

1. *Днестровский Ю.Н.* О Дмитрие Павловиче Костомарове и не только. 5

Раздел I. Численные методы

2. *Капустин Н.Ю.* О базисности системы корневых функций задачи с кратным собственным значением. 11
3. *Крицков Л.В.* Сходимость спектральных разложений для сингулярного дифференциального оператора с общими краевыми условиями. 16

Раздел II. Математическое моделирование

4. *Григоренко Н.Л., Григорьева Э.В., Рой П.К., Хайлов Е.Н.* Задачи оптимального управления для математической модели лечения псориаза. 28
5. *Жалеев Т.Р., Кубышкин В.А., Мухин С.И., Рубина А.Ф., Хруленко А.Б.* Математическое моделирование кровотока в системе сосудов печени. 42
6. *Матвеев С.А., Смирнов А.П., Тыртышников Е.Е.* Влияние источника мономеров на период колебаний в модели необратимой коагуляции. 57
7. *Жилкин А.С., Сычуглов Д.Ю.* Математическое моделирование работы охлаждаемой первой стенки реактора-ТОКАМАКА. 63

Раздел III. Обратные задачи

8. *Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С.* Задачи управления системами с неопределенностью. 70
9. *Денисов А.М., Ефимов А.А.* Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения и метод её решения. 85

Раздел IV. Информатика

10. *Васин А.А., Григорьева О.М.* Энергетические рынки: оптимизация сетей передачи. 94

Ю.Н. Днестровский

О ДМИТРИИ ПАВЛОВИЧЕ КОСТОМАРОВЕ И НЕ ТОЛЬКО

Я учился на физическом факультете Московского Университета вместе с Димой Костомаровым, начиная с 1948 года. Познакомился с ним весной 1949 года, когда мы вместе с другими студентами нашего курса готовились принять участие в физкультурном параде на Красной площади по случаю праздника Первого мая. Тогда был такой обычай. Сохранилась фотография, сделанная на одной из репетиций, где Дима стоит со знаменем на третьем этаже людской пирамиды. Нам выдали всем по белому свитеру, и в перерывах основного действия мы вытворяли, что хотели. Дима был активным парнем, и мы видим его на самом верху, после дружеской борьбы за главное место. На другой фотографии мы его видим, уже пятикурсника, на демонстрации, весной 1952 года (он в лихо заломленной шляпе). Осенью этого года мы сдали экзамены в аспирантуру кафедры математики физического факультета. Научным руководителем у него был доцент кафедры Юлий Лазаревич Рабинович. Диме повезло. Юлий Лазаревич был влюблен в преподавание, несмотря на солидный возраст (я сейчас думаю, что ему было в районе шестидесяти, и мы считали его пожившим), лекции он читал с азартом. Любимой его присказкой было выражение: «Не-е-т, интеграл – это не крючок». Он был знаток обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, особенно поведения решений в окрестности особых точек. Он предложил Диме тему диссертации по этой науке, и Дима согласился. К сожалению, я не помню названия его диссертации. У меня научным руководителем был тогда еще молодой Александр Андреевич Самарский, только что сам защитивший кандидатскую диссертацию.

Мы благополучно защитились к 55-56-м годам, и встал вопрос, что делать дальше. Аспиранты, как и студенты, подлежали в те годы распределению на работу, однако, вовремя прошедшие защиты давали нам преференции, и мы были направлены на работу на физический факультет, на родную кафедру математики, на должности ассистентов (или мнс-ов, я точно не помню). Вопрос был в том, чем нам заняться в науке. И здесь, году в пятьдесят седьмом, мы пошли к Рему Хохлову.

Тогда он был уже доктором наук, но до академика ему было еще далеко. Лазеров еще не было, но работы у нас и в Америке уже шли полным ходом. Лазеров он нам не предложил, но сказал, что есть интересная область в радиофизике, где обсуждается излучение при пролете заряженных частиц мимо проводящих тел. «Вот бы и занялись ею, математикам тут есть место для работы».

Первая совместная работа с Димой на эту тему вышла у нас в 1957 году, в Докладах Академии Наук. Представил ее в ДАН Андрей Николаевич Тихонов, и мы с Димой очень гордились этим. Эта работа продолжалась у нас несколько лет, до шестидесят первого года, мы опубликовали несколько (около шести) статей, но Рем уехал в это время на полгода в Америку, после возвращения занялся лазерами, и эта работа у нас затухла.

После поездки Хрущева в Англию в 1957 году и доклада Курчатова там о работах по мирному термоядерному синтезу в Советском Союзе, требования жесткой секретности по этому направлению стали более мягкими, и появилась возможность совместной работы с сотрудниками Института Атомной Энергии (ИАЭ). Помогли нам в этом работники ИАЭ и наши друзья Лев Артеменков и Николай Семашко. Андрей Николаевич одобрил это, и был заключен Договор о сотрудничестве между ИАЭ и физическим факультетом по направлению физики плазмы. Договор этот был с деньгами (что-то около 30 тыс. рублей на всех участников в год) , что было совсем неплохо по тем временам.

Сам Андрей Николаевич заинтересовался этой тематикой. В то время еще токамаков не было (или они были в зачатке), и мы занимались прямыми установками. Где-то около 1959 года в ИАЭ была построена огромная (опять же по тем временам) установка такого типа «ОГРА», и к ней возник большой интерес (цилиндрическая установка длиной около 10 метров и диаметром около 1 – 1.5 метров). Андрей Николаевич подумал и получил результат, который был представлен (не знаю, кем) на узкий семинар в ИАЭ. Этот семинар состоялся в конце 1959 года, незадолго парад смертью Игоря Васильевича Курчатова. От МГУ на семинар были приглашены, кроме докладчика, человек 5: мы с Димой, Леша Свешников, Володя Гласко (он работал над докладом вместе с Тихоновым) и может быть еще кто-то, я забыл. Тогда было модно для описания движения частиц в магнитном поле использовать адиабатический инвариант (магнитный момент), существующий в силу радиальной симметрии

установки. Андрей Николаевич предложил вспомнить, что в этой геометрии существует и полный (а не только адиабатический) инвариант, который позволил установить дополнительные свойства траекторий частиц в такой установке. На семинаре присутствовало человек 5 от ИАЭ: И.В.Курчатов, А.М. Будкер, остальных не помню. Как только Андрей Николаевич стал говорить, Будкер вскочил и, прерывая А.Н., начал громко кричать: «А это было у меня в кандидатской диссертации». Но Курчатов, однако, надавил ему на плечо и прервал: «Сиди ! У тебя все было». Дальше наступила тишина, и А.Н. продолжил свой доклад.

К сожалению, ОГРА не смогла выполнить возложенных на нее надежд. Трудностей оказалось сразу слишком много, в частности невозможным оказалось получить требуемый высокий вакуум (порядка 10^{-9} – 10^{-10} мм ртутного столба) в такой большой установке, поэтому инжектируемые горячие заряженные частицы гибли из-за перезарядки на остаточном газе и на «носике» железной трубы, через которую происходила их инжекция. Через несколько лет ее пришлось закрыть. Были построены ОГРА-2, потом ОГРА-3 и -4, также без заметного результата. Было, в конце концов, закрыто и все направление прямых установок, так как вперед вышли тороидальные установки.

Тем временем, мы с Димой занялись проблемой распространения электромагнитных волн в плазме. На эту тему к тому времени уже существовала громадная литература, однако, мы нашли незанятые ниши, в которых и работали. Основная проблема была в учете теплового движения электронов и геометрии плазмы.

За несколько лет (1960 – 1967) мы совместно опубликовали более 25 работ. Наиболее интересным итогом этих работ было доказательство принципа, что при поперечном распространении волн хорошо поглощается обыкновенная волна на первой гармонике циклотронной частоты и необыкновенная волна на второй гармонике этой частоты.

Волны других типов поглощаются слабо (в обыкновенной волне электрическое поле волны поляризовано вдоль основного магнитного поля установки, а в необыкновенной волне – перпендикулярно). За прошедшие с того времени полвека такой принцип поглощения был проверен на многих установках.

В середине шестидесятых годов у нас с Димой встал вопрос о разделе результатов для подготовки двух докторских диссертаций. Важно было, чтобы такой раздел был логически обоснован. Сейчас я уже не

помню подробностей, но после нескольких дней дискуссий мы построили непротиворечивую логику для каждой диссертации и полюбовно разделили материал. У Д.П.Костомарова основным оппонентом был В.Д.Шафранов, а у меня – Б.Б.Кадомцев. Защиты прошли успешно в 1967 – 1968 годах.

Успех тороидальных установок, в частности, токамаков, стал ясен на Международной конференции в Новосибирске в 1968 году. После этого токамаки появились сразу во многих странах. В конце того же года Слава Стрелков привел нас с Димой Костомаровым к академику Льву Андреевичу Арцимовичу, который был тогда во главе направления токамаков в СССР. Лев Андреевич предложил нам заняться балансом энергии и частиц в токамаке. Феноменологическая схема уравнений для двух компонентной плазмы была перед этим предложена Б.Б.Кадомцевым. Нам предстояло заполнить эту систему коэффициентами переноса и разработать алгоритмы решения.

Мы хорошо поработали в 1959 году, и в конце года представили доклад по этой теме на Международной Конференции в Дубне по переносам в плазме токамака. Это была одна из первых расчетных работ в мире на эту тему.

В 1970 году А.Н.Тихонов, тогда заведующий кафедрой математики на физическом факультете, получил две вакансии на должности профессора от ректора МГУ академика И.Г. Петровского, и предложил нам с Димой подать документы для избрания на эти должности. Процедура избрания на должность профессора в те времена была такая. Когда документы готовы, сначала их рассматривает Партийный Комитет Факультета (партком). У парткома было три варианта решения: «рекомендовать», «не возражать» и «не рекомендовать». Следующая инстанция – Ученый Совет, который принимает решение тайным голосованием. Смысл решений Парткома таков. Если принято решение «рекомендовать», то все коммунисты, члены Ученого Совета, обязываются голосовать «за». Если принято решение «не возражать», то коммунисты Ученого Совета могут голосовать, «как хотят». Наконец, в случае решения «не рекомендовать», коммунисты, члены Ученого Совета, обязываются голосовать «против». В составе Ученого Совета в те времена коммунисты должны были составлять «большинство».

События развивались так. Точных дат я не помню, но, скажем, к среде на какой-то неделе все документы должны были быть поданы.

Неожиданно, в четверг, декан физического факультета В.С.Фурсов приглашает к себе А.Н.Тихонова и просит его передать Д.П.Костомарову просьбу Фурсова забрать назад представленные документы.

Тихонов в тот же день передает эту просьбу Костомарову и кроме того сообщает ему обещание Фурсова вернуться к этому делу через год. Дима думает ночь и в пятницу забирает документы. В субботу я еду домой к секретарю парткома А.А.Кузовникову (ветерану Великой Отечественной Войны) и пытаюсь выяснить причины таких действий. К сожалению, трехчасовой разговор ни к чему не привел. В понедельник состоялось заседание парткома уже по моему делу. Я не был членом парткома, и на заседании не присутствовал. Как мне позднее рассказали мои друзья, на заседании обсуждалось два решения: «рекомендовать» и «не возражать». Большинство в один голос приняло первое решение, и голос декана оказался решающим (декан всегда был членом парткома).

Прошел год, вакансия сохранялась. Андрей Николаевич Тихонов пошел к декану выяснять, что делать дальше. И здесь декан попросил неделю, чтобы выяснить обстановку. Через неделю декан сообщил А.Н.Тихонову, что он не может рекомендовать Костомарову вновь подать документы. В ответ Андрей Николаевич ответил декану, что он забирает Костомарова к себе на только что образовавшийся факультет ВМК. Таков краткий перечень событий.

Что касается подковерных причин этих событий, то они для меня ясны. На физическом факультете еще с довоенных времен сформировалась «группа консервативных профессоров». Я могу с большой долей уверенности назвать только две фамилии из этой группы. Это профессор Ф.А.Королев (тогда заведующий кафедрой оптики) и профессор А.А.Соколов (прежний, до 1954 года, декан физического факультета). Конечно, у них было много сочувствующих. Эта группа много сделала, чтобы в сталинские времена изгнать из факультета многих ученых и преподавателей. После смерти Сталина и комсомольской конференции физфака осенью 1953 года, в начале 1954 года состоялось решение секретариата ЦК партии по физическому факультету. Сменился декан, вернулись на преподавание академики Ландау, Кикоин и другие, сила «группы консервативных профессоров» ослабла. Но к семидесятому году они опять окрепли и могли влиять на декана, В.С.Фурсова, особенно в вопросе подбора талантов на факультет. Такой сильный и независимый

человек, как Д.П.Костомаров, был им ни к чему. А нас было двое, и этого они не могли допустить.

Таким образом, мы с Димой были разделены ходом событий. А я остался на кафедре математики, почти единственным, работающим в области физики плазмы. Наш семинар по физике плазмы постепенно перебрался с физфака на ВМК, а я в 1974 году ушел из МГУ в ИАЭ.

Примерно в 1977 году на одной из Звенигородских конференций мы с Димой разговорились с Матвеем Самсоновичем Рабиновичем. Он был в те годы руководителем термоядерных работ в ФИАНе (ныне ИОФАН РАН). Смысл разговора был такой: «Что же вы бездельничаете» сказал он, «пора бы вам написать книгу о математических моделях и расчетах в физике плазмы». Мы призадумались и согласились с Матвеем Самсоновичем. Заключили договор с издательством Наука, получили поддержку от Рабиновича и засели за работу, как 10 лет назад. У Димы был опыт работы с кинетическим уравнением, содержащим оператор столкновений в форме Ландау. Этот раздел он и взялся написать. Мне достался раздел по транспортным моделям. Остальные разделы писали совместно.

Работа потребовала четыре года, и книга вышла в свет только в 1982 году. Тираж ее был немаленький (4 000 экз.), но она быстро разошлась. В 1986 году в издательстве Springer вышел ее английский перевод. В 1993 году второе издание книги на русском языке вышло в России.

В девяностых годах Дмитрий Павлович стал деканом факультета ВМК и заседания нашего семинара стали проходить в его кабинете. Несмотря на занятость организационными делами, он продолжал работать в физике плазмы. Последняя наша совместная работа в этой области была опубликована в журнале «Физика плазмы» в 2014 году под названием «Модификация транспортной модели канонических профилей на основе новых экспериментов на установке DIII-D». Между датой выхода этой статьи и нашей первой совместной работы (1957) прошло 57 лет.

Раздел I. Численные методы

Н.Ю. Капустин

О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ С КРАТНЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ*

В работе [1] рассмотрена спектральная задача:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(1) = d\lambda u(1), \quad (2)$$

где d – любое комплексное число, отличное от нуля. Эта задача имеет собственные функции:

$$u_n(x) = \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad (3)$$

$-\pi/2 < \arg \sqrt{\lambda_n} \leq \pi/2$, где собственные числа λ_n , $n=1,2,3,\dots$ являются занумерованными в порядке возрастания их абсолютных величин корнями характеристического уравнения:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -d\sqrt{\lambda}. \quad (4)$$

Установлены результаты: если $d \neq 1$ и $d \notin \{-\operatorname{tg} z / z\}$, где $\{z\}$ – множество (комплексных) корней уравнения:

$$1 - \frac{\sin z \cos z}{z} = 0, \quad (5)$$

то система $\{u_n(x)\}$, $n=1,2,\dots,m-1,m+1,\dots$ собственных функций (3) задачи (1)-(2) без любой собственной функции является базисом в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$. Если $d = -\operatorname{tg} z / z$, где комплексное число z – любой корень уравнения (5), то вся система (3) собственных функций задачи (1)-(2) образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$. В этом случае один из корней уравнения (4) $\lambda_l = z^2$ имеет кратность два. Если заменить собственную функцию с номером l присоединенной функцией

$$v_l(x) = \alpha \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) + \frac{x}{2\sqrt{\lambda_l}} \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_l} x),$$

где α – произвольное комплексное число, функция $v_l(x)$ является решением задачи:

$$v_l''(x) + \lambda v_l(x) = u_l(x), \quad x \in (0,1),$$

* Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00847 и 17-51-18042).

$$v_l'(0) = 0, \quad -\frac{v_l'(1)}{d} + \lambda_l v_l(1) = u_l(1),$$

то при $\alpha \neq \frac{d}{6(d+1)}$ система корневых функций задачи (1)-(2) так же

образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$. При $\alpha = \frac{d}{6(d+1)}$ эта система

не полна и не минимальна. При $p = 2$ каждый из рассмотренных базисов базисом Рисса. Доказательства проведены по схеме, разработанной в работе [2]. Для каждого базиса построена биортогонально сопряженная система.

Здесь мы рассматриваем случай кратного комплексного собственного значения при наличии собственной и присоединенной функций из корневого подпространства и удалении одной собственной функции с простым собственным значением. Пусть, по-прежнему, l – номер кратного собственного значения, а m – номер удаленной собственной функции (не ограничивая общности, считаем $l < m$). Составим следующую систему $\{u_n(x)\}$:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_n} x), \quad n = 1, \dots, l, m+1, \dots, \\ u_{l+1}(x) &= \alpha \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) + \frac{x}{2\sqrt{\lambda_l}} \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_l} x), \\ u_n(x) &= \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_{n-1}} x), \quad n = l+2, \dots, m, \end{aligned}$$

где α – произвольное комплексное число. Биортогонально сопряженная к ней система $\{\bar{\Psi}_n(x)\}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_n(x) &= \frac{\sqrt{2}}{1 + d \cos^2 \sqrt{\lambda_n}} \left(\cos(\sqrt{\lambda_n} x) - \frac{\cos \sqrt{\lambda_n}}{\cos \sqrt{\lambda_m}} \cos(\sqrt{\lambda_m} x) \right), \quad n = 1, \dots, l-1, m+1, \dots, \\ \bar{\Psi}_l(x) &= \sqrt{2} A \left(\cos(\sqrt{\lambda_m} x) - \frac{\cos \sqrt{\lambda_m}}{\cos \sqrt{\lambda_l}} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) \right) + \\ &\quad + \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) + \frac{\sqrt{2} x}{d \sqrt{\lambda_l}} \sin(\sqrt{\lambda_l} x), \\ \bar{\Psi}_{l+1}(x) &= \sqrt{2} C \left(\cos(\sqrt{\lambda_m} x) - \frac{\cos \sqrt{\lambda_m}}{\cos \sqrt{\lambda_l}} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) \right), \\ \bar{\Psi}_n(x) &= \frac{\sqrt{2}}{1 + d \cos^2 \sqrt{\lambda_{n-1}}} \left(\cos(\sqrt{\lambda_{n-1}} x) - \frac{\cos \sqrt{\lambda_{n-1}}}{\cos \sqrt{\lambda_m}} \cos(\sqrt{\lambda_m} x) \right), \quad n = l+2, \dots, m, \end{aligned}$$

где постоянные A и C определяются по формулам:

$$C = -\frac{2 \cos \sqrt{\lambda_l}}{d \cos \sqrt{\lambda_m}}, \quad A = \frac{2 \cos \sqrt{\lambda_l}}{d \cos \sqrt{\lambda_m}} \left(\alpha - \frac{d}{6(1+d)} \right).$$

В этом нетрудно убедиться, так как в случае кратного корня λ_l очевидно, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{\lambda_l} \cos \sqrt{\lambda_l} &= \sqrt{\lambda_l}, \quad 1 + d \cos^2 \sqrt{\lambda_l} = 0, \quad 1 + d = -d^2 \lambda_l, \\ \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_m} x) \cos(\sqrt{\lambda_l} x) dx + d \cos \sqrt{\lambda_m} \cos \sqrt{\lambda_l} &= 0, \\ \int_0^1 \cos^2(\sqrt{\lambda_l} x) dx + d \cos^2 \sqrt{\lambda_l} &= 0. \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство верно и для любых различных корней характеристического уравнения (4). Используя их, получаются формулы:

$$2 \int_0^1 x \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \cos(\sqrt{\lambda_l} x) dx = \frac{1+d}{d \sqrt{\lambda_l}}, \quad (6)$$

$$\int_0^1 x \sin(\sqrt{\lambda_m} x) \cos(\sqrt{\lambda_l} x) dx = -d \sin \sqrt{\lambda_l} \cos \sqrt{\lambda_l}, \quad (7)$$

$$2 \int_0^1 x^2 \sin^2(\sqrt{\lambda_l} x) dx = -\frac{2}{3} - d. \quad (8)$$

Действительно, докажем, например, формулу (6):

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 x \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \cos(\sqrt{\lambda_l} x) dx &= \int_0^1 x \sin(2\sqrt{\lambda_l} x) dx = \\ &= -\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{\lambda_l}} d(\cos(2\sqrt{\lambda_l} x)) = -\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_l})}{2\sqrt{\lambda_l}} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_l}} \int_0^1 \cos(2\sqrt{\lambda_l} x) dx = \\ &= -\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_l})}{2\sqrt{\lambda_l}} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_l})}{4\lambda_l} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} - \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda_l}}{\sqrt{\lambda_l}} = \frac{1+d}{d \sqrt{\lambda_l}}. \end{aligned}$$

Итак, для определения постоянной C нам необходимо вычислить интеграл:

$$C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \int_0^1 x \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \left(\cos(\sqrt{\lambda_m} x) - \frac{\cos \sqrt{\lambda_m}}{\cos \sqrt{\lambda_l}} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) \right) dx,$$

а постоянную A получить из соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} + 2\alpha \int_0^1 \cos(\sqrt{\lambda_l} x) \left(\cos(\sqrt{\lambda_l} x) + \frac{x}{d \sqrt{\lambda_l}} \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \right) dx + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \int_0^1 x \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \left(\cos(\sqrt{\lambda_m} x) + \frac{x}{d \sqrt{\lambda_l}} \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

Используя равенства (6)-(8), получаем формулы для коэффициентов A и C .

Теорема 1. Если $d = -tg z / z$, где комплексное число z – любой корень уравнения $1 - \frac{\sin z \cos z}{z} = 0$, то система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, корневых функции задачи (1)-(2) с собственной функцией $u_l(x)$ и отвечающей ей произвольной присоединенной функцией $u_{l+1}(x)$ для кратного собственного значения $\lambda_l = z^2$ без любой другой собственной функции $u_m(x)$ образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$).

Если в рассмотренной системе корневых функций вместо собственной функции на месте с номером l взять другую присоединенную функцию, т.е.

$$u_{l+1}(x) = \beta \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) + \frac{x}{2\sqrt{\lambda_l}} \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_l} x),$$

где β – любое комплексное число, отличное от числа α , то в биортогонально сопряженной системе изменятся две функции с номерами l и $l+1$.

Функция с номером l будет иметь вид:

$$\bar{\Psi}_l(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \left[\frac{2\sqrt{2} \cos \sqrt{\lambda_l}}{d \cos \sqrt{\lambda_m}} \left(\alpha - \frac{d}{6(1+d)} \right) \left(\cos(\sqrt{\lambda_m} x) - \frac{\cos \sqrt{\lambda_m}}{\cos \sqrt{\lambda_l}} \cos(\sqrt{\lambda_l} x) \right) + \sqrt{2} \left(\cos(\sqrt{\lambda_l} x) + \frac{x}{d\sqrt{\lambda_l}} \sin(\sqrt{\lambda_l} x) \right) \right],$$

а у функции $\bar{\Psi}_{l+1}(x)$ следует поменять местами параметры α и β (в силу симметрии).

Теорема 2. Если $d = -tg z / z$, где комплексное число z – любой корень уравнения $1 - \frac{\sin z \cos z}{z} = 0$, то система $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, корневых функций задачи (1)-(2) с присоединенными функциями $u_l(x)$ и $u_{l+1}(x)$ для кратного собственного значения $\lambda_l = z^2$ без собственных функций, соответствующих собственным значениям с номерами l и $m \neq l$, образует базис в пространстве $L_p(0,1)$, $p > 1$ (базис Рисса при $p = 2$).

Доказательство приведенных теорем проводится по схеме, разработанной в работе [2].

Замечание. При $p = -1$ задача (1)-(2) имеет кратный корень, равный нулю. Этот случай подробно исследован в работе [3].

Литература

1. Капустин Н.Ю. О задаче с граничным условием второго рода, комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии. Дифференциальные уравнения, 2014, Т. 50, № 10, с. 1398-1401.
2. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии. Дифференциальные уравнения, 2000, Т. 36, № 10, с. 1357-1360.
3. Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. Доклады РАН, 2002, Т. 385, № 1. с. 20-24.

Л.В. Крицков

СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ОБЩИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Настоящая работа посвящена исследованию спектральных свойств задач, порождаемых дифференциальной операцией

$$lu = -u'' + q(x)u \quad (1)$$

на конечном интервале $(0,1)$ с, вообще говоря, комплекснозначным коэффициентом $q(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_0^1 x(1-x)|q(x)| dx < \infty. \quad (2)$$

Далее будем считать, что

$$\int_0^1 |q(x)| dx = \infty, \quad (3)$$

тем самым, дифференциальная операция (1) является сингулярной.

