разделение смеси распределений, трёхпараметрическое логнормальное распределение, идентифицируемость семейства распределений, проблемно-ориентированные методы, коммуникационная среда вычислительного кластера, задержки передачи сообщений, EM-алгоритм.