Для сингулярной операции (1) рассматривается общая краевая задача, причем, так как множество $\mathcal{D}_{max} = \{u \in W_{1,loc}^2(0,1), lu \in L_2(0,1)\}$ содержит функции, не имеющие производных на концах интервала задания, классические граничные функционалы заменяются на функционалы общего вида.

Регулярный случай, т.е. тот, в котором интеграл (3) конечен, хорошо изучен [1,2]. Исследования сингулярных операторов с особой точкой типа «предельного круга» на конечном интервале встречаются реже. F.Atkinson, C.Fulton в [3] для самосопряженного оператора (1), (2) с распадающимися краевыми условиями изучили асимптотику собственных значений. Исследования P.Bailey, W.Everitt, A.Krall, A.Zettl (см., например, [4,5]) продолжили обсуждение различных аспектов самосопряженной теории для (1) в общей ситуации. В [6] рассмотрены несамосопряженные расширения операторов, подобных (1), (2), а G.Freiling, В.А.Юрко [7,8] получили теоремы о разложении по корневым (т.е. собственным и присоединенным) функциям для несамосопряженных дифференциальных операторов любого четного порядка с регулярной особой точкой и достаточно гладкими коэффициентами. В [9] анонсирован результат о безусловной базисности корневых функций оператора (1), (2) с произвольными распадающимися краевыми условиями.

Основным результатом настоящей работы является получение асимптотики собственных значений и доказательство полноты и безусловной базисности в $L_2(0,1)$ системы корневых функций общей краевой задачи для операции (1) с коэффициентом, удовлетворяющим лишь условиям (2), (3).

Первая часть рассматривает постановку задачи, приведены основные свойства решений связанных с (1) уравнений. Во второй части получена асимптотика линейно независимых решений уравнения $lu = \mu^2 u$ с достаточно большим по модулю комплексным параметром μ . В заключительной третьей части выведены основные результаты работы.

1. Постановка задачи

Опишем свойства решений уравнения

$$lu = \mu^2 u + f, \quad (4)$$

в котором $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_1(0,1)$ (под решением будем понимать любую функцию $u = u(x) \in W_{1,loc}^2(0,1)$, удовлетворяющую (4) почти всюду на $(0,1)$).

Непосредственное интегрирование по частям показывает, что любое решение уравнения (4) удовлетворяет соотношению

$$u(x \pm t) = u(x) \cos \mu t \pm u'(x) \frac{1}{\mu} \sin \mu t + \int_0^t (u(x \pm \tau)q(x \pm \tau) - f(x \pm \tau)) \frac{1}{\mu} \sin \mu(t - \tau) d\tau, \quad (5)$$

где $x \in (0,1)$, $t < \min(x, 1 - x)$ (здесь, если $\mu = 0$, то величины $\frac{1}{\mu} \sin \mu z$ следует заменить на z).

Соотношение (5) и неравенство $\left| \frac{1}{\mu} \sin \mu z \right| \leq |z| \exp(|\operatorname{Im} \mu z|)$ показывают, что все решения $u(x)$ уравнения (4) абсолютно непрерывны вплоть до концов интервала $(0,1)$.

Отметим далее, что коэффициент $q(x)$ в (1), для которого выполнены условия (2), (3), удовлетворяет следующим свойствам.

Лемма 1. 1) *Справедливы соотношения*

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \int_x^{1/2} |q(\xi)| d\xi = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \int_{1/2}^x |q(\xi)| d\xi = 0.$$

2) *Интегралы*

$$\int_0^{1/2} d(\mu, \xi) |q(\xi)| d\xi, \quad \int_{1/2}^1 d(\mu, 1 - \xi) |q(\xi)| d\xi,$$

в которых $d(\mu, \xi) = \min(|\mu|^{-1}, \xi)$, стремятся к нулю при $|\mu| \rightarrow \infty$.

Равенства пункта 1 леммы 1 вытекают из оценок интеграла $\int_x^{1/2} \int_t^{1/2} |q(\xi)| d\xi dt$ при x , большем и меньшем $1/2$, и теоремы Лебега.

Утверждение же пункта 2 есть следствие, например, равенства

$$\int_0^{1/2} d(\mu, \xi) |q(\xi)| d\xi = \int_0^{|\mu|^{-1}} \xi |q(\xi)| d\xi + |\mu|^{-1} \int_{|\mu|^{-1}}^{1/2} |q(\xi)| d\xi,$$

и соотношений пункта 1.

Результат дифференцирования соотношения (5) по t и лемма 1, кроме того, позволяют утверждать, что любое решение $u(x)$ уравнения (4) таково, что $\lim_{x \rightarrow 0+0} xu'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)u'(x) = 0$.

Обозначим через $\omega(\mu)$ сумму интегралов пункта 2 леммы 1. Бесконечно малая при $|\mu| \rightarrow \infty$ величина $\omega(\mu)$ будет часто использоваться в асимптотических оценках ниже. Отметим, что если интеграл (3) расходится, то

$$|\mu|\omega(\mu) \geq c_0 > 0, \quad (6)$$

так как при достаточно больших $|\mu|$ справедливо неравенство $|\mu|\omega(\mu) \geq \int_{|\mu|^{-1}}^{1-|\mu|^{-1}} |q(\xi)| d\xi \geq 1$.

Величина $\omega(\mu)$ может сколько угодно медленно стремиться к нулю при $|\mu| \rightarrow \infty$, ведь, например, при $1 \leq \nu < 2$ коэффициент $q(x) = x^{-\nu}$ удовлетворяет (2) и при этом $\omega(\mu) \sim c|\mu|^{\nu-2}$.

Для построения общих граничных форм (см. [10, XIII.2]) введем следующие решения уравнения $lu = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x): \varphi_0(0) = 1, & \quad \varphi_1(x): \varphi_1(1) = 1, \\ \psi_0(x): \psi_0(0) = 0, \psi'_0(0) = 1, & \quad \psi_1(x): \psi_1(1) = 0, \psi'_1(1) = 1. \end{aligned}$$

Существование решений $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ не вызывает сомнений в силу интегрального соотношения (5). Что же касается решений $\psi_0(x), \psi_1(x)$, то в достаточно малых окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ справедливы равенства $\psi_0(x) = \varphi_0(x) \int_0^x \varphi_0^{-2}(\xi) d\xi$, $\psi_1(x) = \varphi_1(x) \int_x^1 \varphi_1^{-2}(\xi) d\xi$, а на компактах интервала $(0,1)$ можно снова воспользоваться (5).

Решения $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ линейно независимы, а следовательно, линейные функционалы

$$A_0[u] = -[u, \overline{\varphi_0}](0), \quad B_0[u] = [u, \overline{\psi_0}](0), \quad (7)$$

где $[u, v](x) = u(x)\overline{v'(x)} - u'(x)\overline{v(x)}$, также линейно независимы.

Очевидно, что в (7) $B_0[u] = u(0)$. Конечность же функционала $A_0[u]$ на множестве \mathcal{D}_{max} следует из тождества Лагранжа

$$\int_a^b lu(x) \overline{v(x)} dx = [u, v](b) - [u, v](a) + \int_a^b u(x) \overline{l^*v(x)} dx, \quad (8)$$

где $l^*v = -v'' + \overline{q(x)}v$, записанного для $a = 0, b = 1/2$ и $v(x) = \overline{\varphi_0(x)}$, и очевидного равенства

$$[u, v](0) = -A_0[u]\overline{v(0)} + u(0)A_0[\overline{v}].$$

Тем самым,

$$A_0[u] = -[u, \overline{\varphi_0}](1/2) + \int_0^{1/2} lu(x) \varphi_0(x) dx.$$

Аналогично на множестве \mathcal{D}_{max} вводятся граничные функционалы A_1 и B_1 :

$$A_1[u] = -[u, \overline{\varphi_1}](1), \quad B_1[u] = [u, \overline{\psi_1}](1) \equiv u(1). \quad (9)$$

Рассмотрим общую краевую задачу для выражения (1) с краевыми условиями

$$\Gamma_1(u) = 0, \quad \Gamma_2(u) = 0, \quad (10)$$

где линейно независимые граничные формы Γ_1 и Γ_2 определяются равенствами

$$\Gamma_k(u) = a_{k0}A_0[u] + a_{k1}A_1[u] + b_{k0}u(0) + b_{k1}u(1), \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

с комплексными постоянными a_{ij}, b_{ij} .

Обозначим через \mathcal{L} замкнутый в $L_2(0,1)$ оператор, отвечающий на подпространстве функций из \mathcal{D}_{max} , удовлетворяющих (10), дифференциальной операции (1).

Отметим, что из тождества Лагранжа (8) с $a = 0, b = 1$ следует, что сопряженный оператор \mathcal{L}^* будет соответствовать дифференциальной операции l^* и краевым условиям $\Gamma_k^*(v) = 0, k = 1, 2$, вида, аналогичного (11).

Несложно обосновать следующий результат.

Лемма 2. *Краевые условия (10) могут быть сведены к одному из следующих трех типов:*

1) условия Дирихле

$$u(0) = u(1) = 0; \quad (12)$$

здесь сопряженные условия имеют тот же вид

$$v(0) = v(1) = 0; \quad (13)$$

2) условия

$$\begin{cases} A_0[u] + b_{10}u(0) + b_{11}u(1) = 0, \\ A_1[u] + b_{20}u(0) + b_{21}u(1) = 0; \end{cases} \quad (14)$$

здесь сопряженные условия имеют вид

$$\begin{cases} A_0^*[v] + \overline{b_{10}}v(0) - \overline{b_{20}}v(1) = 0, \\ A_1^*[v] - \overline{b_{11}}v(0) + \overline{b_{21}}v(1) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где $A_0^*[v] = -[v, \varphi_0](0), A_1^*[v] = -[v, \varphi_1](1);$

3) условия

$$\begin{cases} a_{10}A_0[u] + a_{11}A_1[u] + b_{10}u(0) + b_{11}u(1) = 0, \\ b_{20}u(0) + b_{21}u(1) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

в которых $|a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 = 1, |b_{20}|^2 + |b_{21}|^2 = 1;$ здесь сопряженные условия имеют вид

$$\begin{cases} \overline{b_{21}}A_0^*[v] + \overline{b_{20}}A_1^*[v] + \begin{vmatrix} b_{10} & b_{11} \\ b_{20} & b_{21} \end{vmatrix} (a_{10}v(0) - a_{11}v(1)) = 0, \\ \overline{a_{11}}v(0) + \overline{a_{10}}v(1) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

2. Асимптотика решений

Будем, не ограничивая общности, считать, что $\arg \mu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и изучим асимптотику решений уравнения (4) с нулевой правой частью,

рассматривая по-отдельности сектора $\{\mu \in \mathbb{C}: \arg \mu \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ и $\{\mu \in \mathbb{C}: \arg \mu \in (-\frac{\pi}{2}, 0]\}$.

Пусть далее $\arg \mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$ и c – произвольное число из интервала $(0, 1)$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Уравнение $lu = \mu^2 u$ имеет два линейно независимых решения $u_1(x), u_2(x)$, которые аналитически зависят от μ и при $|\mu| \rightarrow \infty$ удовлетворяют равенствам

$$u_1(x) = \exp(i\mu(x - c)) (1 + \gamma_1(x, \mu)), \quad (18)$$

$$u_2(x) = \exp(-i\mu(x - c)) (1 + \gamma_2(x, \mu)), \quad (19)$$

где $\gamma_1(x, \mu), \gamma_2(x, \mu)$ есть $O(\omega(\mu))$ равномерно по $x \in [0, 1]$.

Замечание. Результат теоремы 1 повторяет классический результат [2, §4.5] для операции l с суммируемым коэффициентом $q(x)$. Разница лишь в том, что оценка остаточных членов вида $O(|\mu|^{-1})$ заменена на более слабую $O(\omega(\mu))$ и здесь не представляется возможным получить равномерные на $[0, 1]$ асимптотические равенства для $u_1'(x)$ и $u_2'(x)$ – классические асимптотики для производных справедливы только равномерно на каждом компакте интервала $(0, 1)$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим интегральное соотношение (5) при $x = c$, выбранном знаке $\llcorner\lrcorner$ и укажем условия в точке $x = c$ так, чтобы решение (5) имело вид

$$u(c - t) = \exp(-i\mu t) \varphi(t), \quad (20)$$

где $\varphi(t) = 1 + o(1)$ при $|\mu| \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, c]$.

Пусть

$$u(c) + (i\mu)^{-1} u'(c) = 2, \quad u(c) - (i\mu)^{-1} u'(c) = 2\alpha(\mu), \quad (21)$$

где $\alpha(\mu)$ – произвольная бесконечно малая при $|\mu| \rightarrow \infty$. Тогда $\varphi(t)$ из (20) удовлетворяет соотношению

$$\varphi(t) = 1 + e^{2i\mu t} \alpha(\mu) + \int_0^t \varphi(\tau) q(c - \tau) \frac{1}{\mu} \sin \mu(t - \tau) e^{i\mu(t - \tau)} d\tau, \quad (22)$$

причем интеграл правой части по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq \tau \leq t} |\varphi(\tau)| \int_0^t d(\mu, t - \tau) |q(c - \tau)| d\tau &\leq \max_{0 \leq \tau \leq c} |\varphi(\tau)| \int_0^c d(\mu, \xi) |q(\xi)| d\xi = \\ &= O(\omega(\mu)) \max_{0 \leq \tau \leq c} |\varphi(\tau)|. \end{aligned}$$

Поэтому при достаточно больших по модулю значениях μ уравнение (22) имеет решение, удовлетворяющее оценке

$$\varphi(t) = 1 + O(|\alpha(\mu)| + \omega(\mu)). \quad (23)$$

Теперь укажем условия в точке $x = c$ так, чтобы решение (5) имело вид

$$u(c - t) = \exp(i\mu t) \psi(t), \quad (24)$$

где $\psi(t) = 1 + o(1)$ при $|\mu| \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, c]$.

Пусть¹

$$\begin{aligned} u(c) - (i\mu)^{-1}u'(c) &= 2, \\ u(c) + (i\mu)^{-1}u'(c) &= -2e^{2i\mu c} \int_0^c \psi(\tau)q(c-\tau) \frac{1}{2i\mu} (1 - e^{-2i\mu(c-\tau)}) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда $\psi(t)$ из (24) будет удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 1 - \frac{1}{2i\mu} (1 - e^{2i\mu(c-t)}) \int_0^t \psi(\tau)q(c-\tau) d\tau - \\ &\quad - \int_t^c \psi(\tau)q(c-\tau) \frac{1}{2i\mu} (e^{2i\mu(c-t)} - e^{2i\mu(\tau-t)}) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь модуль второго слагаемого правой части не превосходит

$$d(\mu, c-t) \int_0^t |\psi(\tau)||q(c-\tau)| d\tau \leq \max_{0 \leq \tau \leq c} |\psi(\tau)| \int_0^c d(\mu, \xi)|q(\xi)| d\xi,$$

а разность экспонент в третьем слагаемом по модулю не больше $2|\mu|d_0(\mu, c-\tau)$. Поэтому при $|\mu| \rightarrow \infty$ уравнение (26) имеет решение

$$\psi(t) = 1 + O(\omega(\mu)). \quad (27)$$

Таким образом, в силу (23) и (27) при $0 < x \leq c$ получены два линейно независимых решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ с асимптотиками (18) и (19).

Точно так же на полуинтервале $c \leq x < 1$ используем соотношение (5) с $x = c$ и выбранным знаком «+». Первое решение $u_1(x)$ ищем в виде $u(c+t) = \exp(i\mu t) \varphi(t)$, полагая

$$\begin{aligned} u(c) + (i\mu)^{-1}u'(c) &= 2, \\ u(c) - (i\mu)^{-1}u'(c) &= -2e^{2i\mu(1-c)} \int_0^{1-c} \varphi(\tau)q(c+\tau) \frac{1 - e^{-2i\mu(1-c-\tau)}}{2i\mu} d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$

Тогда $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 + \frac{1}{2i\mu} (1 - e^{2i\mu(1-c-t)}) \int_0^t \varphi(\tau)q(c+\tau) d\tau - \\ &\quad - \int_t^{1-c} \varphi(\tau)q(c+\tau) \frac{1}{2i\mu} (e^{2i\mu(1-c-t)} - e^{2i\mu(\tau-t)}) d\tau, \end{aligned} \quad (29)$$

откуда аналогичным (26) образом получим, что

$$\varphi(t) = 1 + O(\omega(\mu)), \quad (30)$$

и следовательно,

$$u_1(x) = e^{i\mu(x-c)} \left(1 + O(\omega(\mu)) \right). \quad (31)$$

Отметим, что правая часть второго равенства (28) является величиной $O(\omega(\mu))$, и значит, бесконечно малой при $|\mu| \rightarrow \infty$. Поэтому если выбрать $\alpha(\mu)$ в (21) равной этой правой части, то в силу (23) построенные с

¹ Второе условие является у некотором смысле нормировочным для $\psi(t)$.

помощью уравнений (22) и (29) функции $\varphi(t)$ дают решение $u_1(x)$ на всем интервале $(0,1)$ с равномерной асимптотикой (31).

Из (29) и (30), кроме того, следует, что

$$u_1(1) = e^{i\mu(1-c)}, \quad u_1(0) = 1 + O(\omega(\mu)). \quad (32)$$

Второе решение $u_2(x)$ ищем при $c \leq x < 1$ в виде $u(c+t) = e^{-i\mu t}\psi(t)$. Полагая

$$u(c) - (i\mu)^{-1}u'(c) = 2, \quad u(c) + (i\mu)^{-1}u'(c) = 2\beta(\mu),$$

где $\beta(\mu)$ – бесконечно малая при $|\mu| \rightarrow \infty$, получим, что $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(t) = 1 + e^{2i\mu t}\beta(\mu) + \int_0^t \psi(\tau)q(c+\tau) \frac{1}{\mu} \sin \mu(t-\tau) e^{i\mu(t-\tau)} d\tau, \quad (33)$$

откуда аналогично (22) вытекает оценка

$$\psi(t) = 1 + O(|\beta(\mu)| + \omega(\mu)).$$

Если выбрать $\beta(\mu)$ равной правой части второго равенства (25), то построенные здесь и в (26) функции $\psi(t)$ дают решение $u_2(x)$ на всем интервале $(0,1)$, которое имеет равномерную асимптотику

$$u_2(x) = e^{-i\mu(x-c)} \left(1 + O(\omega(\mu))\right). \quad (34)$$

Отметим также, что

$$u_2(0) = e^{i\mu c}, \quad u_2(1) = 1 + O(\omega(\mu)). \quad (35)$$

Теорема 1 доказана.

Исследуем теперь асимптотическое поведение функционалов A_0 и A_1 на построенных в теореме 1 линейно независимых решениях уравнения $lu = \mu^2 u$.

Теорема 2. Для решений $u_1(x), u_2(x)$, построенных в теореме 1, при $|\mu| \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$A_0[u_1] = i\mu e^{-i\mu c} \left(1 + O(\omega(\mu))\right), \quad A_0[u_2] = -i\mu e^{i\mu c} \left(1 + O(\omega(\mu))\right), \\ A_1[u_1] = i\mu e^{i\mu(1-c)} \left(1 + O(\omega(\mu))\right), \quad A_1[u_2] = -i\mu e^{-i\mu(1-c)} \left(1 + O(\omega(\mu))\right).$$

Доказательство теоремы 2 проведем только для функционала A_1 .

Для анализа величины $A_1[u_1]$ используем представление $u_1(c+t) = e^{i\mu t}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ удовлетворяет (29) и (30).

Продифференцируем соотношение (5) по t при $x = c$ и учтем условия (28):

$$\frac{1}{i\mu} e^{-i\mu t} u_1'(c+t) \\ = 1 + \frac{1}{i\mu} \int_0^t \varphi(\tau)q(c+\tau) d\tau + \frac{e^{2i\mu(1-c-t)} - 1}{2i\mu} \int_0^t \varphi(\tau)q(c+\tau) d\tau \\ + \int_t^{1-c} \varphi(\tau)q(c+\tau) \frac{e^{2i\mu(1-c-t)} - e^{2i\mu(\tau-t)}}{2i\mu} d\tau.$$

Отсюда, с учетом (29), получим

$$e^{-i\mu t} u_1'(c+t) = i\mu(2 - \varphi(t)) + \int_0^t \varphi(\tau) q(c+\tau) d\tau. \quad (36)$$

Для используемого в определении (9) функционала A_1 решения $\varphi_1(x)$ применим соотношение (5) с $x=c$, $\mu=0$ и тот факт, что $\varphi_1(1)=1$. Тогда, дифференцируя обе его части по t , получим

$$\varphi_1'(c+t) = \varphi_1'(c) + \int_0^t \varphi_1(c+\tau) q(c+\tau) d\tau. \quad (37)$$

Выясним поведение при $x \rightarrow 1-0$ используемого в $A_1[u_1]$ выражения $-u_1(c+t)\varphi_1'(c+t) + u_1'(c+t)\varphi_1(c+t)$. В силу (36) и (37) оно равно

$$\begin{aligned} & -e^{i\mu t} \varphi(t) \varphi_1'(c) + e^{i\mu t} i\mu \varphi_1(c+t)(2 - \varphi(t)) \\ & - e^{i\mu t} \left(\varphi(t) \int_0^t \varphi_1(c+\tau) q(c+\tau) d\tau - \varphi_1(c+t) \int_0^t \varphi(\tau) q(c+\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Здесь при $t \rightarrow 1-0$ первое слагаемое в силу (32) стремится к $-e^{i\mu(1-c)} \varphi_1'(c)$, а второе – к $e^{i\mu(1-c)} i\mu$. Покажем теперь, что разность $\Phi(t)$, стоящая в последних круглых скобках, есть $|\mu|O(\omega(\mu))$ равномерно по $t \in (0, 1-c)$. В таком случае мы окончательно получим требуемую оценку для $A_1[u_1]$, так как справедливо (6).

Итак, $\Phi(0) = 0$, и для $\Phi'(t)$ (в силу (36) и (37)) имеем

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \varphi'(t) \int_0^t \varphi_1(c+\tau) q(c+\tau) d\tau - \varphi_1'(c+t) \int_0^t \varphi(\tau) q(c+\tau) d\tau \\ &= 2i\mu(1 - \varphi(t)) \int_0^t \varphi_1(c+\tau) q(c+\tau) d\tau - \varphi_1'(c) \int_0^t \varphi(\tau) q(c+\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_0^t 2i\mu(1 - \varphi(\tau)) \int_0^\tau \varphi_1(c+\xi) q(c+\xi) d\xi d\tau \\ & - \varphi_1'(c) \int_0^t \int_0^\tau \varphi(\xi) q(c+\xi) d\xi d\tau \equiv \Phi_1(t) - \Phi_2(t). \end{aligned}$$

Из равенства (29) следует, что при $0 \leq \tau \leq 1-c$

$$|\mu(1 - \varphi(\tau))| \leq |\mu|O(\omega(\mu)) \max_{0 \leq \xi \leq 1-c} |\varphi(\xi)|,$$

и, значит, $|\Phi_1(t)| = |\mu|O(\omega(\mu))$. Для $\Phi_2(t)$ сразу же получим оценку

$$\begin{aligned} |\Phi_2(t)| &\leq |\varphi_1'(c)| \max_{0 \leq \xi \leq 1-c} |\varphi(\xi)| \int_0^{1-c} \int_0^\tau |q(c+\xi)| d\xi d\tau \\ &= O(1) = |\mu|O(\omega(\mu)). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к оценке величины $A_1[u_2]$ для решения $u_2(x)$, имеющего представление $u_2(c+t) = e^{-i\mu t} \psi(t)$. Дифференцируя по t уравнение (33), получим

$$\begin{aligned} \frac{-1}{i\mu} e^{i\mu t} u_2'(c+t) &= 1 - e^{2i\mu t} \beta(\mu) - \frac{1}{i\mu} \int_0^t \psi(\tau) q(c+\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \psi(\tau) q(c+\tau) \frac{e^{2i\mu(t-\tau)} - 1}{2i\mu} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (33), придем к равенству

$$e^{i\mu t} u_2'(c+t) = -i\mu(2 - \psi(t)) + \int_0^t \psi(\tau) q(c+\tau) d\tau. \quad (38)$$

Тем самым, величина $-u_2(c+t)\varphi_1'(c+t) + u_2'(c+t)\varphi_1(c+t)$ равна

$$\begin{aligned} &-e^{-i\mu t} \psi(t) \varphi_1'(c) - i\mu e^{-i\mu t} \varphi_1(c+t)(2 - \psi(t)) \\ &- e^{-i\mu t} \left(\psi(t) \int_0^t \varphi_1(c+\tau) q(c+\tau) d\tau - \varphi_1(c+t) \int_0^t \psi(\tau) q(c+\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

При $t \rightarrow 1-c-0$ первое слагаемое в силу (35) стремится к величине $-e^{-i\mu(1-c)} \psi(1-c) \varphi_1'(c)$, второе же дает

$$-i\mu e^{-i\mu(1-c)} (2 - \psi(1-c)) = -i\mu e^{-i\mu(1-c)} (1 + O(\omega(\mu))).$$

Для доказательства требуемой оценки для $A_1[u_2]$ покажем, что разность $\Psi(t)$ в последних круглых скобках есть $|\mu|O(\omega(\mu))$ равномерно по $t \in (0, 1-c)$.

Итак, $\Psi(0) = 0$, и в силу (37) и (38) получим, что $\Psi'(t)$ равна

$$-2i\mu(1 - \psi(t)) \int_0^t \varphi_1(c+\tau) q(c+\tau) d\tau - \varphi_1'(c) \int_0^t \psi(\tau) q(c+\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= - \int_0^t 2i\mu(1 - \psi(\tau)) \int_0^\tau \varphi_1(c+\xi) q(c+\xi) d\xi d\tau \\ &\quad - \varphi_1'(c) \int_0^t \int_0^\tau \psi(\xi) q(c+\xi) d\xi d\tau \equiv \Psi_1(t) - \Psi_2(t). \end{aligned}$$

Из (38) следует, что при $0 \leq \tau \leq 1-c$

$$|\mu(1 - \psi(\tau))| \leq |\mu|O(\omega(\mu)) \max_{0 \leq \xi \leq 1-c} |\psi(\xi)|,$$

и, значит, $|\Psi_1(t)| = |\mu|O(\omega(\mu))$. Для $\Psi_2(t)$ аналогичным образом справедлива оценка: $|\Psi_2(t)| = O(1) = |\mu|O(\omega(\mu))$.

Теорема 2 полностью доказана.

3. Асимптотика спектра. Теоремы о полноте и базисности

Результат теоремы 2 показывает, что главные члены асимптотических формул для значений функционалов A_0 и A_1 совпадают с главными членами асимптотик функционалов $u'(0)$ и $u'(1)$ для соответствующих решений в регулярном случае. Это, вместе с замечанием после теоремы 1,

говорит о том, что общая краевая задача для сингулярной операции (1) далее может быть исследована по классической схеме [2, §4.9].

Анализ характеристического определителя $\begin{vmatrix} \Gamma_1[u_1] & \Gamma_1[u_2] \\ \Gamma_2[u_1] & \Gamma_2[u_2] \end{vmatrix}$ для каждого типа краевых условий (12), (14), (16) приводит к следующему утверждению.

Теорема 3. 1) В случае краевых условий 1 и 2 типов оператор \mathcal{L} обладает бесконечным числом собственных значений $\lambda_n = \mu_n^2$, причем, начиная с некоторого номера, они простые и имеет место асимптотика

$$\mu_n = \pi n + O(\omega(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

2) В случае краевых условий 3 типа и выполнения в (16) условия $a_{11}b_{20} + a_{10}b_{21} \neq 0$ оператор \mathcal{L} обладает бесконечным числом собственных значений $\lambda_n = \mu_n^2$, являющихся объединением двух последовательностей $\lambda_{n,1} = \mu_{n,1}^2$ и $\lambda_{n,2} = \mu_{n,2}^2$, в которых

$$\mu_{n,j} = 2\pi n - i \ln s_j + O(\omega(n)), \quad j = 1, 2, \quad n \rightarrow \infty,$$

где s_1, s_2 – корни уравнения

$$s + s^{-1} = -2 \frac{a_{10}b_{20} + a_{11}b_{21}}{a_{11}b_{20} + a_{10}b_{21}}.$$

Если выполнены дополнительные условия

$$a_{10}^2 \neq a_{11}^2, \quad b_{20}^2 \neq b_{21}^2, \quad (39)$$

то все собственные значения λ_n , начиная с некоторого номера, простые. Если же хотя одно условие (39) нарушается, то собственные значения, начиная с некоторого номера, либо простые, либо двукратные.

Следуя принятой в регулярном случае терминологии будем называть краевые условия (12)-(15) и краевые условия (16), (17), в которых $a_{11}b_{20} + a_{10}b_{21} \neq 0$, регулярными. Усиленно регулярными будем называть все краевые условия (12)-(15), а также регулярные краевые условия (16), (17) с дополнительным требованием (39).

Отметим, что сопряженные краевые условия регулярны (усиленно регулярны) тогда и только тогда, когда регулярны (соответственно, усиленно регулярны) краевые условия прямой задачи.

Асимптотика собственных функций с учетом результата теоремы 3 может быть выписана стандартным образом [2, §4.10]. Например, в случае краевых условий 1 типа она такова

$$u(x, \lambda_n) = \sin \pi n + O(\omega(n)),$$

а в случае краевых условий 2 типа имеет вид

$$u(x, \lambda_n) = \cos \pi n + O(\omega(n)).$$

Обозначим через $G(x, t; \lambda)$ ядро резольвенты рассматриваемого оператора \mathcal{L} с регулярными краевыми условиями. Справедлива следующая оценка (см. [2, §5.3]).

Лемма 3. Пусть $\lambda = \mu^2$ таково, что параметр μ находится вне кругов достаточно малого радиуса $\delta > 0$ вокруг μ_n , где $\lambda_n = \mu_n^2$ – собственные значения оператора \mathcal{L} . Тогда найдется $C = C_\delta > 0$, что

$$|G(x, t; \lambda)| \leq C|\lambda|^{-1/2}.$$

Из этой оценки и известной теоремы о полноте [11] следует

Теорема 4. В случае регулярных краевых условий система корневых функций оператора \mathcal{L} полна в $L_2(0,1)$.

Так как для регулярных краевых условий спектр \mathcal{L} удовлетворяет условиям $\sup |\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n}| < \infty$, $\sqrt{\lambda_n} \sim cn$, кратности собственных значений равномерно ограничены, а в случае усиленно регулярных краевых условий каждому собственному значению, начиная с некоторого номера, отвечает только одна собственная функция, то выполнены все условия теоремы о безусловной базисности работы [12].

Теорема 5. В случае усиленно регулярных краевых условий система корневых функций оператора \mathcal{L} образует безусловный базис в $L_2(0,1)$.

Литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
3. Atkinson F.V., Fulton C.T. Asymptotics of Sturm-Liouville eigenvalues for problems on a finite interval with one limit-circle singularity // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A, 99, p.51-70 (1984).
4. Krall A.M., Zettl A. Singular self-adjoint Sturm-Liouville problems // Differ. Integral Equ, 1(4), p.423-432 (1988).
5. Bailey P.B., Everitt W.N., Zettl A. Regular and singular Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A, 126(3), p.505-514 (1996).
6. Eberhard W., Freiling G., Zettl A. Sturm-Liouville problems with singular non-selfadjoint boundary conditions // Math. Nachr., 278(12-13), p.1509-1523 (2005).
7. Юрко В.А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Мат. сборник, 186 (6), с.133-160 (1995).
8. Freiling G., Yurko V. Expansion theorems for boundary value problems with a singularity // Analysis, 18, p.25-39 (1998).
9. Крицков Л.В. О безусловной базисности систем корневых функций одномерного сингулярного оператора Шредингера // Дифференц. уравнения, 27 (8), с.1446-1447 (1991).
10. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, т.2. М.: Мир, 1966.

11. *Наймарк М.А.* О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР, 48(5), с.727-730 (1954).
12. *Крицков Л.В.* Бесселевость системы корневых функций сингулярного оператора второго порядка на отрезке // Дифференц. уравнения, 54(8), с.1050-1066 (2018).

Раздел II. Математическое моделирование

Н.Л. Григоренко, Э.В. Григорьева, П.К. Рой, Е.Н. Хайлов;

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕЧЕНИЯ ПСОРИАЗА*

Введение

На современном этапе псориаз является одним из наиболее распространенных хронических дерматозов и занимает одно из ведущих мест среди актуальных проблем современной дерматологии. Согласно данным Международной федерации ассоциаций псориаза (International Federation of Psoriasis Associations) распространенность этого дерматоза колеблется от 1.2 до 5%, в среднем составляя 3% населения планеты ([1]). Псориаз редко представляет угрозу для жизни, однако, вне всякого сомнения, становится причиной значительного снижения ее качества ([2]), что в свою очередь негативно сказывается на социальной адаптации, возможностях выбора работы и карьерного роста ([2]). Кроме того, псориаз часто сопровождается стрессом, депрессией, тревогой и приводит к злоупотреблению психоактивными средствами.



Рис. 1 и 2. Кожные покровы при псориазе.

Псориаз – аутоиммунное заболевание с симптомами хронического воспаления кожи (рисунки 1 и 2) ([3]-[6]). Оно характеризуется обычно волнообразным течением с периодами спонтанных или вызванных теми

*Работа первого, третьего и четвертого авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ДНТ в рамках научного проекта №18-51-45003 ИНД_а;

или иными лечебными воздействиями ремиссий (улучшений) и периодами спонтанных или спровоцированных неблагоприятными внешними воздействиями рецидивов (обострений). Причина возникновения псориаза – дисрегуляция взаимодействия иммунной системы человека с клетками его кожи. Есть много факторов, которые могут этому способствовать – инфекционные возбудители (кожные инфекции, респираторные вирусы), травмы кожного покрова (царапины, порезы, укусы, ожоги), стрессы, недостаток витаминов и минералов, переохлаждение организма, вредные привычки (курение, злоупотребление алкоголем), прием некоторых лекарственных препаратов.

Кожа – самый крупный орган человека, она составляет до 17% от массы его тела. Также, кожа – это важный иммунный орган. Эпидермис – поверхностная часть кожи. Благодаря эпидермису формируется защитный барьер организма от патогенных бактерий, грибов, вирусов, температуры, ультрафиолетового излучения, потери воды и механических повреждений. Эпидермис образован несколькими типами клеток, но самый распространенный тип – это кератиноциты (до 90% от общего количества клеток). Кератиноциты образуются в самом нижнем слое эпидермиса. Они являются строительным материалом для волос, кожи, ногтей. В норме, кератиноциты делятся и передвигаются от нижнего слоя к поверхности кожи, вытесняя старшие клетки, практически незаметно. Этот процесс занимает около месяца. У людей с псориазом, кератиноциты размножаются очень быстро и перемещаются от глубинного слоя к поверхности примерно за 3-5 дней. Кожа не может избавиться от этих клеток достаточно быстро, так что за короткий срок их количество резко увеличивается, что приводит к образованию уплотненных, сухих участков на коже или бляшек. Дерма – более глубокая часть кожи, образованная кровеносными и лимфатическими сосудами, а также нервами. При псориазе эта часть кожи воспаляется и опухает.

Указанная дисрегуляция приводит к гиперактивации иммунной системы, которая начинается с дендритных клеток. Мигрируя из дермы в эпидермис, эти клетки вызывают воспаление. В результате, нарушается нормальная жизнедеятельность всех типов клеток кожи, и в первую очередь, кератиноцитов. Дендритные клетки стимулируют кератиноциты к усиленному размножению (гиперпролиферации), одновременно нарушая их способность к нормальному созреванию и дифференцировке (разделению функций). Гиперпролиферация кератиноцитов приводит к формированию псориатических бляшек. Одновременно, она приводит к активизации и миграции из дермы в эпидермис Т-лимфоцитов. Они начинают атаковать кератиноциты, которые, разрушаясь, еще более активируют Т-лимфоциты. Таким образом, формируется положительная обратная связь – клетки иммунной системы действуют на клетки

эпидермиса, а те, в ответ на это действие, дополнительно активируют клетки иммунной системы. Процесс начинает поддерживать сам себя. Так выглядит сильно упрощенная схема возникновения и развития псориаза. Как мы видим, важную роль здесь играют Т-лимфоциты, кератиноциты и дендритные клетки.

Адекватное лечение псориаза является очень сложной задачей и лекарств, ведущих к полному выздоровлению, пока не существует. Основными лекарствами при лечении псориаза являются как мази, которые воздействуют на пораженные участки кожи, тем самым подавляя взаимодействие Т-лимфоцитов и кератиноцитов, так и лекарства (пилюли, инъекции), оказывающие воздействие на глубокий слой эпидермиса, подавляя взаимодействие Т-лимфоцитов и дендритных клеток.

При псориазе, математические модели эффективно используются для прогнозирования клеточного поведения кожи, как при нормальных, так и при ее патологических состояниях. Среди всевозможных моделей ([7]), мы особо выделим модели, которые описываются системами дифференциальных уравнений ([7]-[16]). В свою очередь, управляемые математические модели применяются для моделирования режима принятия лекарств и их дозировки, сравнения воздействия различных лекарственных препаратов на пораженные участки кожи, выработки наиболее эффективных методик лечения. В рамках конкретной модели для отыскания наилучших в том или ином смысле стратегий лечения псориаза применяется теория оптимального управления.

Для математических моделей лечения псориаза задачи оптимального управления были рассмотрены в работах [16]-[19]. В них, оптимальные стратегии лечения, которые минимизировали взвешенную сумму суммарной концентрации кератиноцитов и общей стоимости лечения, были найдены численно. Эта стоимость лечения псориаза выражалась интегралом от квадрата единственного управления, а модели описывались с помощью систем дифференциальных уравнений, линейных по этому управлению. После применения принципа максимума Понтрягина, как необходимого условия оптимальности, соответствующие задачи оптимального управления сводились к двухточечным краевым задачам для принципа максимума, которые затем решались численно с использованием среды MATLAB. Это было связано с тем, что правые части систем дифференциальных уравнений таких краевых задач являлись липшицевыми функциями фазовых и сопряженных переменных.

В работе [20] рассматривается задача минимизации концентрации кератиноцитов в конечный момент времени периода лечения псориаза для системы дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействия между концентрациями Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток. В эту систему введены две управляющие функции, которые

отражают подавление с помощью лекарственных препаратов взаимодействия как между Т-лимфоцитами и кератиноцитами, так и между Т-лимфоцитами и дендритными клетками. Именно такие взаимодействия влияют на неограниченный рост кератиноцитов, приводя к псориазическим поражениям кожи. Одновременное присутствие этих управлений (оно является максимально возможным в рамках изучаемой модели псориаза) сильно усложняет аналитический анализ рассматриваемой задачи минимизации, а также численные расчеты, выполненные в среде VOCOP-2.0.5.

Настоящая статья продолжает эти исследования. Она также рассматривает процесс лечения псориаза с помощью математической модели, дифференциальные уравнения которой описывают взаимодействия между концентрациями Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток. Отличие от работы [20] заключается в более сложных дифференциальных уравнениях для описания изменения концентраций упомянутых типов клеток. Модель также содержит две управляющие функции, задающие воздействие лекарственных препаратов на взаимодействия между теми же типами клеток, что и в [20]. Рассматривается задача минимизации взвешенной суммы суммарной концентрации кератиноцитов и общей стоимости лечения псориаза. Эта стоимость лечения выражается интегралом от суммы квадратов управлений. Для выяснения свойств оптимальных управлений в такой задаче, применяется принцип максимума Понтрягина, являющийся необходимым условием оптимальности. Эти свойства затем подтверждаются численными расчетами, выполненными в среде VOCOP-2.0.5. Наши результаты затем обсуждаются и сравниваются с подобными расчетами из других работ.

Математическая модель. Задача оптимального управления

Пусть $l(t), k(t), m(t)$ обозначают соответствующие концентрации Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток в момент времени t . Взаимодействие именно между этими типами клеток обуславливает возникновение, протекание и лечение псориаза. Мы будем считать, что:

(i) величины σ и ρ определяют соответствующие темпы притока Т-лимфоцитов и дендритных клеток в псориазических бляшках.

(ii) скорости активации Т-лимфоцитов дендритными клетками и, наоборот, дендритных клеток Т-лимфоцитами обозначаются через δ и β . Мы также считаем, что η – доля стимулированных Т-лимфоцитов и дендритных клеток, влияющих на размножение кератиноцитов с

помощью определенных биологических процессов. Это приводит к уменьшению популяций Т-лимфоцитов и дендритных клеток на величины $\delta l(t)m(t)$ и $\beta l(t)m(t)$, соответственно.

(iii) скорость активации кератиноцитов благодаря Т-лимфоцитам обозначается через γ_1 , а скорость их роста задается величиной γ_2 . Также, взаимодействие между Т-лимфоцитами и кератиноцитами способствует образованию новых кератиноцитов с помощью некоторых биологических механизмов, а потому популяция Т-лимфоцитов уменьшится на величину $\gamma_1 l(t)k(t)$.

(iv) поскольку количество Т-лимфоцитов ограничено, то их размножение подчиняется логистическому закону, где величина q определяет максимальную скорость такого размножения. Этот процесс протекает до определенного значения l_{\max} , характерного для популяции Т-лимфоцитов. Соответствующее слагаемое задается величиной $ql(t)(1 - l_{\max}^{-1}l(t))$.

(v) величины μ, λ, ν определяют скорости распада Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток, соответственно.

Чтобы ограничить взаимодействие между Т-лимфоцитами и кератиноцитами, мы вводим управляющую функцию $u(t)$, отражающую эффективность лекарственного препарата, в слагаемые $\gamma_1 l(t)k(t)$ и $\gamma_2 l(t)k(t)$. Ограничения взаимодействия между Т-лимфоцитами и дендритными клетками мы достигнем, введя в слагаемые $\delta l(t)m(t)$, $\beta l(t)m(t)$ и $\eta l(t)m(t)$ управляющую функцию $v(t)$, также задающую эффективность лекарственного препарата. Эти управления позволяют контролировать рост популяции кератиноцитов, который приводит к появлению псориатических бляшек. Они удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} < 1, 0 \leq v(t) \leq v_{\max} < 1, \quad (1)$$

где величины u_{\max} и v_{\max} задают максимальную эффективность используемых лекарственных средств.

Сделанные предположения (i)-(v) приводят к рассмотрению на заданном отрезке времени $[0, T]$, являющемся периодом лечения псориаза, следующей нелинейной системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} l'(t) = \sigma + ql(t)(1 - l_{\max}^{-1}l(t)) - \delta(1 - v(t))l(t)m(t) - \gamma_1(1 - u(t))l(t)k(t) - \mu l(t), \\ k'(t) = \eta(1 - v(t))l(t)m(t) + \gamma_2(1 - u(t))l(t)k(t) - \lambda k(t), \\ m'(t) = \rho - \beta(1 - v(t))l(t)m(t) - vm(t) \end{array} \right. \quad (2)$$

с заданными начальными условиями:

$$l(0) = l_0, k(0) = k_0, m(0) = m_0; l_0, k_0, m_0 > 0. \quad (3)$$

Мы считаем, что параметры $\sigma, \rho, q, l_{\max}, \delta, \beta, \eta, \gamma_1, \gamma_2, \mu, \lambda, \nu$ системы (2) являются положительными величинами. Также, под множеством допустимых управлений $\Omega(T)$ мы понимаем всевозможные пары измеримых по Лебегу функций $(u(t), v(t))$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют неравенствам (1).

В зависимости от значения выражения $(\eta\gamma_1 - \delta\gamma_2)$, введем область Λ следующим образом. Пусть при $\eta\gamma_1 - \delta\gamma_2 > 0$ она задается в виде:

$$\Lambda = \{(l, k, m) : l > 0, k > 0, m > 0, \beta\gamma_2 l + \beta\gamma_1 k + (\eta\gamma_1 - \delta\gamma_2)m < M\},$$

где

$$M = (\beta\gamma_2 l_0 + \beta\gamma_1 k_0 + (\eta\gamma_1 - \delta\gamma_2)m_0) + \omega^{-1}(\beta\gamma_2(\sigma + ql_{\max}) + (\eta\gamma_1 - \delta\gamma_2)\rho),$$

а ω – произвольное заданное число, удовлетворяющее неравенствам: $0 < \omega < \min\{\mu, \lambda, \nu\}$. При $\eta\gamma_1 - \delta\gamma_2 \leq 0$ эта область определяется следующим образом

$$\Lambda = \{(l, k, m) : l > 0, k > 0, \beta\gamma_2 l + \beta\gamma_1 k < K, 0 < m < L\},$$

где

$$K = \beta\gamma_2 l_0 + \beta\gamma_1 k_0 + \omega^{-1}\beta\gamma_2(\sigma + ql_{\max}), L = m_0 + \nu^{-1}\rho,$$

а ω – произвольное заданное число, подчиненное неравенствам: $0 < \omega < \min\{\mu, \lambda\}$.

Тогда положительность, ограниченность и продолжимость решений системы (2),(3) устанавливается с помощью следующей леммы.

Лемма 1. Пусть справедливо включение $(l_0, k_0, m_0) \in \Lambda$. Тогда для произвольных допустимых управлений $(u(t), v(t))$ отвечающие им абсолютно непрерывные решения $l(t), k(t), m(t)$ системы (2),(3) определены на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяют включению:

$$(l(t), k(t), m(t)) \in \Lambda, t \in (0, T].$$

Доказательство этой леммы проводится с помощью стандартных рассуждений, и поэтому мы опустим его. Обоснования аналогичных утверждений представлены, например, в [21]-[23]. Другие интересные свойства неуправляемой системы (2),(3) ($u(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$) обсуждались в [17].

Рассмотрим для системы (2),(3) на множестве допустимых управлений $\Omega(T)$ следующую задачу минимизации функционала:

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^T (k(t) + 0.5(au^2(t) + bv^2(t)))dt, \quad (4)$$

которая заключается в минимизации на заданном отрезке времени взвешенной суммы суммарной концентрации кератиноцитов и общей стоимости лечения с помощью используемых лекарственных препаратов. Здесь $a, b \geq 0$ – весовые коэффициенты.

Существование в задаче минимизации (4) оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$, а также соответствующих им оптимальных решений $l_*(t), k_*(t), m_*(t)$ системы (2),(3) вытекает из леммы 1 и теоремы 4 ([24], глава 4).

Заметим что, полагая в (1) $u_{\max} = 0$ или $v_{\max} = 0$, можно рассматривать систему (2),(3) с одним управлением – либо с $u(t)$, либо с $v(t)$. При $u_{\max} > 0, v_{\max} > 0$ мы изучаем такую систему с двумя управлениями. Кроме того, задавая в (4) весовые коэффициенты a, b по очереди или одновременно равными нулю, мы можем либо учитывать стоимость лечения тем или иным образом, либо нет. Это означает, что для рассматриваемой модели лечения псориаза мы можем изучать различные задачи оптимального управления.

Принцип максимума Понтрягина

Будем рассматривать задачу минимизации (4) при условии, что $a, b > 0$. Применим для ее анализа принцип максимума Понтрягина ([25]). Сначала, мы определим функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$\begin{aligned} H(l, k, m, u, v, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & (\sigma + ql(1 - l_{\max}^{-1}l) - \delta(1 - v)lm - \gamma_1(1 - u)lk - \mu l)\psi_1 \\ & + (\eta(1 - v)lm + \gamma_2(1 - u)lk - \lambda k)\psi_2 + (\rho - \beta(1 - v)lm - \nu m)\psi_3 \\ & - (k + 0.5(au^2 + bv^2)), \end{aligned}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 – сопряженные переменные.

Затем, вычислим с помощью этой функции требуемые частные производные:

$$\begin{aligned} H'_l(l, k, m, u, v, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & q(1 - 2l_{\max}^{-1}l)\psi_1 + (1 - u)k(\gamma_2\psi_2 - \gamma_1\psi_1) \\ & + (1 - v)m(-\delta\psi_1 + \eta\psi_2 - \beta\psi_3) - \mu\psi_1, \\ H'_k(l, k, m, u, v, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & (1 - u)l(\gamma_2\psi_2 - \gamma_1\psi_1) - \lambda\psi_2 - 1, \\ H'_m(l, k, m, u, v, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & (1 - v)l(-\delta\psi_1 + \eta\psi_2 - \beta\psi_3) - \nu\psi_3, \\ H'_u(l, k, m, u, v, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & -lk(\gamma_2\psi_2 - \gamma_1\psi_1) - au, \\ H'_v(l, k, m, u, v, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = & -lm(-\delta\psi_1 + \eta\psi_2 - \beta\psi_3) - bv. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с принципом максимума Понтрягина, для оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$, а также отвечающих им оптимальных решений $l_*(t), k_*(t), m_*(t)$ существует такая вектор-функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$, что:

(i) $\psi_*(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_1^*(t) = -H'_l(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u_*(t), v_*(t), \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t)) \\ = -q(1 - 2l_{\max}^{-1}l_*(t))\psi_1^*(t) - (1 - u_*(t))k_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)) \\ \quad - (1 - v_*(t))m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + \mu\psi_1^*(t), \\ \dot{\psi}_2^*(t) = -H'_k(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u_*(t), v_*(t), \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t)) \\ = -(1 - u_*(t))l_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)) + \lambda\psi_2^*(t) + 1, \\ \dot{\psi}_3^*(t) = -H'_m(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u_*(t), v_*(t), \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t)) \\ = -(1 - v_*(t))l_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) + \nu\psi_3^*(t), \\ \psi_1^*(T) = 0, \psi_2^*(T) = 0, \psi_3^*(T) = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

(ii) управления $u_*(t)$ и $v_*(t)$ максимизируют функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u, v, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$$

по переменным $u \in [0, u_{\max}]$ и $v \in [0, v_{\max}]$ при почти всех $t \in [0, T]$, а потому справедливы соотношения:

$$u_*(t) = \begin{cases} u_{\max} \rightarrow \phi_u(t) \geq u_{\max}, \\ \phi_u(t) \rightarrow 0 \leq \phi_u(t) \leq u_{\max}, \\ 0 \rightarrow \phi_u(t) \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$v_*(t) = \begin{cases} v_{\max} \rightarrow \phi_v(t) \geq v_{\max}, \\ \phi_v(t) \rightarrow 0 \leq \phi_v(t) \leq v_{\max}, \\ 0 \rightarrow \phi_v(t) \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь функции $\phi_u(t)$ и $\phi_v(t)$ задаются равенствами:

$$\begin{aligned} \phi_u(t) &= -a^{-1}l_*(t)k_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)), \\ \phi_v(t) &= -b^{-1}l_*(t)m_*(t)(-\delta\psi_1^*(t) + \eta\psi_2^*(t) - \beta\psi_3^*(t)) \end{aligned}$$

и, следуя [26], являются так называемыми индикаторными функциями. Они определяют поведение соответствующих оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$ согласно формулам (6) и (7).

Анализ системы (5) и формул (6),(7) приводит нас к справедливости следующих лемм.

Лемма 2. *Оптимальные управления $u_*(t)$ и $v_*(t)$ являются непрерывными функциями на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющими соответствующим равенствам: $u_*(T) = 0, v_*(T) = 0$.*

Лемма 3. *Существует такое значение $t_0 \in [0, T)$, что на интервале (t_0, T) оптимальные управления $u_*(t)$ и $v_*(t)$ одновременно принимают положительные значения из интервалов $(0, u_{\max})$ и $(0, v_{\max})$, соответственно.*

Результаты численных расчетов и их обсуждение

Приведем результаты численных расчетов при следующих значениях параметров системы (2), начальных условий (3), ограничений на управление из (1) и весовых коэффициентов из (4), взятых из [17]:

$$\begin{aligned} \sigma &= 15 & \rho &= 12 & q &= 0.03 & l_{\max} &= 1500 \\ \beta &= 0.12 & \delta &= 0.15 & \eta &= 0.35 \\ \lambda &= 0.08 & \mu &= 0.04 & \nu &= 0.05 \\ \gamma_1 &= 0.8 & \gamma_2 &= 0.06 & T &= 0.8 \\ l_0 &= 0.1 & k_0 &= 0.04 & m_0 &= 0.05 \\ u_{\max} &= 0.9 & v_{\max} &= 0.9 & a &= 0.01 & b &= 0.01 \end{aligned}$$

Они были выполнены в программной среде VOCOP-2.0.5 ([26]). Она представляет собой интерфейс оптимального управления, встроенного в MATLAB, для решения задач оптимального управления с общими фазовыми и граничными ограничениями и свободным или фиксированным конечным временем. С помощью дискретизации по времени такие задачи аппроксимируются конечномерными оптимизационными задачами, которые затем решаются с помощью хорошо известного пакета IPOPT с использованием производных, точно вычисленных в ADOL-C. IPOPT – это программное обеспечение с открытым исходным кодом для задач нелинейной оптимизации большой размерности.

Рассматривая временной интервал $[0, 0.8]$, нами была выбрана временная сетка с 5000 узлами, что соответствует шагу $\Delta t = 1.6 \cdot 10^{-4}$. Поскольку наша задача решалась прямым методом и, следовательно, с использованием итерационного подхода, на каждом шаге мы установили допустимую погрешность $\varepsilon = 10^{-14}$. Кроме того, нами было использовано правило дискретизации шестого порядка Lobatto III C.

На рисунках 3-5 изображены соответствующие графики решений $l(t), k(t), m(t)$ неуправляемой системы (2),(3) ($u(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$), то есть при отсутствии лечения. Из рисунка 4 видно, что концентрация кератиноцитов $k(t)$ растет от значения 0.04 до значения 6.0.

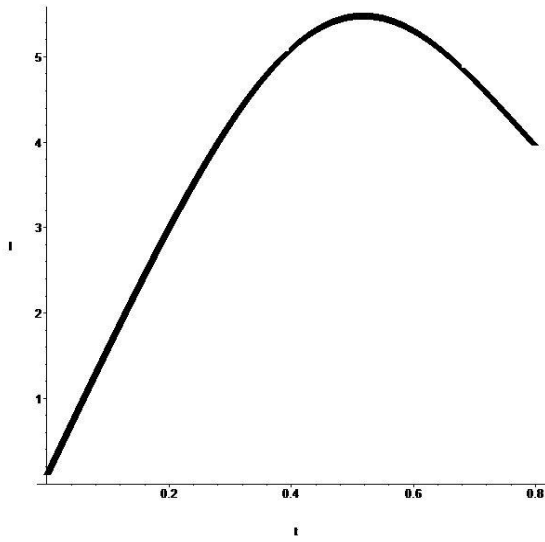


Рис. 3. График $l(t)$.

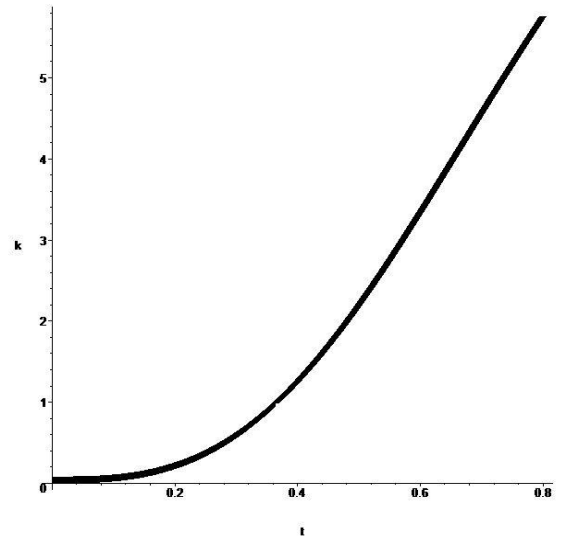


Рис. 4. График $k(t)$.

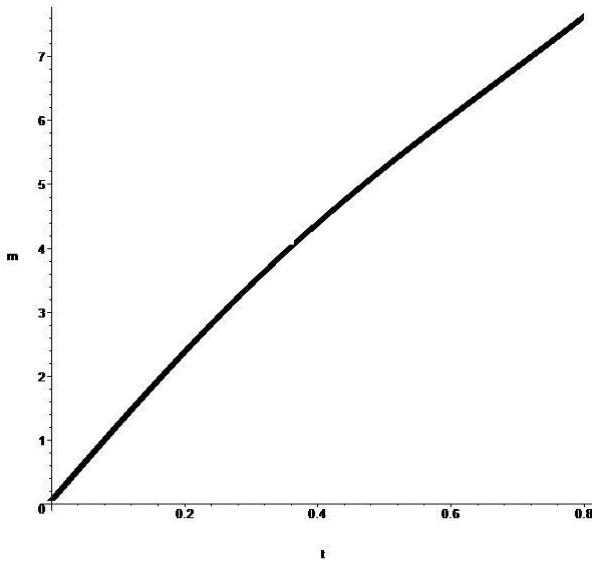


Рис. 5. График $m(t)$.

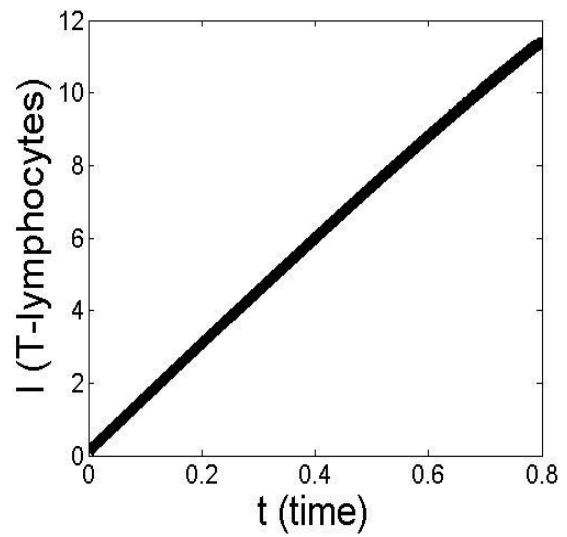


Рис. 6. График $l_*(t)$.

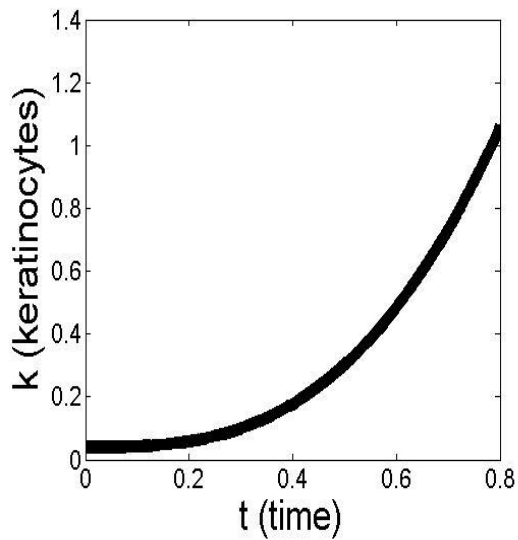


Рис. 7. График $k_*(t)$.

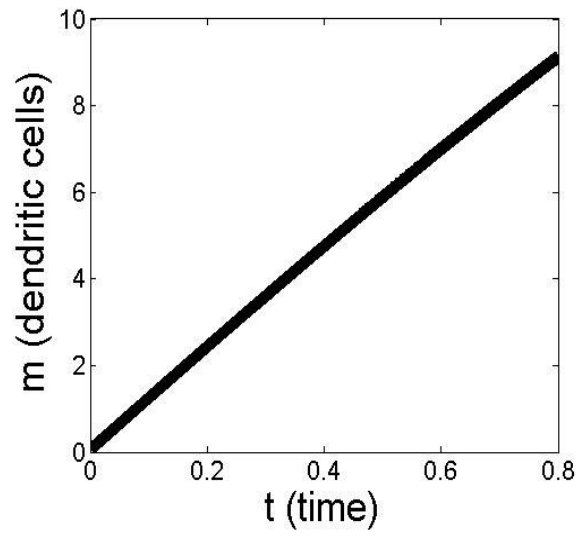


Рис. 8. График $m_*(t)$.

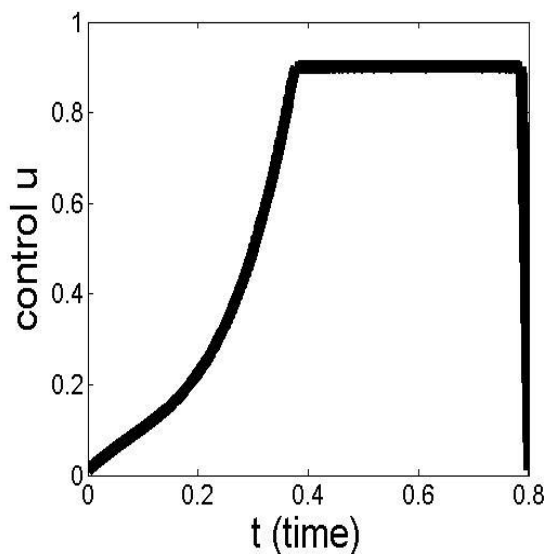


Рис. 9. График $u_*(t)$.

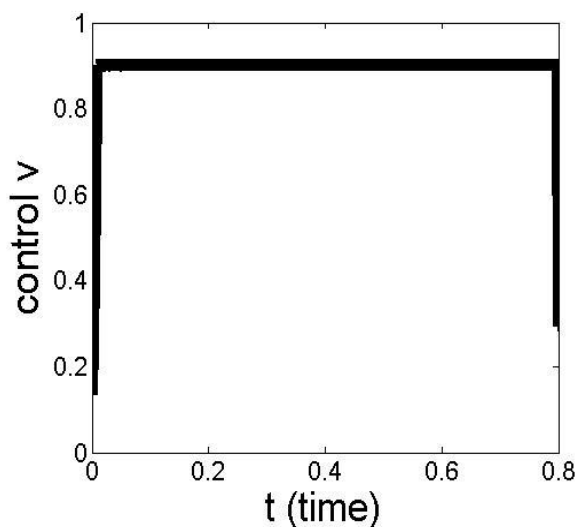


Рис. 10. График $v_*(t)$.

Результаты численных расчетов для задачи минимизации (4) представлены на рисунках 6-10. На них изображены графики оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$, а также графики соответствующих оптимальных решений $l_*(t), k_*(t), m_*(t)$ для управляемой системы (2),(3). Из рисунка 7 следует, что концентрация кератиноцитов $k_*(t)$ тоже растет от значения 0.04, но всего лишь до значения 1.05. Это значение явно меньше, чем при отсутствии лечения. Рисунок 9 показывает, что оптимальное управление $u_*(t)$ непрерывно растет от значения 0 до максимального значения u_{\max} на отрезке $[0, 0.38]$. Затем оно принимает это значение на всем отрезке $[0.38, 0.78]$. После чего, управление $u_*(t)$ непрерывно уменьшается от максимального значения u_{\max} снова до значения 0 на отрезке $[0.78, 0.8]$. Как видно из рисунка 10, оптимальное управление $v_*(t)$ тоже непрерывно растет от значения 0 до максимального значения v_{\max} , но на меньшем отрезке $[0, 0.02]$. Затем оно принимает это значение на всем отрезке $[0.02, 0.78]$. После чего, управление $v_*(t)$ непрерывно уменьшается от максимального значения v_{\max} снова до значения 0 на отрезке $[0.78, 0.8]$. Такое поведение оптимальных управлений $u_*(t)$ и $v_*(t)$ полностью согласуется с результатами лемм 2 и 3. Здесь $J_* = 0.246323$ – наименьшее значение функционала (4). Пакет IPOPT использовал 50 итераций, чтобы решить рассматриваемую задачу минимизации.

Наконец, сравним результаты наших расчетов с результатами, представленными в работе [17]. В ней также рассматривается система (2),(3), но при отсутствии управления $v(t)$ ($v_{\max} = 0$). Лечение псориаза

осуществляется только благодаря использованию управления $u(t)$. График оптимальной концентрации кератиноцитов $k_*(t)$ представляет собой функцию, которая возрастает от значения 0.04 до значения 5.6. Оптимальное управление $u_*(t)$ является непрерывной функцией, которая на отрезке $[0, 0.75]$ принимает значение 0. Затем на отрезке $[0.75, 0.76]$ она растет до максимального значения u_{\max} , которое затем принимает на всем отрезке $[0.76, 0.79]$. После чего, управление $u_*(t)$ снова убывает до значения 0 на отрезке $[0.79, 0.8]$.

Таким образом, главный вывод, который следует сделать из приведенных численных расчетов и сравнений, заключается в том, что комбинированное лечение разными лекарственными препаратами дает лучший эффект, чем лечение с помощью применения только одного лекарства.

Литература

1. *Nestle F.O., Kaplan D.H., Barker J.* Psoriasis// N. Engl. J. Med., 2009 V.361 N.5 P.496-509.
2. *Kimball A.B., Jacobson C., Weiss S., Vreeland M.G., Wu Y.* The psychosocial burden of psoriasis// Am. J. Clin. Dermatol., 2005 V.6 N.6 P.383-392.
3. *Mehlis S.L., Gordon K.B.* The immunology of psoriasis and biologic immunotherapy// J. Am. Acad. Dermatol., 2003 V.49 N.2 P.44-50.
4. *Gudjonsson J.E., Johnston A., Sigmundsdottir H., Valdimarsson H.* Immunopathogenic mechanisms in psoriasis// Clin. Exp. Immunol., 2004 V.135 N.1 P.1-8.
5. *Кубанова А.А., Кубанов А.А., Николас Дж.Ф., Пьюиг Л., Принц Дж., Катунина О.Р., Знаменская Л.Ф.* Иммунные механизмы псориаза. Новые стратегии биологической терапии// Vestn. Dermatol. Venerol., 2010 T.1 C.35-47.
6. *Lowes M.A., Suarez-Farinas M., Krueger J.G.* Immunology of psoriasis// Annu. Rev. Immunol., 2014 V.32 P.227-255.
7. *Oza H.B., Pandey R., Roper D., Al-Nuaimi Y., Spurgeon S.K., Goodfellow M.* Modelling and finite-time stability analysis of psoriasis pathogenesis// Int. J. Control, 2017 V.90 N.8 P.1664-1677.
8. *Zhang H., Hou W., Henrot L., Schnebert S., Dumas M., Heusele C., Yang J.* Modelling epidermis homeostasis and psoriasis pathogenesis// Journal of Royal Society Interface, 2015 V.12 P.1-22.
9. *Savill N.J.* Mathematical models of hierarchically structured cell populations under equilibrium with application to the epidermis// Cell Proliferat., 2003 V.36 N.1 P.1-26.

10. *Niels G., Karsten N.* Simulating psoriasis by altering transit amplifying cells// *Bioinformatics*, 2007 V.23 N.11 P.1309-1312.
11. *LapteV M.V., Nikulin N.K.* Numerical modeling of mutual synchronization of auto-oscillations of epidermal proliferative activity in lesions of psoriasis skin// *Biophysics*, 2009 V.54 P.519-524.
12. *Valeyev N.V., Hundhausen C., Umezawa Y., Kotov N.V., Williams G., Clop A., Ainali C., Ouzounis G., Tsoka S., Nestle F.O.* A systems model for immune cell interactions unravels the mechanism of inflammation in human skin// *PLoS Computational Biology*, 2010 V.6 e10011024 P.1-22.
13. *Gandolfi A., Iannelli M., Marinoschi G.* An age-structured model of epidermis growth// *J. Math. Biol.*, 2011 V.62 N.1 P.111-141.
14. *Chattopadhyay B., Hui N.* Immunopathogenesis in psoriasis through a density-type mathematical model// *WSEAS Transactions on Mathematics*, 2012 V.11 P.440-450.
15. *Roy P.K., Datta A.* Negative feedback control may regulate cytokines effect during growth of keratinocytes in the chronic plaque of psoriasis: a mathematical study// *International Journal of Applied Mathematics*, 2012 V.25 N.2 P.233-254.
16. *Cao X., Datta A., Al Basir F., Roy P.K.* Fractional-order model of the disease psoriasis: a control based mathematical approach// *J. Syst. Sci. Complex.*, 2016 P.29 P.1565-1584.
17. *Datta A., Roy P.K.* T-cell proliferation on immunopathogenic mechanism of psoriasis: a control based theoretical approach// *Control Cybern.*, 2013 V.42 N.3 P.365-386.
18. *Roy P.K., Datta A.* Impact of cytokine release in psoriasis: a control based mathematical approach// *Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications*, 2013 V.2013 N.3 P.23-42.
19. *Datta A., Li X.-Z., Roy P.K.* Drug therapy between T-cells and DCs reduces the excess production of keratinocytes: ausal effect of psoriasis// *Mathematical Sciences International Research Journal*, 2014 V.3 N.1 P.452-456.
20. *Grigorieva E., Khailov E.* Optimal strategies for psoriasis treatment// *MDPI Mathematical and Computational Analysis*, 2018 V.23 P.1-30.
21. *Grigorieva E., Khailov E.* Chattering and its approximation in control of psoriasis treatment// *Discrete Cont. Dyn.-B*, 2019 V.24 N.5 P.2251-2280.
22. *Roy P.K., Bhadra J., Chattopadhyay B.* Mathematical modeling on immunopathogenesis in chronic plaque of psoriasis: a theoretical study// *Lecture Notes in Engineering and Computer Sciences*, 2010 V.1 P.550-555.
23. *Datta A., Kesh D.K., Roy P.K.* Effect of CD4+T-cells and CD8+T-cells on psoriasis: a mathematical study// *Imhotep Mathematical Proceedings*, 2016 V.3 N.1 P.1-11.

24. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы оптимального управления. – М.: Наука, 1972.
25. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961.
26. *Schattler H., Ledzewicz U.* Optimal control for mathematical models of cancer therapies. An application of geometric methods. – New-York-Heidelberg-Dordrecht-London: Springer, 2015.
27. *Bonnans F., Martinon P., Giorgi D., Grelard V., Maindrault S., Tissot O., Liu J.* BOCOP 2.0.5 – user guide, February 8, 2017, URL <http://bocop.org>

*Т.Р. Жалеев, В.А. Кубышкин, С.И. Мухин,
А.Ф. Рубина, А.Б. Хруленко;*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРОВОТОКА В СИСТЕМЕ СОСУДОВ ПЕЧЕНИ

Введение

Печень – самая большая железа в организме человека, уникальный орган по морфологической структуре и многочисленности функций. Реализация одной из важнейших её функций – детоксикации – происходит, в частности, благодаря тому, что вся венозная кровь от непарных органов брюшной полости через воротную вену поступает в печень. В объемном кровотоке печени доля венозной крови достигает 80%.

Различные факторы, но в основном воздействие токсических продуктов (этанол, химические вещества и пр.), а также вирусные поражения приводят к гибели гепатоцитов – основных метаболических единиц печени – и замещению их фиброзной соединительной тканью с формированием очагового или диффузного цирроза органа. Помимо снижения функциональной способности печени, цирроз сопровождается затруднением венозного кровотока и повышением давления в системе воротной вены. Этот процесс несет риск развития опасных для жизни осложнений, прежде всего – спонтанного разрыва вен бассейна воротной вены с массивным внутренним кровотечением.

Математическое моделирование патологий кровотока позволяет проводить численные эксперименты, на основании которых можно делать выводы о возможном протекании реальных физиологических процессов.

В данной статье представлена математическая модель сердечно-сосудистой системы с детализированной моделью кровообращения печени. Приведены результаты численных экспериментов для исследования кровотока в норме, при различных степенях утраты функционального объема паренхимы печени и с учётом взаимного влияния кровотока через другие внутренние органы.

Постановка задачи

Способ математического моделирования кровотока в квазиодномерном приближении, использованный в данной работе, хорошо известен и подробно описан в различных работах, например, в [1, 2, 6, 7, 8]. Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости (крови) на графе эластичных сосудов с учетом работы сердца и капиллярного строения тканей. Большому кругу кровообращения формально сопоставляется граф, состоящий из узлов и ребер. Узлам графа

сопоставляются точки ветвления сосудов, мышечные ткани или отдельные органы. Крупные и средние сосуды, а также жгуты функционально-изотропных сосудов будут соответствовать ребрам графа. Сердцу сопоставлены два узла: для предсердия и для желудочка. Полагая, что длина сосуда много больше площади его сечения, течение крови можно считать квазиодномерным, то есть давлению $P(x, t)$, скорости $U(x, t)$, потоку $Q(x, t)$ считаются одинаковыми в каждой точке поперечного сечения $S(x, t)$. В качестве оси x выбирается ось, проходящая через центр кругового сечения сосуда. Плотность крови ρ считается постоянной. На каждом ребре выполнена система, состоящая из трех уравнений. Первые два из них – это уравнение неразрывности (закон сохранения массы) и уравнение движения (закон сохранения импульса):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial SU}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= F_T + F_{TP}, \end{aligned}$$

где F_T – плотность гравитационной силы, а F_{TP} – сила вязкого трения о стенки сосуда.

Замыкается данная система добавлением к ней третьего уравнения, которое обычно называют «уравнением состояния» и которое задает зависимость функции площади сечения S от параметров задачи. Если в задаче не рассматриваются механизмы регуляции, обычно эта зависимость имеет вид $S = S(p)$. Предполагается, что в равновесном состоянии сосуда давлению p_0 соответствует некое сечение S_0 . При отклонениях от этого значения площадь поперечного сечения сосуда меняется по закону $S = S_0 + f(p - p_0)$. При малых перепадах давления функцию $f(p)$ можно считать линейной, и тогда

$$S = S_0 + \frac{p - p_0}{k}, \quad |p - p_0| \ll kS_0,$$

где k – коэффициент жесткости сосуда. По мере выхода давления из допустимых границ, сечение сосуда асимптотически приближается к значениям S_{min} и S_{max} :

$$S(p) = \begin{cases} S_{min}, & p < p_{min} \\ S_{min} + \frac{S_{max} - S_{min}}{p_{max} - p_{min}} (p - p_{min}), & p_{min} \leq p \leq p_{max} \\ S_{max}, & p > p_{max} \end{cases}$$

Конкретный вид такой зависимости для каждого сосуда может быть свой и, по существу, именно эта зависимость определяет физиологические характеристики данного сосуда (например, эластические свойства).

В каждом узле графа, соответствующего точке ветвления сосудов, будем полагать выполненным закон сохранения массы и условие непрерывности давления [9].

Для узлов, отвечающих за ткань или орган, помимо закона сохранения массы, будем полагать выполненным закон фильтрации Дарси [2, 6].

Рассматривается большой круг кровообращения, замкнутый самосогласованной моделью сердца [7]: на входе в аорту задан квазипериодический поток из желудочка, согласованный с венозным возвратом в предсердие и с давлением в полой вене. Продолжительность систолы и диастолы являются, вообще говоря, переменными и зависят от соотношения венозного возврата и наполняемости желудочка.

Сведения о морфологии печени

Приведем краткие физиологические сведения, использованные при построении моделей. Артериальная кровь поступает в печень из печеночной артерии (15-20% кровотока). В воротах печени происходит бифуркация артерии на левую и правую ветви, после чего происходит деление артерии на артериолы, питающие каждый отдельный сегмент печени. Воротная вена образуется слиянием верхней брыжеечной и селезеночной вен и обеспечивает 80% объемного кровотока. В печени воротная вена делится на правый и левый стволы, при этом правый ствол является продолжением основного. После этого происходит деление вен на секторальные и сегментарные вены. Отток крови из печени происходит по печеночным венам. Основными являются правая, средняя и левая печёночные вены, которые располагаются на границе секторов печени (рис.1) [3].

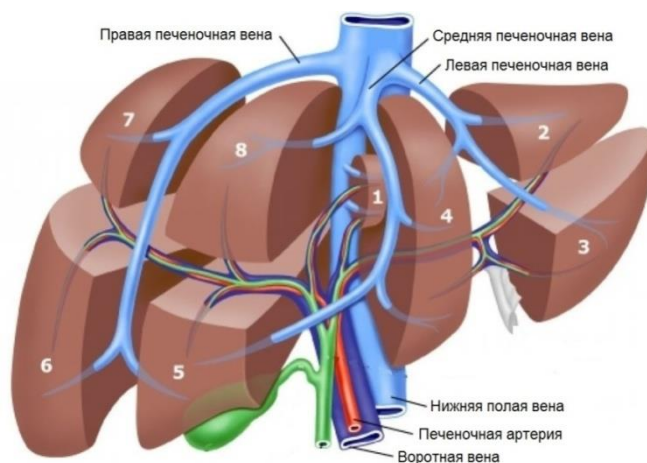


Рис.1. Кровообращение в печени по Куино.

Терминология сегментарного строения печени отличается в разных странах, однако наиболее распространенным является восьмисегментное разделение печени (рис.1) [3]. Правая доля печени, в соответствии с этой классификацией, состоит из двух секторов, при этом передний сектор включает в себя сегменты 5 и 8, а задний 6 и 7. Левая доля печени состоит

из среднего сектора, включающего 3 и 4 сегменты и бокового, состоящего из 2-го сегмента [3]. Именно эта модель принята за основу в данной работе, при этом будем рассматривать семь сегментов, со второго по восьмой согласно классификации [3]. Первый сегмент не учитывается в данной модели, так как объемы крови, проходящие через него, незначительны по сравнению с остальными сегментами.

Анатомические шунты (коллатерали)

Одной из задач этой работы является моделирование гемодинамических эффектов при диффузных фиброзных изменениях паренхимы печени, которые приводят к увеличению резистивности (сопротивления) сосудов, что приводит к уменьшению потока крови через печень. Это является причиной увеличения давления в афферентных кровеносных сосудах печени. Степень фиброзного поражения печени, и, тем самым, степень повышения резистивности, будем описывать в модели уменьшением коэффициента диффузии соответствующих сегментов печени.

Ткани и органы брюшной полости имеют сеть венозных сосудов разного калибра, которые сообщаются между собой многочисленными естественными шунтами. Эти шунты позволяют в определенных условиях перераспределяться току крови из системы воротной вены в систему полых вен, минуя печень. При отсутствии патологий в тканях печени роль таких шунтов в печеночном кровотоке минимальна. Но при повышении давления в воротной вене просвет этих шунтов увеличивается, они становятся гемодинамически значимыми и начинают играть превалирующую роль в венозном возврате.

Существует множество шунтов, но важнейшими для нашего рассмотрения являются следующие: желудочно-пищеводный шунт, который соединяет вены кардиального отдела желудка (бассейн воротной вены) с непарной и полунепарной веной (бассейн верхней полой вены), и геморроидальный шунт, который соединяет верхнюю геморроидальную вену (бассейн воротной вены) со средними и нижними (бассейн нижней полой вены).

В норме вся кровь из воротной вены и печени поступает в нижнюю полую вену через печёночные вены. При фиброзе паренхимы печени и развитии портальной гипертензии значительная часть крови оттекает по предпеченочным шунтам, которые при этом значительно увеличиваются в сечении, что приводит к варикозному расширению вен желудка, пищевода и других органов брюшной полости. Расширение вен в подслизистом слое пищевода часто приводит к их разрыву и массивному, опасному для жизни кровотечению. Развитие шунтов приводит к ещё

большому снижению потока портальной крови через печень, снижению способности к регенерации и адекватности функционирования органа. Однако для значительного увеличения объема портального кровотока через шунты нужно достаточно много времени (порядка нескольких месяцев). Поэтому при быстрой гибели клеток печени (например, при донорстве органа или токсическом поражении печени) коллатеральное кровообращение не успевает развиться до гемодинамически значимого уровня, и возникают описанные выше негативные эффекты.

Искусственные шунты

Одним из способов, устранения портальной гипертензии, возникающей при поражении печени, является создание искусственных соединений между кровеносными сосудами – шунтов. Они обеспечивают переток крови из системы воротной вены в нижнюю полую вену и устраняют портальную гипертензию. Выделяют два основных вида анастомозов [4]:

1. Портокавальный шунт соединяет воротную вену с нижней полую вену.
2. Спленоренальный анастомоз соединяет селезеночную вену с левой почечной вену.

Математическое моделирование течения крови в системе портальной вены в условиях гипертензии и изучение влияния естественных и искусственных шунтов и является основной задачей приведенных далее исследований.

Квазиодномерная схема кровотока в печени

Печеночный кровоток моделируется с учетом семи сегментов. Сегменты различаются по размеру и по объему циркулирующей крови. В предложенной модели объем крови, протекающей через каждый сегмент, различен: через второй, третий и четвертый сегмент протекает суммарно 30% от общего количества крови, поступающего в печень. Гидродинамическую нуль-мерную модель сегмента (рис.2) составим из пяти сосудов (направление кровотока указано стрелками) и двух «тканей»-сопротивлений (на рисунке отмеченных черными точками). Ткань, расположенная на ветви печеночной артерии, соответствует сфинктерам, функция которых заключается в снижении артериального давления для корректного слияния с венозным кровотоком. Ткань, расположенная на ветви воротной вены, отвечает за сопротивление, которое оказывает паренхима при очищении венозной крови от токсинов. Выходящий сосуд соответствует мелкой капиллярной сети, в которой находится основной объем циркулирующей в сегменте печени крови.

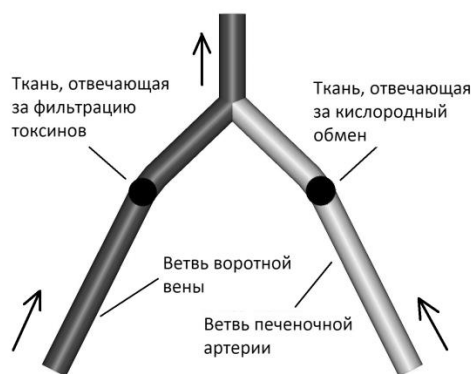


Рис.2. Гидродинамическая схема сегмента печени.

На рис.3 представлена схема печеночного кровотока. В ней два входа – один соответствует воротной вене, другой – печёночной артерии. Воротная вена разделяется на два сосуда – правую ветвь воротной вены (1) и левую ветвь воротной вены (2). Кровь, протекающая через правую ветвь воротной вены, очищается в 5, 6, 7 и 8 сегментах (на рисунке обозначенных прямоугольниками), через левую ветвь – в 2, 3 и 4 сегментах. Печёночная артерия в печени разделяется на две ветви: правую (3) и левую (4), которые питают соответствующие сегменты. В каждый сегмент печени входит два сосуда – сегментарные ветви воротной вены и печёночной артерии. Гепатоциты – функциональные единицы печени, метаболизируют кровь, приходящую из воротной вены, и насыщаются кислородом из печёночной артерии. Выходящий из сегмента сосуд – сегментарная ветвь печёночной вены. Эти ветви собираются в более крупные: из 6 и 7 сегментов – в правую ветвь печёночной вены, из 4, 5 и 8 – в срединную ветвь печёночной вены, из 2 и 3 – в левую. После этого три ветви собираются в печёночную вену, которая впадает в нижнюю полую вену.

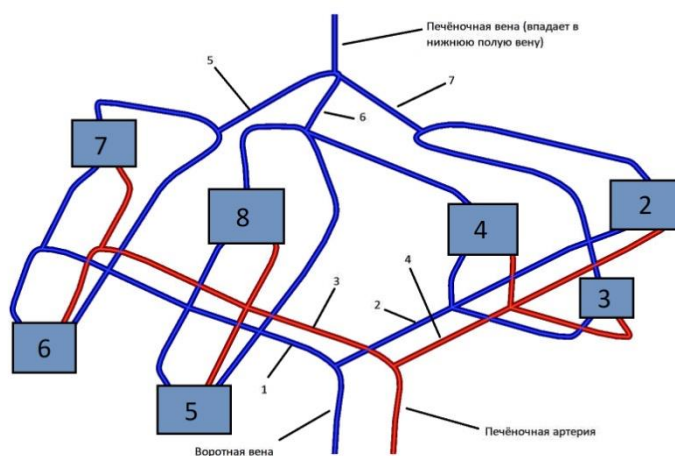


Рис.3. Схема печеночного кровотока.

Предложенная схема сосудов отражает детализированную систему сосудов, которая была включена в общий граф большого круга кровообращения, подробно описанного в работе [7].

Моделирование эффекта гипертензии в портокавальном бассейне

Был проведён ряд численных экспериментов на основе комплекса CVSS (CardioVascular Simulating System) [2], воспроизводящих гемодинамику кровеносной системы печени и непарных органов брюшной полости при различных степенях патологий органа в отсутствие анастомозов, шунтов и коллатералей. при различных степенях патологий органа в отсутствие анастомозов, шунтов и коллатералей.

Будем рассматривать диффузное поражение 90% паренхимы печени как полную утрату функций шести сегментов (функционирующим остается только один сегмент). Столь высокий процент нефункционирующего объёма печени выбран для наглядности численного эксперимента. Ниже приведены результаты расчетов, полученные при моделировании, и представлены графики давления и потока в системе воротной вены в норме и при 90% не функционирующей печени (рис.4, 5).

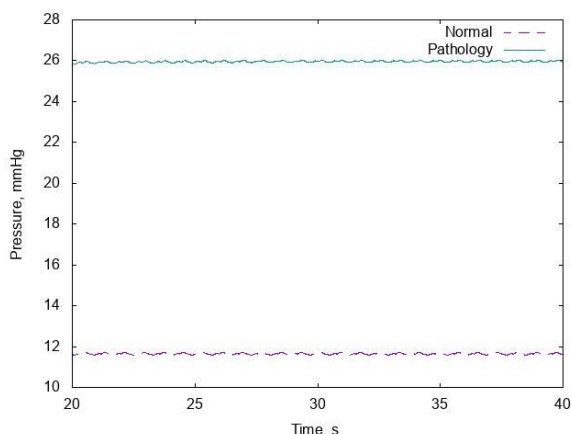


Рис.4. Давление в системе воротной вены.

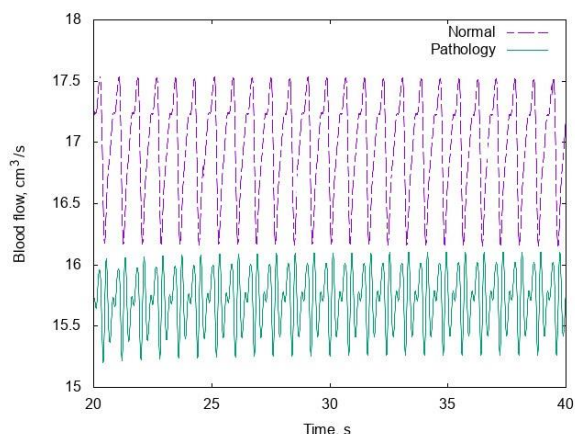


Рис.5. Поток в воротной вене.

Значительное повышение давления в воротной вене (более чем в два раза) при рассматриваемом поражении паренхимы, обусловлено повышением сопротивления тканей печени: почти 90% объема крови, циркулирующего во всей печени в норме, должно проходить только через один сегмент, то есть на 10% ткани печени нагрузка повышается примерно в 10 раз.

Давление в 26 мм.рт.ст., полученное в расчете, соответствует диагнозу синдрома портальной гипертензии в клинической практике: при таком давлении наблюдается варикозное расширение вен пищевода и желудка, расширение подкожных вен, а также возможно открытие кровотечения из пищевода.

Проведем расчет интегральных средних значений (потока, сечения и давления) в некоторых характерных сосудах системы воротной вены при различных степенях диффузного поражения паренхимы печени (в рассматриваемом выше смысле). Результаты представлены в таблице 1.

Гемодинамические показатели	Объем "выключенной" из кровообращения паренхимы печени						
	0%	15%	30%	50%	65%	85%	90%
P_v (мм рт. ст.)	11.6	11.9	12.4	13.1	14.5	18.6	25.9
S_v (см ²)	1.12	1.13	1.14	1.15	1.18	1.25	1.39
Q_v (см ³ /с)	16.9	16.8	16.5	16.2	15.8	14.8	14.4
S_{ls} (см ²)	0.180	0.181	0.182	0.184	0.188	0.201	0.223

Таблица 1. Зависимость давления, потока и сечений от процента диффузного поражения паренхимы.

Здесь P_v , S_v , Q_v – интегрально усредненные значения давления, сечения и потока в воротной вене, S_{ls} – сечение левой желудочной вены.

Как видно из таблицы 1 при поражениях до 50% паренхимы печени наблюдается незначительное линейное изменение гемодинамических характеристик течения крови (давление и сечения сосудов возрастает, поток в воротной вене снижается). При более значительных поражениях печени (от 50 до 85%) отклонение этих показателей от нормы приобретает ярко выраженный характер. Поражение более 85% паренхимы печени приводит к резкому изменению гемодинамических характеристик и может являться причиной начала внутреннего кровотечения.

Таким образом, полученные результаты соответствуют клинической картине портальной гипертензии: повышено давление в системе воротной вены, увеличен диаметр сосудов (варикозное расширение вен) пищевода и желудка, а также снижен объемного кровотока, проходящего по системе воротной вены.

Результаты расчетов изменения артериального кровотока при поражениях паренхимы печени

Напомним, в рамках рассматриваемой модели сосуды печени являются частью всего большого круга кровообращения, и течение в них рассчитывается одновременно с расчетом течения во всем большом круге. В силу замкнутости модели, можно исследовать и оценить перераспределения кровотока во всем организме при печёночной недостаточности.

В качестве примера приведем результаты расчетов (таблица 2), характеризующие изменение кровотока в артериальной части системы в

случае, когда 90% паренхимы печени поражено (т.е. выключено из процесса фильтрации).

Как следует из таблицы 2, артериальное кровообращение при рассматриваемом циррозе печени, изменяется во всех частях аорты на величину до 8%. Как уже отмечалось выше, в этом случае поток венозной крови через собственно печень значительно падает (см. таблицу 1). Это приводит к развитию ретроградного оттока венозной крови через вены непарных органов брюшной полости, таких как пищевод, желудок, поджелудочная железа, кишечник и селезенку. В силу замкнутости системы большого круга кровообращения происходит перераспределение потоков артериальной крови во всем организме.

	Норма (см ³ /с)	90% поражение (см ³ /с)	Изменение в %
Коронарное кровообращение	1,13	1,39	23%
Артерии правой руки и правая сонная артерия	9,18	9,85	7%
Левая сонная артерия	2,12	2,27	7%
Артерии левой руки	3,54	3,71	5%
Кровообращение непарных органов	17,9	13,73	-23%
Артерии кишечника	4,3	4,31	0,2%
Артерии почек	35,81	37,86	6%
Артерии кишечника и яичниковые артерии	0,7	0,68	-3%
Крестцовая артерия	1,89	1,96	4%
Правая подвздошная артерия	6,76	7,16	6%
Левая подвздошная артерия	6,67	7,08	6%

Таблица 2. Объемный кровоток через различные системы организма в норме и патологии.

Из приведенных данных следует, что поток артериальной крови возрастает в системе церебральных сосудов, через артерии рук, ног, почек и в крестцовой артерии. Изменение потока через кишечник и

яичниковые вены незначительно, то есть кровообращение через эти органы не меняется при рассматриваемой модели цирроза. Тем самым, цирроз печени приводит к перераспределению кровотока во всем организме, при этом снижается артериальное кровоснабжение непарных органов брюшной полости, что может приводить к снижению эффективности выполнения витальных функций. Полученные данные коррелируют с клинической картиной печеночной недостаточности. Это позволяет рассчитывать на использование предложенной модели для исследования изменений кровотока при длительном развитии портальной гипертензии, когда величина сердечного выброса сокращается, что считается одной из причин кардиальной дисфункции при циррозе печени.

Анатомические и искусственные шунты

На базе предложенной модели можно исследовать влияние естественных и искусственных шунтов на перераспределение кровотока и изменение давления в зависимости от их наличия и развитости. Все примеры исследований будем проводить в ситуации, когда поражено 60% паренхимы печени и когда в отсутствие шунтов в системе сосудов печени (рассмотренной выше) имеет место портальная гипертензия.

Приведем примеры таких исследований в трех случаях: когда в исходной системе сосудов из шунтов присутствует только желудочно-пищеводный шунт (схема представлена на рис.6); присутствует только геморроидальный шунт (рис.7); присутствуют искусственные портокавальный или спленоренальный шунты (рис.8).

На графе, сопоставленному большому кругу кровообращения, шунты и анастомозы моделировались одиночными ребрами, соединяющими соответствующие анастомозирующие сосуды. Их параметры варьировались в зависимости от степени развития анатомического шунта или от размеров устанавливаемого обходного анастомоза (шунта).

Желудочный шунт и анастомозы моделировались одним ребром, а геморроидальный шунт – двумя: к правой и левой нижним геморроидальным венам.

Зависимость кровотока от диаметра рассматриваемого шунта будем исследовать в ряде сосудов: воротной вене (portal vein), венах кардиального отдела желудка (stomach cardia), желудочно-пищеводном шунте (stomach shunt), левой желудочной вене (left gastric vein), геморроидальных шунтах (hemorrhoidal shunts), селезеночной вене (splenic vein), портокавальном анастомозе (portacaval anastomosis), спленоренальном анастомозе (splenorenal anastomosis) и левой почечной вене (left renal vein).



Рис.6. Схема расположения желудочно-пищеводного шунта

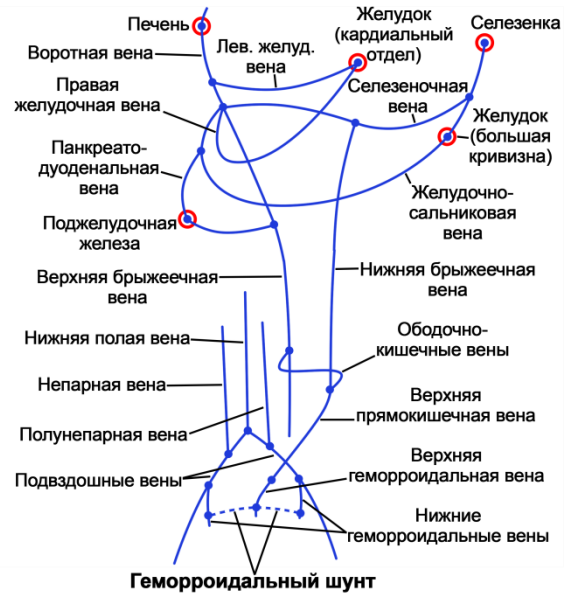


Рис.7. Схема расположения геморроидального шунта



Рис.8. Схема расположения портокавального и спленоренального анастомозов.

Оценка влияния естественных шунтов.

Приведем результаты расчетов, показывающие зависимость параметров кровотока в выбранных сосудах от диаметра желудочно-пищеводного шунта (рис.9 и рис.10) (как уже говорилось, при постоянном 60% поражении печени).

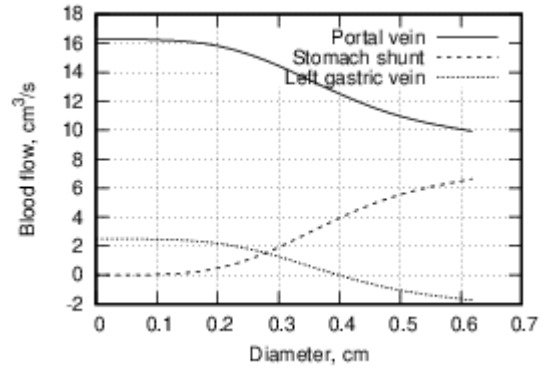
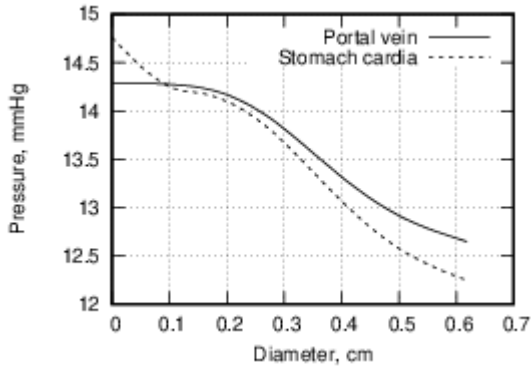


Рис.9. Зависимость давлений от диаметра желудочно-пищеводного шунта.

Рис.10. Зависимость потоков от диаметра желудочно-пищеводного шунта.

Как и ожидалось, при увеличении диаметра шунта давление в системе воротной вены и венах кардиального отдела желудка понижается (рис.9). При этом поток крови в воротной вене падает, перераспределяясь в вены кардиального отдела желудка, а поток через сам шунт предсказуемого растет (рис.10). Также падает поток через левую желудочковую вену. Отметим, что при увеличении диаметра шунта до определенного значения (для системы сосудов с данными параметрами это примерно 0,2 см) кровоток меняется мало, затем изменения нарастают и при диаметре желудочно-пищеводного шунта более примерно 0,4 см, в левой желудочной вене возникает реверсивный поток: кровь течет от воротной вены к желудочно-пищеводному шунту.

Похожие результаты получаются при расчете течения при наличии геморроидального шунта (рис.11 и 12).

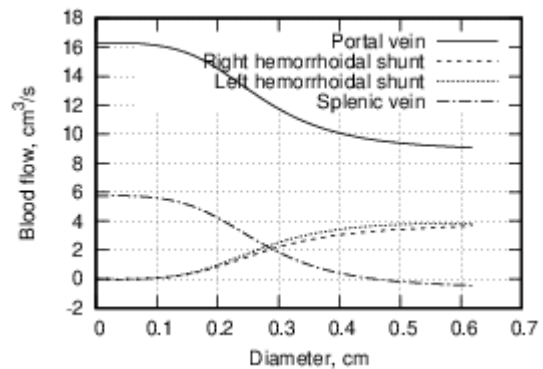
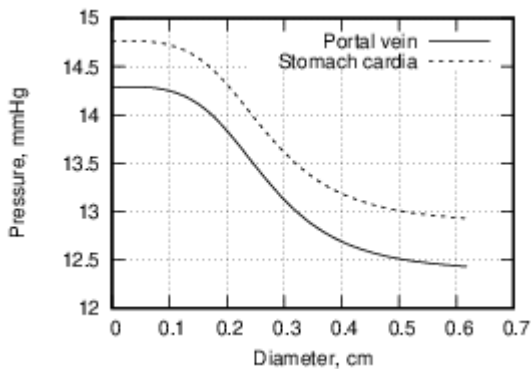


Рис.11. Зависимость давлений от диаметра геморроидальных шунтов.

Рис.12. Зависимость потоков от диаметра геморроидальных шунтов.

В этом случае, подобно случаю с желудочно-пищеводным шунтом, поток в воротной вене падает, а в шунтах растет. Ретроградное течение после определенного диаметра шунта теперь возникает в селезеночной вене.

В целом, в обоих рассмотренных случаях наличие шунта с диаметром меньше 0,15 см не приводит к гемодинамически значимым

изменениям в токе крови. Наиболее значимыми являются шунты с диаметром 0,2-0,6 см (для системы сосудов с данными характеристиками).

В организме развитие шунтов происходит параллельно с утратой функционирующего объема печени, и этот процесс имеет не только гидродинамический характер. В данном расчете моделировалась система с постоянным поражением печени, поэтому ось абсцисс на графиках не следует отождествлять со степенью его развития. Графики показывают исключительно функциональную зависимость параметров от диаметра шунтов.

Оценка влияния искусственных шунтов.

В клинической практике для устранения портальной гипертензии используют портокавальный и спленоренальный шунты, при которых кровь из воротной вены напрямую идет в систему нижней поллой вены. Представляется исключительный интерес изменение давления и объемного кровотока в зависимости от диаметров этих шунтов, которые целиком определяют клинический эффект операции.

В соответствии с этим, проведено моделирование роли портокавального и спленоренального шунтов в условиях не развитого анатомического желудочно-пищеводного шунта и при диаметре этого шунта 0,32 см.

Сразу отметим, что зависимости давлений в воротной вене во всех случаях качественно и количественно незначительно отличаются от зависимостей, приведенных на рис.9 и 11.

Результаты расчетов потоков имеют особенности и для первого случая приведены на рис.13 -14, второго – на рис.15-16. В обоих случаях увеличение диаметра анастомозов приводит к снижению давления в воротной вене, при этом значительная часть потока, проходившего через печень, начинает протекать через анастомоз. Это приводит к снижению количества очищаемой печенью крови.

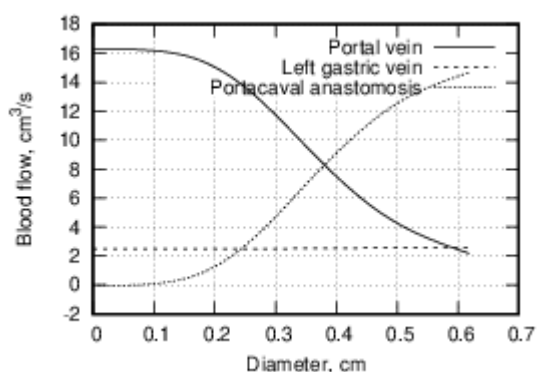


Рис.13. Потоки при наличии портокавального шунта

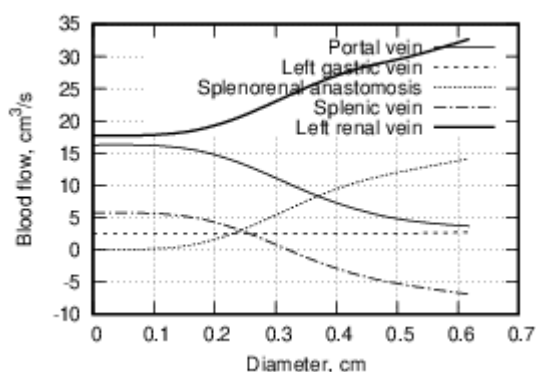


Рис.14. Потоки при наличии спленоренального шунта.

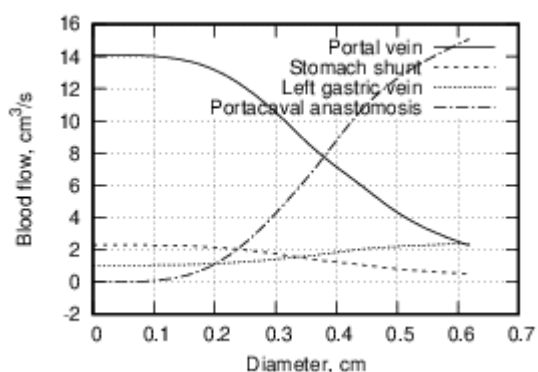


Рис.15. Потоки при наличии портокавального шунта и желудка-пищеводного шунта.

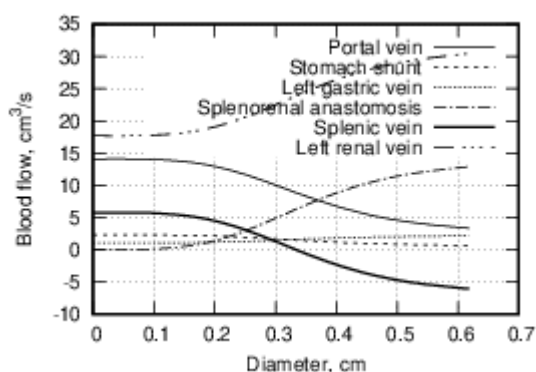


Рис.16. Потоки при наличии спленоренального шунта и желудка-пищеводного шунта.

В обоих случаях уменьшение давления крови и падение потока в воротной вене и желудочко-пищеводных венах было значимым при диаметре шунта в пределах 0,2-0,6 см, при этом начиная с некоторого диаметра шунта в обоих случаях в некоторых венах возникает ретроградный поток.

При увеличении диаметра шунта поток и давление в портальной вене значительно падают, а поток в шунтах значительно растет, при этом поток в левой желудочковой вене и желудочно-пищеводном шунте (при его наличии) не претерпевает значительных изменений.

Одним из отличий течений при спленоренальном шунте по сравнению с течением при портокавальном шунте является значительное повышение кровотока через левую почечную вену.

Заключение

В работе предложена сегментарная модель печеночного кровотока, позволившая детализировать модель системы кровообращения человека, На ее основе были проведены вычислительные эксперименты для исследования перераспределение кровотока при различных степенях поражения паренхимы печени и наличия некоторых шунтов. Полученные результаты позволяют предполагать, что предложенная модель может быть использована в клинической практике.

Литература

1. М.В. Абакумов, К.В. Гаврилюк, Н.Б. Есикова и др. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 7. С. 892–898.
2. А.У. Bunicheva, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin et al. Mathematical modeling of some applied problems in haemodynamics // Computational Mathematics and Modeling. 2002. Vol. 13, no. 4. P. 382–412.

3. *Р.Д. Синельников.* Атлас Анатомии Человека. В 4-х томах. М: Медицина, 1996.
4. *В.А. Вишнеvский, В.А. Кубышкин, А.В. Чжао.* Операции на печени: Руководство для хирургов. М.: МИКЛОШ, 2003. С. 114-128.
5. *А.Д. Карман, В.Л. Казущик.* Портальная гипертензия : учеб.-метод. пособие. Минск: БГМУ, 2014. С. 32-33.
6. *М.В. Абакумов, И.В. Ашметков, Н.Б. Есикова [и др.]* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы. // М.: Математическое моделирование, 2000. Т. 12, №2. С. 106-117.
7. *В.Б. Кошелев, С.И. Мухин, Т.В. Соколова, А.П. Фаворский* Математическое моделирование гемодинамики сердечно-сосудистой системы с учетом влияния нейрорегуляции // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 3. С. 15–28.
8. *А.Я. Буничева, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.Б. Хруленко* Математическое моделирование квазиодномерной гемодинамики// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 8. С. 1417–1428.
9. *C.G. Caro, T.J. Pedley, R. Schroter et al.* The mechanics of the circulation // New York – Toronto: Oxford University Press, 1978. 624 p.

С.А. Матвеев, А.П. Смирнов, Е.Е. Тыртышников;
**ВЛИЯНИЕ ИСТОЧНИКА МОНОМЕРОВ НА ПЕРИОД
КОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛИ НЕОБРАТИМОЙ
КОАГУЛЯЦИИ***

Введение

Процессы агрегации неупруго сталкивающихся частиц лежат в основе огромного числа физических явлений [1]. В случае пространственно-однородных физических систем при учете парных взаимодействий частиц основным инструментом описания агрегационных процессов являются кинетические уравнения типа Смолуховского, искомыми величинами в которых выступают средние концентрации $n_k(t)$ частиц (кластеров) размера на единицу объёма среды в момент времени t . Кинетические уравнения данного типа являются нелинейными, а основной трудностью для численного изучения их решений оказывается высокая алгоритмическая сложность вычисления правой части в случае учета большого количества N возможных размеров частиц, учитываемых в системе. В случае известных начальных условий $n_k(t=0) = n_{k_0}$ для широкого класса коэффициентов является корректной постановка задачи Коши. В случае наличия в системе процессов дробления или источников и стоков частиц возможно существование стационарных распределений частиц по размерам. В частности, для Броуновских коэффициентов коагуляции в работе [2] получены фундаментальные результаты, описывающие асимптотики стационарных распределений частиц по размерам. В работе [3] было проведено дополнительное исследование, демонстрирующее также возможность существования периодических по времени решений уравнений необратимой агрегации с источником мономеров и стоком крупных частиц.

В недавнем цикле работ [4], [5], [6] для класса малоранговых кинетических коэффициентов агрегации получено существенное снижение сложности вычисления правой части, что привело к возможности рассмотрения принципиально более широких классов задач математического моделирования. В частности, использование новых методов позволило провести подробную валидацию периодических решений по времени, представленных в работе [7], а также получить

* Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ 18-31-20069

новый класс осциллирующих решений для уравнений агрегации-дробления вещества в кольцах Сатурна.

В данной работе для класса Броуновских ядер предлагается расширенный анализ влияния мощности источника мономеров на период колебаний n_k в модели необратимой коагуляции со стоком частиц, превышающих максимальный допустимый размер. Показано увеличение амплитуды колебаний с одновременным сокращением их периода при увеличении мощности источника мономеров. Дополнительно в работе демонстрируется, что изменение мощности источника приводит к перемасштабированию модельного времени и амплитуды колебаний без изменения общей структуры решений.

2. Постановка задачи и метод решения

В данной работе исследуется математическая модель процесса необратимой агрегации с источником мономеров (частиц единичного размера) и стоком частиц, превышающих максимальный допустимый размер N :

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = J - n_1 \sum_{i=1}^N C_{1,i} n_i \\ \frac{dn_k}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} C_{i,k-i} n_i n_{k-i} - n_k \sum_{i=1}^N C_{i,k} n_i, k = 2, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

В качестве кинетических коэффициентов использовались Броуновские ядра коагуляции

$$C_{i,j} = i^\alpha j^\beta + j^\alpha i^\beta \quad (2)$$

для которых известен ряд аналитических и численных результатов [2], [3], [8]. В частности, в работе [3] для мощности источника мономеров $J = 1$ показано существование периодических по времени решений для нулевых начальных условий и разности степенных показателей

$$|\alpha - \beta| > 0.5$$

Тем не менее, в литературе отсутствует анализ влияния мощности источника на характер наблюдаемых колебаний. В данной работе задачи Коши для системы уравнений (1) исследуются с использованием явного метода Рунге-Кутты второго порядка по времени.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n^{k+1/2} - n^k}{0.5\Delta t} = \mathbf{S}(n^k) \\ \frac{n^{k+1} - n^k}{\Delta t} = \mathbf{S}(n^{k+1/2}) \\ \mathbf{n}(0) = \mathbf{n}_0 \end{array} \right. \quad (3)$$

и быстрых алгоритмов вычисления правой части, основанных на использовании малоранговых представлениях коэффициентов коагуляции (подробно описание метода приведено в [9] и [4]). Использование быстрых алгоритмов вычисления правой части качественно снижает сложность вычислений и расширяет круг решаемых задач.

3. Численные эксперименты для модельных задач.

В работе исследовались задачи Коши для уравнений необратимой агрегации с источником мономеров и стоком крупных частиц [1] для следующего ядра коагуляции

$$C_{i,j} = i^{3/4} j^{3/4} + j^{3/4} i^{3/4}$$

с нулевыми начальными условиями при разных значениях мощности источника мономеров J и разных значениях максимального допустимого размера частиц N .

$$C_{i,j} = i^{3/4} j^{3/4} + j^{3/4} i^{3/4}$$

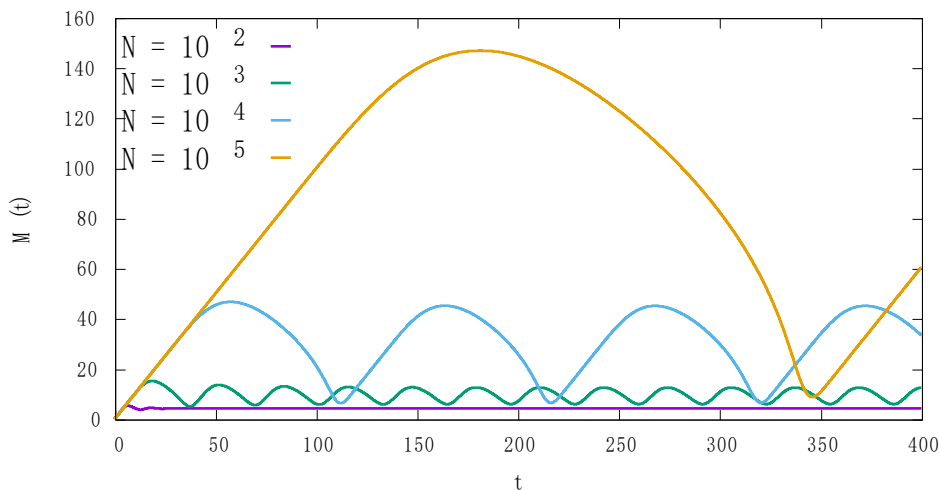


Рис.1 Колебания полной массы в системе в зависимости от изменения максимального допустимого размера частиц в системе N при фиксированной мощности источника мономеров $J = 1$. С ростом N возникают периодические по времени решения; амплитуда и период колебаний увеличиваются с ростом N .

Из представленных экспериментов на Рис. 1 следует, что изменение максимального допустимого размера частиц в системе при фиксированной мощности источника существенным образом влияет на свойства решений: при малом количестве уравнений наблюдаются стационарные решения, а с ростом N растут амплитуда и период колебаний. Данные результаты полностью согласуются с результатами работы [3].

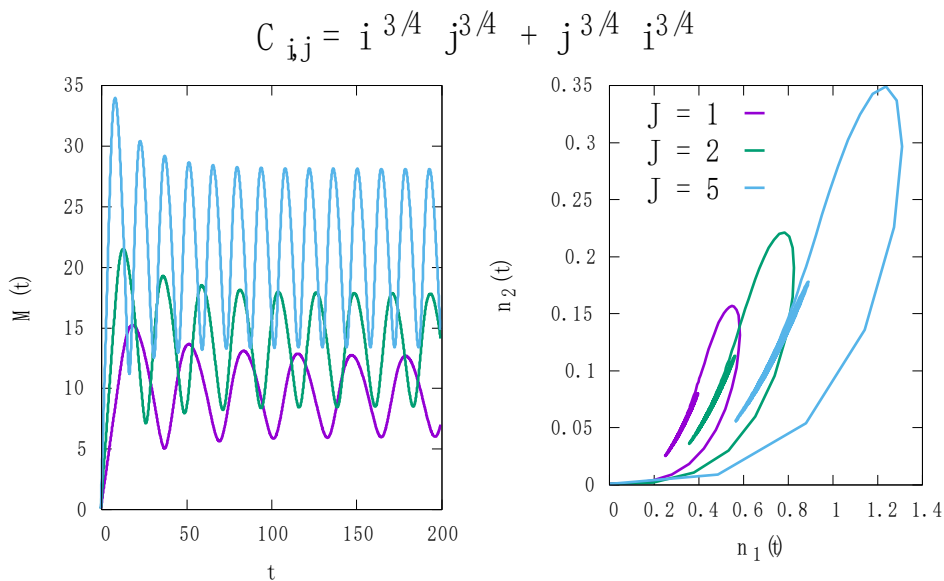


Рис.2 Колебания полной массы в зависимости от мощности источника мономеров J (слева), фазовая диаграмма $n_1(t)$ и $n_2(t)$ концентраций мономеров и димеров (справа) при фиксированном максимальном допустимом размере агрегатов $N = 1000$. В результате роста мощности источника сокращается период колебаний и увеличивается их амплитуда.

На Рис. 2 и Рис.3 представлено влияние мощности источника мономеров при фиксированном максимальном допустимом размере частиц $N = 1000$: в результате роста мощности источника мономеров увеличиваются амплитуда колебаний при одновременном сокращении их периода. Из Рис. 3 следует отсутствие качественного влияния мощности источника на характер колебаний: обнаружено эмпирическое правило перемасштабирования модельного времени и концентраций частиц для системы на корень из значения мощности источника J относительно единичного:

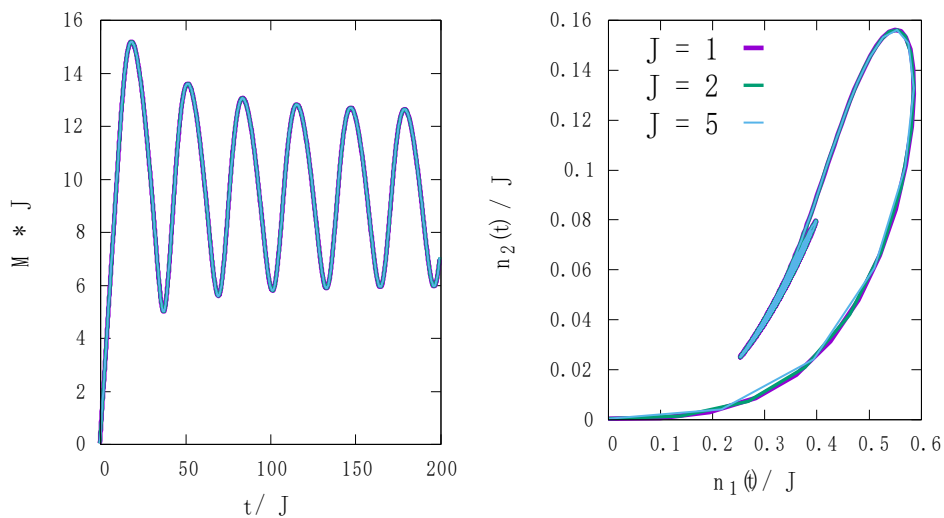
$$n_i(t)|_J = n(t\sqrt{J})|_{J=1} \sqrt{J} \quad (4)$$

Нижний график Рис. 3 демонстрирует предположительное существование предельного цикла для рассматриваемого класса задач.

4. Заключение.

В данной работе представлено исследование влияние мощности источника мономеров на характер колебаний в модели необратимого процесса агрегации со стоком частиц, превышающих максимально допустимый. Продемонстрировано сохранение структуры решений (и их перемасштабирование) при изменении мощности J источника мономеров. Результаты по исследованию влияния значения максимального допустимого размера частиц N согласуются с литературными данными [3]. В дальнейшем планируется расширение анализа свойств решений кинетических уравнений типа смолуховского с одновременным рассмотрением процесса ударного распада частиц [6].

$$C_{i,j} = i^{3/4} j^{3/4} + j^{3/4} i^{3/4}, \text{ scaling}$$



$$C_{i,j} = i^{3/4} j^{3/4} + j^{3/4} i^{3/4}, \text{ scaling, zoom}$$

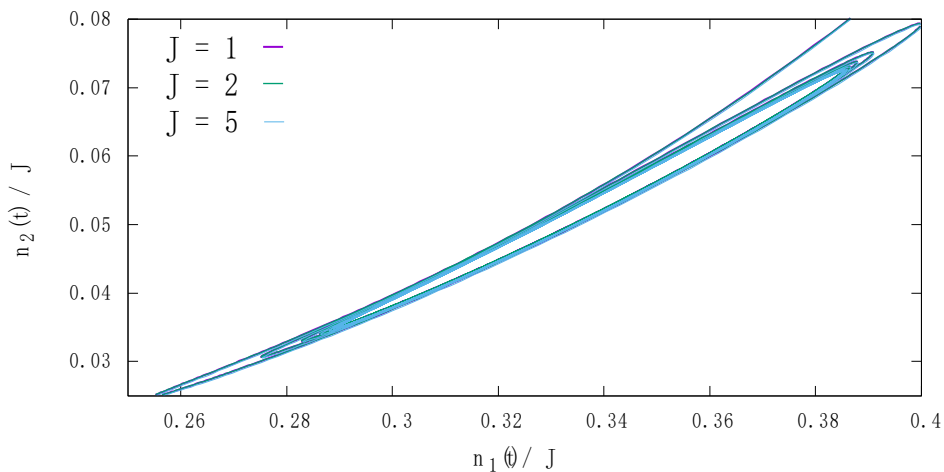


Рис.3 На верхних графиках представлены колебания полной массы со временем в зависимости от мощности источника мономеров J с учетом перемасштабирования по правилу (4) (слева), фазовая диаграмма $n_1(t)$ и

$n_2(t)$ концентраций мономеров и димеров с учетом перемасштабирования правилу (4) (справа). Наблюдается полное совпадение перемасштабированных решений. На нижнем графике представлено приближение фазовой диаграммы $n_1(t)$ и $n_2(t)$, предположительно демонстрирующее существование предельного цикла в системе. Во всех экспериментах зафиксировано значение максимального допустимого размера агрегатов $N = 1000$.

Литература

1. *Галкин В.А.* Уравнение Смолуховского. // М. Физматлит, 2001.
2. *Hisao Hayakawa*, Irreversible kinetic coagulations in the presence of a source. *Journal of Physics A*, 1987 Volume 20 Issue 12: L801
3. *Jones P.P., Rajesh R., Zaboronski O., Ball R.C., Connaughton C.* Collective oscillations in irreversible coagulation driven by monomer inputs and large-cluster outputs. *Physical Review Letters*, 2011 Volume 109 Issue 16: 168304
4. *Матвеев С.А., Тыртышников Е.Е., АП Смирнов А.П., Бриллиантов Н.В.* Быстрый метод решений уравнений агрегационно-фрагментационной кинетики типа уравнений Смолуховского. *Вычислительные методы и программирование*, 2014 т15 №1 с.1-8
5. *Матвеев С.А.* Параллельная реализация быстрого метода решения уравнений агрегационно-фрагментационной кинетики типа уравнений Смолуховского. *Вычислительные методы и программирование*, 2015 т16 №3 с.360-368
6. *Matveev S.A., Smirnov A.P. and Tyrtysnikov E.E.* A fast numerical method for the Cauchy problem for the Smoluchowski equation. *Journal of Computational Physics*, 2015 Volume 282, pp.23-32
7. *Matveev S.A., Krapivsky P.L., Smirnov A.P., Tyrtysnikov E.E. and Brilliantov N.V.* Oscillations in aggregation-shattering processes. *Physical review letters*, 2017 Volume 119 Issue 26: 260601
8. *Colm Connaughton, Arghya Dutta, Rajesh R., Nana Siddharth, and Oleg Zaboronski*, Stationary mass distribution and nonlocality in models of coalescence and shattering. *Physical Review E*, 2018 Volume 97 Issue 2: 022137
9. *Timokhin I.V., Matveev S.A., Siddharth N., Tyrtysnikov E.E., Smirnov A.P. and Brilliantov N.V.* Newton method for stationary and quasi-stationary problems for smoluchowski-type equations. *Journal of Computational Physics*, 2019 Volume 382: pp. 124-137

А.С. Жилкин, Д.Ю. Сычугов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ОХЛАЖДАЕМОЙ ПЕРВОЙ СТЕНКИ РЕАКТОРА- ТОКАМАКА*

Введение

В течение последних двадцати лет в ряде стран прорабатываются проекты следующих после ITER типов установок токамак – нейтронных источников [1] и демонстрационных реакторов [2]. По мере их проектирования растет список проблем, которых не существовало на токамаках предыдущего и нынешнего поколений и которые неизбежно придется решать на пути к реактору. Одной из проблем является создание такой первой стенки реактора, которая могла бы выдерживать идущие от термоядерной плазмы тепловые потоки. Предварительные оценки величин потоков показывают, что без дополнительного охлаждения такую стенку сделать нельзя. Если при коротких пробных разрядах нагрев первой стенки не опасен, то при промышленном запуске термоядерных установок тепловой поток, падающий на первую стенку, может привести к ее перегреву и разрушению. В данной работе строится математическая модель охлаждаемой первой стенки реактора-токамака и проводятся расчеты, позволяющие оценить эффективность системы охлаждения.

Математическая модель охлаждающей первой стенки

Охлаждающая стенка в текущей версии проекта реактора ДЕМО-ТИН [2] состоит из 2-х частей – слоя ячеек (тайлов) из PFM (Plasma-Facing Material) и двух типов трубок охлаждения. На рисунке 1 приведено схематическое изображение устройства первой стенки: оранжевым помечены ячейки из PFM, желтым отмечена трубка первого типа (в ней охлаждающая жидкость течет сверху вниз), а синим отмечена трубка второго типа (охлаждающая жидкость в ней течет снизу вверх).

Построение модели начнем с учета теплового баланса на отдельно взятом кольцевом сечении первой стенки. В уравнении баланса учитываются входящий и выходящий потоки тепла через границу стенки, нагрев тайлов, стенок трубок и охлаждающей жидкости, а также потоки тепла, выносимого охлаждающими жидкостями обоих типов. Из-за малых размеров тайлов и стенок трубок, а также достаточно большой площади их соприкосновения при расчетах можно считать, что их температуры равны и зависят только от продольной координаты x и времени:

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 17-07-00544-а, 17-07-00883-а).

$$T_{tile}(x, t) = T_{tube}(x, t) = T(x, t)$$

Наличие большого числа трубок по большому обводу тора (несколько сотен), а также малая толщина первой стенки по сравнению с размерами плазмы и толщиной blankets позволяют провести усреднение по тороидальному углу и построить усреднённую одномерную модель тонкой охлаждающей стенки. В рамках такой модели температура охлаждающей жидкости также будет зависеть от продольной криволинейной координаты x вдоль стенки и от времени.

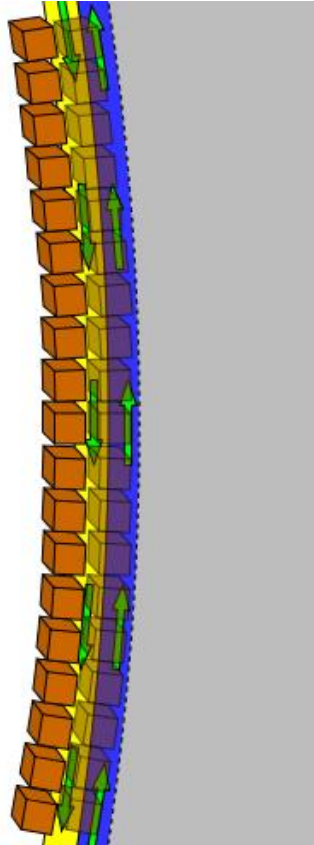


Рисунок 1 – схематическое устройство первой стенки

Необходимо также учесть, что направление течения охлаждающей жидкости в трубках зависит от типа трубки. Так как в одном сечении температура жидкости в таких трубках разная, то при построении модели необходимо отдельно учитывать наличие разных типов трубок. Поскольку охлаждающая жидкость в любой трубке течёт по выделенному каналу, то прямого теплообмена между охлаждающими жидкостями в разных типах трубок нет. Весь теплообмен так или иначе будет совершаться через материал самих трубок. Также, приняв во внимание, что трубки тонкие, а тайлы не являются сплошными, мы можем учитывать лишь конвекционный перенос тепла жидкостью и пренебрегаем теплопроводностью вдоль стенки – её вклад в тепловой баланс ничтожно мал. В итоге мы получаем уравнение теплового баланса,

на основе которого строится математическая модель охлаждающей первой стенки:

$$W_{in} - W_{out} = \gamma_{tile} w \frac{dT}{dt} + \gamma_{tube} \frac{n}{2\pi r} (S - s) \frac{dT}{dt} + \gamma_{cl} \frac{n}{4\pi r} S \sum_{i=1}^2 \left(\frac{dT_{cl}^i}{dt} + (-1)^i v \frac{dT_{cl}^i}{dx} \right) \quad (1)$$

Здесь:

- W_{in} – тепловой поток из плазмы на первую стенку;
- W_{out} – суммарные потери тепла на первой стенке из-за излучения, теплообмена в точках крепления первой стенки;
- t – время;
- x – пространственная координата, имеющая смысл длины трубки от точки ввода до рассматриваемого участка (на приведенном выше рисунке ось x направлена снизу вверх);
- v – скорость движения охлаждающей жидкости по трубкам;
- подписи tile, tube и cl указывают на характеристики ячеек PFM, трубок и хладагента;
- S – площадь полного сечения трубки (одинакова для обоих типов трубок);
- s – площадь внутреннего сечения трубки;
- w – ширина ячейки PFM;
- $\gamma_m = c_m * \rho_m$, где c_m – удельная теплоёмкость материала, а ρ_m – плотность m ;
- r – радиус рассматриваемого кольца;
- n – число трубок каждого типа в кольце.

Уравнение теплового баланса (1) дополняется уравнениями, описывающими процессы теплообмена для всех элементов первой стенки:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \frac{dT}{dt} = W_{in} - W_{out} - \alpha_1(T - T_{cl}^1) - \alpha_1(T - T_{cl}^2) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 \left(\frac{\partial T_{cl}^1}{\partial t} - v \frac{\partial T_{cl}^1}{\partial x} \right) = \alpha_1(T - T_{cl}^1) \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2 \left(\frac{\partial T_{cl}^2}{\partial t} + v \frac{\partial T_{cl}^2}{\partial x} \right) = \alpha_1(T - T_{cl}^2) \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{out} = \alpha_2(T - T_c) + eC_0AT^4 \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь:

- $k = \gamma_{tile} w + \gamma_{tube} \frac{n}{2\pi r} (S - s)$;
- $k_2 = \gamma_{cl} \frac{n}{4\pi r} S$;

- α_1 – коэффициент теплообмена первой стенки с охлаждающей жидкостью обоих типов;
- T_{cl}^1 и T_{cl}^2 – температуры охлаждающей жидкости, текущей по разным типам трубок;
- α_2 – коэффициент теплообмена первой стенки с креплением;
- e – коэффициент черноты материала первой стенки;
- C_0 – постоянная Стефана-Больцмана;
- $A = \frac{A_0}{2\pi r}$, где A_0 – площадь внешней стороны первой стенки;
- T_c – температура элементов крепления первой стенки.

Поскольку целью данной работы являлась оценка эффективности системы охлаждения первой стенки для реактора, работающего большую часть времени в стационарном режиме, то нами были внесены еще два упрощающих предположения:

1. Тепловой поток, падающий на стенку, считается постоянным по времени;
2. Считаем, что охлаждающая жидкость не претерпевает фазовых переходов в рассматриваемых пределах.

Построение модели, допускающей аналитическое решение

Рассмотрим случай полностью изолированной первой стенки $W_{out} = 0$. Для изолированной охлаждаемой стенки в стационарном случае $\frac{\delta T}{\delta t} = 0$ систему уравнений (2-5) можно решить аналитически. Для удобства изложения далее будем обозначать $W = \frac{W_{in}}{k_2}$ и $\alpha = \frac{\alpha_1}{k_2}$. При указанных предположениях из (2-5) вытекает:

$$\alpha(2T - T_{cl}^1 - T_{cl}^2) = W \quad (6)$$

$$-v \frac{\partial T_{cl}^1}{\partial x} = \alpha(T - T_{cl}^1) \quad (7)$$

$$v \frac{\partial T_{cl}^2}{\partial x} = \alpha(T - T_{cl}^2) \quad (8)$$

Из (6) следует:

$$T = \frac{1}{2}(T_{cl}^1 + T_{cl}^2 + \frac{W}{\alpha}) \quad (9)$$

Подставив (9) в (7) и (8) и обозначив $\gamma = \frac{\alpha}{2v}$, $\beta = \frac{W}{2}$ получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для T_{cl}^1 и T_{cl}^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{cl}^1}{\partial x} = \gamma(T_{cl}^1 - T_{cl}^2) - \beta \\ \frac{\partial T_{cl}^2}{\partial x} = \gamma(T_{cl}^1 - T_{cl}^2) + \beta \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{cl}^1}{\partial x} = \gamma(T_{cl}^1 - T_{cl}^2) - \beta \\ \frac{\partial T_{cl}^2}{\partial x} = \gamma(T_{cl}^1 - T_{cl}^2) + \beta \end{array} \right. \quad (11)$$

Система (10, 11) легко может быть решена аналитически:

$$T_{cl}^1_{\text{общ}} = ax + b - \gamma\beta x^2 - \beta x \quad (12)$$

$$T_{cl}^2_{\text{общ}} = ax + b - \frac{a}{\gamma} - \gamma\beta x^2 + \beta x \quad (13)$$

Формулы (12)-(13) описывают общее решение системы (10)-(11), здесь a, b – свободные коэффициенты. Рассмотрим теперь охлаждаемую стенку конечной длины $2L$ ($-L \leq x \leq L$). Пусть $x = L$ является точкой ввода жидкости для трубок первого типа, тогда $T_{cl}^1(L) = 0$. Аналогично для трубок второго типа возникает условие $T_{cl}^2(-L) = 0$. Подставляя эти граничные условия в (12) и (13), получаем:

$$T_{cl}^1 = \gamma\beta(L^2 - x^2) + \beta(L - x) \quad (14)$$

$$T_{cl}^2 = \gamma\beta(L^2 - x^2) + \beta(L + x) \quad (15)$$

Для температуры стенки (9) получаем:

$$T(x) = \frac{W}{4} \left(\frac{\alpha}{v} (L^2 - x^2) + 2L + \frac{2}{\alpha} \right) \quad (16)$$

Из (16) видно, что самый большой нагрев стенки будет около экватора, чего и следовало ожидать.

Результаты численного моделирования работы охлаждающей первой стенки реактора

Система уравнений (1)-(5) решалась численно с помощью двумерного метода конечных разностей. Для оценки эффективности приведённой конструкции первой стенки было дополнительно принято, что отсутствует теплообмен первой стенки с её креплением (вклад этого процесса теплообмена в общий тепловой баланс стенки пренебрежительно мал), $\alpha_2 = 0$.

Начальная температура всей конструкции, а также температура входящей в зону рассмотрения охлаждающей жидкости были приняты равными 100°C . За охлаждающую жидкость была взята вода. Высота первой стенки равна 1.15 м . Внешний диаметр трубок $r_{out} = 1\text{ см}$ внутренний диаметр $r_{in} = 1\text{ см}$. Материал для тайлов – бериллий, для трубок – хромциркониевая бронза. Плотность падающего теплового потока $W_{in} = 0.5\text{ МВт/м}^2$.

На рисунке 2 приведена зависимость температуры середины первой стенки в промежутке от 0 до 5 секунд с момента появления теплового потока. Зеленая линия показывает зависимость при скорости охлаждающей жидкости в 1 м/с , синяя – при скорости 5 м/с . Как видно из графиков, даже скорости в 1 м/с достаточно для поддержания постоянной рабочей температуры первой стенки.

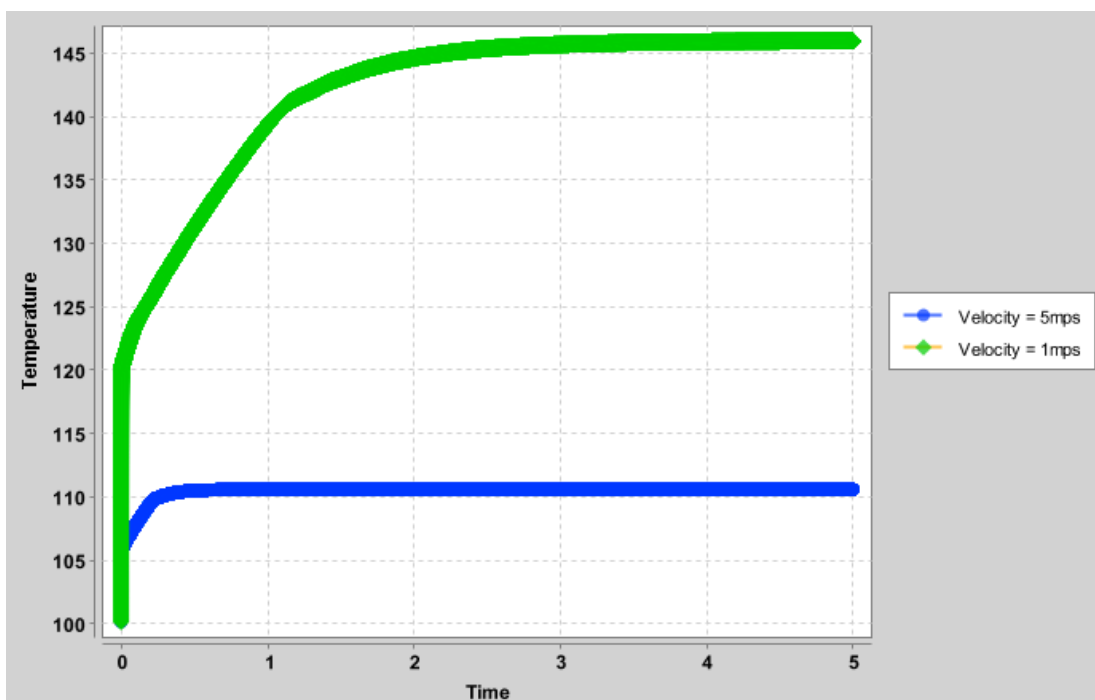


Рисунок 2 – температура середины первой стенки в зависимости от времени

Особый интерес представляет изменение поведения графиков в зависимости от того, насколько обновилась охлаждающая жидкость в стенке. В самом начале из-за очень малой разницы в температуре между стенкой и водой происходит стремительный нагрев стенки. Как только разница в температуре становится достаточной для появления существенного теплообмена между трубками и водой, нагрев стенки сильно замедляется. На этом этапе мы по-прежнему видим линейный рост температуры первой стенки, но скорость роста падает в разы, потому что вода, будучи очень емким теплоносителем, начинает принимать большое количество тепла от трубок. После того, как вода в трубках полностью обновилась, температура первой стенки быстро выходит на стационарный уровень.

Выводы

В работе построена одномерная усредненная математическая модель охлаждающей первой стенки реактора при наличии в ней двух типов трубок с охлаждающей жидкостью. Проведенные демонстрационные расчеты показали, что при параметрах установки, характерных для проектируемого реактора ДЕМО-ТИН, такая стенка при использовании воды в качестве теплоносителя способна выдерживать тепловой поток, идущий от плазмы.

Литература

1. *G.M. Voss, S. Davis, A. Dnestrovskij, A. Kirk, P.J. Knight, M. Loughlin, M.H. O'Brien, D. Sychugov, A. Tabasso, H.R. Wilson.* Conceptual design of a component test facility based on the spherical tokamak. //Fusion Engineering and Design, v. 83, 2008, pp. 1648-1653
2. *B.V. Kuteev, E.A. Azizov, P.N. Alexeev, V.V. Ignatiev, S.A. Subbotin and V.F. Tsibulskiy.* Development of DEMO-FNS tokamak for fusion and hybrid technologies. //2015, Nucl. Fusion 55 073035

Раздел III. Обратные задачи

А.В. Ильин, В.В. Фомичев, А.С. Фурсов

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ*

Введение.

При решении задач управления для реальных объектов всегда приходится иметь дело с различными видами помех, неопределенностей. Это могут быть как внешние помехи (неизвестные входные сигналы, действующие на объект), так и «внутренние» помехи, обусловленные неточным знанием динамики объекта либо неточностью измерительных систем. Для решения задач управления можно выделить два основных подхода. Первый связан с попыткой оценить эти возмущения с целью их дальнейшей компенсации. И тогда возникают задачи наблюдения и обращения, задачи оценивания сигналов в системе либо внешних сил. Второй подход связан с синтезом таких законов управления, которые «игнорируют» возмущения тех или иных типов. К такому типу задач относится задача стабилизации переключаемых систем. Безусловно, круг задач управления системами в условиях неопределенности значительно шире, но мы остановимся более подробно на этих трех задачах.

1. Задача наблюдения при наличии внешних возмущений.

Пусть задана линейная система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU + D\zeta, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный фазовый вектор, $U \in \mathbb{R}^k$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — известные вход и выход системы соответственно, $\zeta \in \mathbb{R}^m$ — неизвестный вход (возмущение), A , B , C и D — постоянные известные матрицы соответствующих размеров. Требуется по известной информации об объекте и измеряемым сигналам $y(t)$ и $U(t)$ построить (в режиме реального времени) асимптотическую оценку неизвестного фазового вектора $x(t)$.

Наиболее проработана ситуация, когда размерность неизвестного входа меньше размерности измеряемого выхода, т.е. $m < l$. В этом случае можно предложить несколько подходов к решению задачи [1-3]. Рассмотрим один из возможных, следуя [4].

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-07-00540 а, 18-07-01283 а, 18-51-00004 Бел а, 17-07-00899 а);

Пусть относительно системы (1) выполнены следующие предположения:

П.1. Система (1) управляема и наблюдаема.

П.2. $m < l, \text{rank } C = l, \text{rank } D = m$.

П.3. $\text{rank } (CD) = m$, (т.е. CD — матрица полного ранга).

Инвариантными нулями системы называют такие значения $s \in \mathbb{C}$, при которых

$$\text{rank } R(s) = \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} < n + m, \quad (2)$$

т.е. при которых понижается ранг матрицы Розенброка $R(s)$.

П.4. Инвариантные нули системы устойчивые либо отсутствуют (т.е. $R(s^*) < 0$ для любого s^* удовлетворяющего (2)).

Если выполнено П.3, то, перенумеровав выходы, можно добиться, чтобы

$$C = \begin{bmatrix} C' \\ C'' \end{bmatrix}, C' \in \mathbb{R}^{m \times n}, C'' \in \mathbb{R}^{(l-m) \times n}, \det(C'D) \neq 0. \quad (3)$$

Тогда выход системы распадается на две части: $y = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'x \\ C''x \end{bmatrix}$, а система (1) невырожденным преобразованием координат $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Tx$, где $x' \in \mathbb{R}^{(n-m)}$, $y' \in \mathbb{R}^m$, приводится к виду:

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y' + B'U \\ \dot{y}' = A_{21}x' + A_{22}y' + (C'D)\zeta + B''U. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь неизвестная часть фазового вектора x' не зависит явно от возмущения $\zeta(t)$.

В новых координатах выход y'' имеет вид $y'' = \tilde{C}''x' + \tilde{\tilde{C}}''y'$, а значит можно определить новый выход $\tilde{y} = y'' - \tilde{\tilde{C}}''y' = \tilde{C}''x'$. Имеет место утверждение

Теорема 1 [4]. Пусть для исходной системы (1) выполнены предположения П.1-П.4 и система приведена к виду (4). Тогда если у системы нет инвариантных нулей, то пара $\{A_{11}, \tilde{C}\}$ наблюдаема, а если у системы (1) есть устойчивые инвариантные нули, то пара $\{A_{11}, \tilde{C}\}$ — обнаруживаема, причем инвариантные нули образуют ненаблюдаемый спектр. Тогда для решения задачи достаточно построить асимптотический наблюдатель для системы без неопределенности

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y' + B'U \\ \tilde{y} = \tilde{C}'x'. \end{cases} \quad (5)$$

Эта задача решается классическими методами [4].

Задача усложняется, если для системы не выполняется условие П.3. Тогда для системы (1) невозможно приведение к виду (4). Для решения

задачи в этом случае возможен подход, который проиллюстрируем на случае $m = 1$ и $l = 2 > m$. Тогда $y = \begin{bmatrix} C_1 x \\ C_2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Пусть для выходов y_1 и y_2 определены r_1 и r_2 — относительные порядки: $C_i D = 0, \dots, C_i A^{r_i-2} D = 0, C_i A^{r_i-1} D \neq 0, i = 1, 2$.

Т.к. $\text{rank } CD \neq 1$, то $\text{rank } CD = 0$, т.е. $CD = 0$, а значит $r_1, r_2 > 1$. Пусть $r_1 \leq r_2$. Тогда система (1) может быть приведена к виду с выделением нулевой динамики по выходу y_1 :

$$\begin{cases} \dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y_1 + B'U \\ \dot{y}' = A_{21}x' + A_{22}y' + D'\zeta + B''U, \end{cases} \quad (6)$$

где $x' \in \mathbb{R}^{n-r_1}, y' \in \mathbb{R}^{r_1}, y'_1 = y_1, y'_i = (y_1)^{(i-1)}$ — производные первого выхода, матрицы A_{21}, A_{22}, D' имеют каноническую структуру [5].

Т.к. $r_2 \geq r_1$, то $y_2 = \tilde{C}_2 x' + \tilde{C}_2 y_1$ — не зависит от компонент y'_i при $i > 1$, а значит определен выход $\tilde{y} = y_2 - \tilde{C}_2 y_1 = \tilde{C}_2 x'$. Так же как и в предыдущем случае при выполненном предположении П.4 пара $\{A_{11}, \tilde{C}_2\}$ либо наблюдаема, либо детектируемая, а для системы типа (5) (правда меньшей размерности) может быть построен асимптотический наблюдатель.

Для восстановления компонент вектора y' требуется построить наблюдатель для системы с максимальным относительным порядком. Для этого можно воспользоваться, в частности, методами, предложенными в работах [5], где для решения задачи использован каскад двумерных наблюдателей с нелинейной и разрывной обратными связями.

2. Обращение динамических систем.

Задачи обращения или обратные задачи динамики имеют давнюю историю и рассматриваются в автоматической теории управления как классические задачи определения неизвестных управлений (внешних воздействий).

Рассматривается линейная динамическая система вида:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + b\xi \\ w = cz, \end{cases} \quad (7)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, \xi(t), w(t) \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)$, A, b, c — матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности. Необходимо по известному выходу $w(t)$ построить оценку неизвестного входного сигнала $\xi(t)$.

Будем считать также, что для системы (7) выполнены следующие предположения:

П.5. Пара $\{A, b\}$ — управляема, пара $\{c, A\}$ — наблюдаема.

П.6. Передаточная функция системы (7) имеет вид:

$$W(s) = c(sE - A)^{-1}b = \frac{\beta_m(s)}{\alpha_n(s)},$$

где $\beta_m(s)$, $\alpha_n(s)$ – полиномы от s степени m и n соответственно. Будем предполагать, что для λ_i , таких что $\beta_m(\lambda_i) = 0$ выполнено условие: $\text{Re}(\lambda_i) \leq -\gamma < 0$, $i = 1, \dots, m$, $\gamma > 0$.

П.7. Относительный порядок системы (1) равен 1, т.е. $r = n - m = 1$.

П.8. Неизвестный входной сигнал $\xi(t)$ удовлетворяет условию:

$$\xi \in \Omega^1 = \{\xi(t): \xi \in C^1[0, \infty), |\xi(t)| \leq \xi^0, |\dot{\xi}(t)| \leq \xi^1\}.$$

Для решения задачи обращения используем управляемую модель для системы (7)

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + bu \\ \tilde{w} = c\tilde{z}. \end{cases} \quad (8)$$

Система в отклонениях для $x = \tilde{z} - z$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b(u - \xi) \\ y = cx, \end{cases} \quad (9)$$

где $y = \tilde{w} - w$ – известный выход системы (9). Стабилизируем фазовый вектор x системы (9) в нуле, используя управление $u(y)$. Так как для системы (7) выполнены предположения П.5 и П.7, то неособым преобразованием координат эта система может быть сведена к более простому виду

$$\begin{cases} \dot{x}' = A'x' + b'y \\ \dot{y} = A''x' + b''y + (u - \xi). \end{cases} \quad (10)$$

При сделанных выше предположениях можно построить наблюдатель вектора пространства состояний для системы (4):

$$\dot{\tilde{x}}' = A'\tilde{x}' + b'y, \quad \tilde{x}'(0) = 0. \quad (11)$$

Ошибка наблюдения $e' = \tilde{x}' - x'$ в соответствии с предположением П.6 удовлетворяет оценке $|e'(t)| \leq |x'(0)|C_1e^{-\gamma t}$. Для стабилизации системы (10) используем разрывную обратную связь вида:

$$u = -A'\tilde{x}' - (b'' + \alpha)y - F\text{sgn}(y) \quad (12)$$

с некоторыми константами $\alpha > 0$ и $F > \xi^0 + h$, $h > 0$.

В системе за конечное время возникает скользящий режим на плоскости $y = cx = 0$. Движение системы в скользящем режиме описывается первым уравнением системы (10) при $y \equiv 0$, и, следовательно, является асимптотически устойчивым.

В качестве оценки неизвестного входа $\xi(t)$ используем

$$\tilde{\xi}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Тогда справедлива

Теорема 2. Пусть для системы (7) выполнены предположения П.5-П.8. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $T > 0$, что для $\tilde{\xi}$ из (13) начиная с некоторого момента времени $t' \geq T$ справедлива оценка

$$|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \leq K_1 e^{-\gamma t} + \frac{\xi^1 T}{2}$$

Таким образом, уравнения (8), (12), (13) описывают восстановитель входа системы (7) с любым наперед заданным показателем точности (за счет выбота параметра фильтра T).

Что касается работоспособности представленных алгоритмов в реальных условиях, то исследовались случаи, когда релейные элементы реализуются с неидеальностями в переключениях пространственного или временного типов, с ошибками измерения выхода, рассматривалась ограниченная вариация параметров. Для всех перечисленных случаев описанные алгоритмы робастны.

Отдельную сложность представляет случай системы со многими входами и выходами (векторные системы). Для векторных систем ключевым является вопрос корректного определения относительного порядка и нулевой динамики. Также был рассмотрен класс систем, особенно важный для решения практических задач, когда возникает требование о синтезе инверторов минимального порядка (это требование связано с ограничениями на сложность, стоимость, быстродействие систем автоматического управления). Подробное описание всех перечисленных случаев можно найти в [6].

3. Системы с запаздыванием. Необходимые условия обращения.

Отдельно рассмотрим задачу люращения для систем с запаздыванием. Рассмотрим формальную постановку задачи. Задана система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^k A_i x(t - i\tau) + \sum_{i=0}^k B_i \xi(t - i\tau), \\ y &= \sum_{i=0}^k C_i x(t - i\tau), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $\xi(t)$ – неизвестный вход системы, $y(t)$ – измеряемый выход, $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$; A_i, B_i, C_i – постоянные известные матрицы соответствующих размерностей; $\tau, 2\tau, \dots, k\tau$ – запаздывания (рассматривается случай соизмеримых запаздываний), $k\tau$ – максимальная величина запаздывания по фазовому вектору, входу и выходу. Начальные функции $x(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$ определены при $\Theta \in [-k\tau, 0]$ и такие, что решение системы (14) существует и единственно при $t \in (0, +\infty)$. Однако сами эти начальные функции считаются неизвестными.

Для решения задачи в соответствии с методами, предложенными в [6-7], предлагается построить динамическую систему (инвертор), на вход которой подается измеряемый выход $y(t)$ (и, возможно, $y(\Delta)$, $\Delta \in [0, t]$), а выход этой системы принимается за $\tilde{\xi}(t)$.

Рассмотрим сначала условия обратимости системы (14). Будем называть порождающим набором p совокупность начальных функций

$x(\Theta)$ и $\xi(\Theta)$, $\Theta \in [-k\tau, 0]$, и входного сигнала $\xi(t)$, $t \in (0, +\infty)$. Этот набор однозначно порождает решение системы (14) $x(t)$ и выход $y(t)$ при $t \in (0, +\infty)$. Для разрешимости задачи требуется, чтобы для двух наборов p_1 и p_2 , порождающих один и тот же выход $y(t)$, выполнялось условие $|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ ($t \in (0, +\infty)$) – входные сигналы для указанных наборов.

Установим требования к параметрам системы, при которых эти условия выполняются. Для дальнейших исследований удобно перейти при описании системы (14) к операторному представлению. Введем оператор запаздывания $d(f(t)) = f(t - \tau)$. При этом $d^0 f(t) = f(t), \dots, d^k f(t) = f(t - k\tau)$, оператор d перестановочен с оператором дифференцирования, т.е. $d(\dot{f}(t)) = \dot{d}f(t) = \dot{f}(t - \tau)$. С использованием оператора d исходная система может быть записана в виде

$$\dot{x} = A(d)x + B(d)\xi, \quad y = C(d)x, \quad (15)$$

где $A(d), B(d), C(d)$ – полиномиальные матрицы соответствующих размерностей. Описание системы в виде (15) аналогично описанию линейных систем без запаздывания, поэтому для решения задачи можно использовать подходы [6] к обращению линейных стационарных систем, разумеется, с изменениями, учитывающими полиномиальный вид матриц $A(d), B(d)$ и $C(d)$.

Для анализа обратимости системы (15) рассмотрим матрицу Розенброка системы (см., например, [7])

$$R(s, d) = \begin{bmatrix} sI - A(d) & -B(d) \\ C(d) & 0 \end{bmatrix}, \quad d = e^{-s\tau}. \quad (16)$$

Считаем, что $l \geq m$, т.е. число выходов не меньше числа неизвестных входов. Инвариантными нулями будем называть такие значения $s^* \in \mathbb{C}$, что выполняется условие $\text{rank} R(s^*, e^{-s^*\tau}) < m + n$. В [7] доказано следующее необходимое условие обратимости.

Теорема 3. Для асимптотической обратимости системы (15) при $m \leq l$ необходимо, чтобы у нее отсутствовали неустойчивые инвариантные нули, т.е. выполнялось условие $\text{rank} R(s, e^{-s\tau}) = n + m \quad \forall s \in \mathbb{C}_+$.

Далее будем считать, что выполнено условие

$$\text{Re } s^* < -\gamma < 0, \quad s^*: \text{rank} R(s^*, e^{-s^*\tau}) < n + m. \quad (17)$$

4. Алгоритмы обращения систем с запаздыванием.

Для решения задачи обращения используем управляемую модель, с помощью которой решалась задача обращения без запаздывания [6]. Этот подход основывается на модели системы (15), где вместо $\xi(t)$ используется управление $u(t)$, направленное на стабилизацию в нуле разности между выходом системы $y(t)$ и выходом модели. Далее будем

рассматривать базовый случай скалярной системы, т.е. $m = l = 1$. Для реализации предложенного подхода, необходимо привести систему (15) к специальному виду. Это возможно, если пара $\{A(d), B(d)\}$ удовлетворяет условию

$$\det \mathcal{K}\{A, B\} = \det[B(d), A(d)B(d), \dots, A^{n-1}(d)B(d)] = \text{const} \neq 0,$$

т.е. матрица управляемости Калмана $\mathcal{K}\{A, B\}$ является унимодулярной. В этом случае пара $\{A, B\}$ управляема и, более того, невырожденным преобразованием координат с унимодулярной матрицей система приводится к канонической форме управляемости.

Далее используем схему обращения, аналогичную схеме с разрывной обратной связью с поправкой на запаздывание. В [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть инвертируемая система (14) управляема и наблюдаема, ее матрица управляемости унимодулярна. Тогда система может быть приведена к нормальной канонической форме. Пусть также выполнено условие (17) и, кроме того, выполнено П.8.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T > 0$ такое, что начиная с некоторого момента времени для $\tilde{\xi}(t) = u_T(t)$ – скользящего среднего (с параметром T) часть управления

$$u(t) = -\alpha(\tilde{y}(t) - y(t)) - F \text{sgn}(\tilde{y}(t) - y(t)) = -\alpha e(t) - F \text{sgn} e(t) \quad ,$$

$\alpha > 0, F > \xi^0$, имеет место оценка $|\tilde{\xi}(t) - \xi_T(t)| \leq \varepsilon$.

5. О проблеме стабилизации переключаемых систем

Одним из активно развивающихся направлений современной теории автоматического управления, связанной с управлением в условиях неопределенности, является теория переключаемых систем. Под переключаемой системой понимают многорежимную динамическую систему, определяемую семейством непрерывных или дискретных по времени подсистем и правилами, задающими переключения между ними. Математическими моделями таких систем являются системы дифференциальных или разностных уравнений со "скачкообразно" изменяющимися правыми частями.

Приложения переключаемых систем весьма разнообразны. Например, переключаемые системы используют для моделирования функционирования реальных управляемых технических объектов или процессов, которые либо по своей специфике являются многорежимными [10-13], либо работают в условиях действующих операторных возмущений [13, 14]. Также с помощью переключаемых линейных систем можно аппроксимировать поведение нелинейных систем дифференциальных уравнений в заданных областях пространства состояний [15, 16]. Переключаемые системы находят применение и при моделировании нечетких систем управления [17].

Одной из важнейших проблем теории переключаемых систем является проблема устойчивости и стабилизации движения таких систем. Указанной тематике посвящено достаточно много публикаций российских и иностранных исследователей. Например, в работах [18, 19] и монографиях [11, 16, 17] представлены весьма обширные библиографические списки публикаций по проблемам устойчивости и стабилизации переключаемых систем. При этом стоит отметить, что предлагаемые в этих работах алгоритмы стабилизации, как правило, основаны на методе функций Ляпунова и решении линейных матричных неравенств.

В данном разделе настоящей статьи предлагается краткий обзор некоторых подходов к стабилизации переключаемых линейных систем, разработанных коллективом кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова. В частности рассмотрены переключаемые системы с неопределенностями, с запаздываниями в управлении, с режимами различных динамических порядков. Для всех сформулированных постановок задач стабилизации указаны подходы к построению стабилизирующих регуляторов.

Рассмотрим формальную постановку задачи. В достаточно общем виде непрерывную стационарную переключаемую линейную систему можно представить следующим образом

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u, \\ y = C_\sigma x, \end{cases} \quad \sigma \in S, \quad (18)$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ — кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S — множество допустимых переключающих сигналов σ ; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — вектор управляющих входов; $A_\sigma = A \circ \sigma$ — композиция отображения $A : I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ ($A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$) и переключающего сигнала σ ; $B_\sigma = B \circ \sigma$ и $C_\sigma = C \circ \sigma$ — аналогичные композиции для отображений $B : I \rightarrow \{B_1, \dots, B_m\}$ ($B_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$) и $C : I \rightarrow \{C_1, \dots, C_m\}$ ($C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$). Заметим, что функция σ может непосредственно зависеть либо от времени t , либо от вектора состояния x (т.е. $\sigma(x(t))$), либо может являться выходом (необязательно наблюдаемым) некоторой динамической системы.

В любом случае, переключаемую систему можно понимать именно как многорежимную динамическую систему с законами переключения $\sigma \in S$, определяющими промежутки активности каждого режима. В случае системы (18) под режимом понимается динамическая система, определяемая какой-либо тройкой (C_i, A_i, B_i) , $i = 1, \dots, m$, т.е.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u, \\ y = C_i x. \end{cases}$$

При этом, в силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$, переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом.

Как правило, при исследовании переключаемых систем различают два случая. Первый случай предполагает возможность произвольных переключений $\sigma \in S_0$ в процессе функционирования системы, а во втором случае накладываются ограничения на законы переключения (в частности, ограничение на продолжительность времени активности каждого режима). В связи с этим, введем в рассмотрение, наряду со множеством S_0 , множество $S_\tau, \tau > 0$, включающее такие кусочно-постоянные функции $\sigma(t)$, для которых минимальное расстояние между точками разрыва не меньше, чем τ . При этом значение τ называют временем задержки, а переключения медленными.

Наряду с системой (18) будем рассматривать переключаемую систему, в общем случае векторную относительно входа и заданную только уравнением состояния

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma u, \quad \sigma \in S. \quad (19)$$

Решением системы (19) при заданном управлении u_0 , переключающем сигнале $\sigma_0 \in S$ и начальном условии $x(0) = x_0$ будем называть $x(t)$, являющуюся кусочно-дифференцируемым решением линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A_{\sigma_0(t)} x + B_{\sigma_0(t)} u_0(t), \quad x(0) = x_0. \quad (20)$$

Необходимо отметить, что система (20) является обычной линейной нестационарной системой с кусочно-постоянными матрицей $A_{\sigma_0(t)}$ и неоднородностью $B_{\sigma_0(t)}$.

6. Постановки задач стабилизации.

Система (19) при $u \equiv 0$ имеет вид

$$\dot{x} = A_\sigma x, \quad \sigma \in S. \quad (21)$$

Будем говорить, что переключаемая линейная система (4) S -устойчива, если при любом начальном условии $x(0)$ и любом переключающем сигнале $\sigma \in S$, для нормы соответствующего решения $x(t)$ выполнено соотношение

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$$

Далее будем считать, что закон переключения $\sigma(t)$ является ненаблюдаемым, т.е. в каждый момент времени неизвестно, какой режим является активным. Такая ситуация возможна, например, если с помощью переключаемой системы моделируется действие неопределенных внешних параметрических возмущений. Ниже перечислены задачи, которые рассматривались в работах [20-25].

Задача 1. Для переключаемой линейной системы вида (18) при $r = 1$, $l = 1$, $S = S_0$ (или $S = S_\tau$) требуется построить динамическую обратную связь

$$u = \gamma z - \mu y, \quad \dot{z} = \Gamma z - \theta y, \quad (22)$$

обеспечивающую S -устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma \mu c_\sigma)x + b_\sigma \gamma z, \quad \dot{z} = -\theta c_\sigma x + \Gamma z, \quad \sigma \in S. \quad (23)$$

Обратную связь, обеспечивающую S -устойчивость замкнутой системы, будем называть S -стабилизирующей.

Задача 2. Для переключаемой линейной системы вида (19) при $r = 1$ и $S = S_0$ требуется построить S -стабилизирующую статическую обратную связь вида

$$u = -kx, \quad k \in \mathbb{R}^{1 \times n}. \quad (24)$$

Задача 3. Для переключаемой линейной системы вида (19) при $S = S_0$ и с координатным возмущением $f(t)$

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma(u + f), \quad \sigma \in S, \quad \|f(t)\| \leq f_0, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

требуется построить S -стабилизирующий регулятор в форме разрывной обратной связи по состоянию

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_r(x)), \quad u_i(x) = \begin{cases} u_i^+(x), & \text{если } \rho_i(x) > 0, \\ u_i^-(x), & \text{если } \rho_i(x) < 0 \end{cases} \quad (26)$$

($\rho_i(x) = c_i x$, $c_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $u_i^+(x)$, $u_i^-(x)$ — подлежащие выбору непрерывные функции), который

1) создает в замкнутой системе

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma(u(x) + f(t)), \quad \sigma \in S, \quad (27)$$

скользящее движение на пересечении поверхностей $\rho_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, r$);

2) гарантирует попадание траектории системы (27) на пересечение поверхностей $\rho_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, r$) из любой точки фазового пространства;

3) обеспечивает экспоненциальную устойчивость скользящего движения системы (27) на пересечении поверхностей $\rho_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, r$).

В связи с тем, что в настоящее время при построении технических систем управления активно используются информационные технологии, то достаточно актуальной является задача разработки алгоритмов построения цифровых регуляторов. Цифровой регулятор в виде обратной связи по выходу для непрерывной системы можно представить в виде последовательного соединения трех звеньев: идеального квантователя (модель аналого-цифрового преобразователя), преобразующего аналоговый сигнал $y(t)$ в дискретную (решетчатую) функцию $y[lT]$ ($T > 0$, $l = 0, 1, \dots$); дискретного регулятора (алгоритм работы для цифрового вычислительного устройства)

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT] \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v[0] = v_0 \end{cases} \quad (28)$$

и формирующего элемента (модель цифро-аналогового преобразователя)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} u[jT]S(t-jT), \quad S(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь T — период квантования по времени t (считаем, что $T < \tau$), $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $q \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, $H \in \mathbb{R}^{1 \times r}$, $h \in \mathbb{R}$ (r — порядок регулятора), $u[\cdot]$, $y[\cdot]$, $v[\cdot]$ — дискретные функции, определенные на последовательности $\{lT\}_{l=0}^{\infty}$, формирующий элемент представлен фиксатором нулевого порядка [27].

Задача 4. Для переключаемой линейной системы вида (18) при $r = 1$, $l = 1$, $S = S_{\tau}$ (для некоторого τ) требуется построить S -стабилизирующий цифровой регулятор вида (28-29).

Заметим, что использование цифровых регуляторов особенно актуально при решении задач стабилизации для динамических систем с запаздыванием [28]. Соответствующую задачу можно поставить следующим образом.

Задача 5. Для скалярной переключаемой линейной системы при $S = S_{\tau}$ (для некоторого τ) с постоянным запаздыванием $\theta > 0$ в управлении

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) + b_{\sigma}u(t - \theta), \\ y(t) = c_{\sigma}x(t), \end{cases} \quad \sigma \in S, \quad (30)$$

построить S -стабилизирующий цифровой регулятор вида (28-29).

7. О некоторых подходах к стабилизации переключаемых линейных систем.

В работе [20] для скалярных переключаемых линейных систем рассмотрены задачи стабилизации по состоянию и по выходу (задачи 1-3). Для стабилизации по состоянию приведены: метод, основанный на решении систем линейных матричных неравенств; метод, основанный на поиске сверхстабилизирующего регулятора; метод построения стабилизирующего регулятора переменной структуры для переключаемой системы второго порядка. Приведенные методы, фактически, предполагают построение одновременно стабилизирующего регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой переключаемой системы при произвольных переключающих сигналах. Для стабилизации по выходу предложен алгоритм, предполагающий описание режимов переключаемой системы через передаточные функции с последующим построением одновременно стабилизирующей динамической обратной связи по выходу, обеспечивающей устойчивость каждого режима в отдельности. Поскольку при этом, в общем случае, не гарантируется устойчивость замкнутой переключаемой системы, то в работе [20] предложен алгоритм расчета времени задержки для режимов переключаемой системы, для которой

построенный регулятор будет обеспечивать устойчивость замкнутой системы (в данном случае речь идет о стабилизации при медленных переключениях).

В работе [21] рассматривается задача стабилизации по состоянию скалярной переключаемой линейной системы произвольного динамического порядка неопределенностями, структурно согласованными с управляющим входом (задача 3).

В работе [22] исследуется задача построения цифрового стабилизатора по выходу для скалярной переключаемой линейной системы (задача 4). В силу того, что замкнутая система управления, включающая непрерывный объект и цифровой регулятор, является непрерывно-дискретной, то ранее предложенный алгоритм стабилизации (в работе [20]) дополняется переходом к дискретной модели переключаемой системы с дальнейшим построением для полученных дискретных режимов одновременно стабилизирующего дискретного регулятора. Для найденного дискретного регулятора также получена оценка времени задержки, гарантирующей стабилизацию дискретной переключаемой системы, а, следовательно, и исходной непрерывной переключаемой системы.

В статье [23], являющейся обобщением работы [21], рассматривается задача стабилизации по состоянию векторной по входу переключаемой линейной системы (задача 3). Работа [24] частично использует результаты статьи [22] для решения задачи цифровой стабилизации по выходу скалярной переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении (задача 5). Аналогично [22], разработанный алгоритм предполагает переход от исходной непрерывной переключаемой системы, замкнутой цифровым регулятором к ее дискретной модели и дальнейший поиск дискретного (цифрового) стабилизатора как одновременно стабилизирующего для дискретных режимов. Особое внимание в работе [24] уделено исследованию условий, гарантирующих стабилизацию исходной системы при произвольных переключениях либо при медленных переключениях. С использованием результатов, изложенных в монографиях [17, 29], удалось сформулировать конструктивные условия проверки стабилизации при произвольных переключениях (на основе обобщенного спектрального радиуса конечного набора матриц) и при медленных переключениях (на основе метода функций Ляпунова).

И, наконец, в работе [25] рассмотрена задача стабилизации векторных по входу переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков. Сложность задачи стабилизации в случае режимов различных динамических порядков обусловлена

неоднозначностью в согласовании начальных условий для этих режимов на промежутках их активности. Для решения задачи стабилизации такой переключаемой системы было предложено использовать метод расширения динамического порядка [30, с. 205], позволяющий свести исходную переключаемую систему с режимами различных порядков к переключаемой системе с режимами одинаковых динамических порядков. Следует отметить, что разработанный в [25] алгоритм стабилизации предполагает весьма существенные ограничения на типы переключающих сигналов и на условия согласования начальных условий при смене режимов функционирования. Ослабление этих ограничений является задачей дальнейших исследований.

Литература

1. *Darouach M., Zasadzinski M., Xu S.J.* Full-order observers for linear systems with unknown inputs. // *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994). no. 3. 606-609.
2. *Hou M., Muller P.C.* Design of observers for linear systems with unknown inputs. // *IEEE Transactions on Automatic Control* 37 (1992), no. 6. 871-875.
3. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В., Хлавенка А.* Наблюдатели для линейных динамических систем с неопределенностью. // *Дифференц. уравнения*, 2005, Т. 41, № 11, стр. 1443-1457
4. *С.К. Коровин, Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
5. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным. // *Дифференц. Уравнения*, 2019, т. 55, № 4, с. 567-573
6. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. 2009. Москва. ФиЕматлит. 224 стр.
7. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Обращение систем с запаздыванием // *Дифф. уравнения*.— 2012.— Т. 48. №3.— С. 405–413.
8. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели // *Дифф. уравнения*.— 1997.— Т. 33, №3.— С. 329–339.
9. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Алгоритмы обращения линейных управляемых систем // *Дифф. уравнения*.— 1997.— Т. 34, №6.—С. 744–750.
10. *Liberzon D., Morse A.S.* Basic problems in stability and design of switched systems // *IEEE Control Systems*. 1999. V. 19. N 5. P. 59-70.

11. *Mahmoud M.S.* Switched time-delay systems. Stability and control. Springer Science+Business Media, LCC 2010.
12. *Шпилева О.А., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обЕор) // Автометрия, 2008, Т. 44, N 5. С. 71-87.
13. *Васильев С.Н., Маликов А.И.* О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем. // Сборник статей «Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН». Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 23-81.
14. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференц. уравнения, 2014, Т. 50, N 7. С. 865-876.
15. *Rewienski M., White J.* Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Applications 415 (2006) 426-454.
16. *Johansson M.* Piecewise Linear Control Systems. A Computational Approach. Springer, 2003.
17. *Sun Z., Ge S.S.* Stability theory of switched dynamical systems. Springer-Verlag London Limited, 2011.
18. *Heemels W.P.M.H., Schutter B., Lunze J., Lazar M.* Stability analysis and controller synthesis for hybrid dynamical systems // Phil. Trans. R. Soc. A. 2010. V. 368. P. 4937-4960.
19. *Hespanha, J.P.* Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's Invariance Principle // Automatic Control, IEEE Transactions. 2004. V. 49. N 4. P. 470-482.
20. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференц. уравнения, 2015, Т. 51, N 11. С. 1522-1533.
21. *Фурсов А.С., Капалин И.В.* Стабилизация переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференц. уравнения, 2016, Т. 52, N 8. С. 1109-1120.
22. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Исхаков Э.А.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы // Дифференц. уравнения, 2017, Т. 53, N 8. С. 1121-1127.
23. *Фурсов А.С., Капалин И.В., Хоншан Х.* Стабилизация векторных по входу переключаемых линейных систем регулятором переменной структуры // Дифференц. уравнения, 2017, Т. 53, N. 11. С. 1532-1542.
24. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Гусева В.С.* Построение цифрового стабилизатора для переключаемой линейной системы с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения, 2018, Т. 54, N. 8. С. 1132-1141.
25. *Фурсов А.С., Емельянов С.В., Капалин И.В., Сагадинова Е.С.*

- Стабилизация векторных по входу переключаемых линейных систем с режимами различных динамических порядков // Дифференц. уравнения, 2018, Т. 54, N. 11, с. 1540-1546.
26. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. - М.: Наука, 2016.
 27. Поляков К.Ю. Основы теории цифровых систем управления: учеб. пособие. СПбГМТУ, 2002.
 28. Коровин С.К., Миняев С.И., Фурсов А.С. Подход к одновременной стабилизации линейных динамических объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 2011, Т. 47, N 11. С. 1592-1598.
 29. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
 30. Фурсов А.С. Одновременная стабилизация: теория построения универсального регулятора для семейства динамических объектов. - М.: АРГАМАК-МЕДИА, 2016.

А.М. Денисов, А.А. Ефимов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Введение.

Рассматривается задача определения функции $u(x,t)$, являющейся решением интегро-дифференциального уравнения и принимающей заданные значения при $x=0$. Эта задача получается в результате редукции математической модели процесса динамики сорбции, в которой предполагается, что свойства поглощающего вещества изменяются во времени. Ставится обратная задача, состоящая в определении одного из коэффициентов интегро-дифференциального уравнения по значениям функции $u(x,t)$, заданным при $x=l$. Доказывается единственность решения обратной задачи, предлагается итерационный метод ее решения и проводится обоснование его сходимости, что позволяет доказать существование решения обратной задачи. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие сходимость итерационного метода.

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений исследовались многими авторами, см., например, [1]-[5]. Обратным задачам для математических моделей динамики посвящено большое число работ, укажем здесь [6]-[11].

1. Постановка обратной задачи и единственность её решения

Рассмотрим задачу определения функции $u(x,t)$, являющейся решением интегро-дифференциального уравнения

$$u_x(x,t) + \gamma(t)\varphi(t)u(x,t) - \gamma(t) \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(\theta)d\theta\right\} \gamma(\tau)\varphi(\tau)u(x,\tau)d\tau = 0, \quad (x,t) \in Q_T \quad (1.1)$$

где $Q_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ и удовлетворяющей условию

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.2)$$

Эта задача возникает при исследовании математических моделей процессов динамики сорбции [12], [13] в предположении, что характеристики поглощающего вещества изменяются со временем.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $\gamma(t)$ и $\mu(t)$ заданы, а $\varphi(t)$ неизвестна. Требуется определить $\varphi(t)$ и $u(x,t)$, если задана следующая дополнительная информация о решении задачи (1.1), (1.2):

$$u(l,t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Рассмотрим вопрос о единственности решения обратной задачи.

Определение. Функции $\{\varphi(t), u(x,t)\}$ называются решением обратной задачи на Q_T , если выполнены следующие условия:

$$\varphi \in C[0,T], \quad u, u_x \in C(Q_T), \quad \varphi(t) > 0, \quad t \in [0,T]$$

и $\varphi(t), u(x,t)$ удовлетворяют (1.1)-(1.3).

Теорема 1. Пусть $\gamma, \mu, g \in C[0,T]$ и $\mu(t) > 0, \gamma(t) > 0$ для $t \in [0,T]$. Тогда, если $\{\varphi_i(t), u_i(x,t)\}$ $i=1, 2$ являются решением обратной задачи в Q_T , то $\varphi_1(t) = \varphi_2(t), 0 \leq t \leq T; u_1(x,t) = u_2(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$.

Доказательство. Введём функции $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $\psi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Так как $\{\varphi_i(t), u_i(x,t)\}$ $i=1, 2$ удовлетворяют уравнению (1.1) и условию (1.2), то

$$v_x(x,t) + \gamma(t)\varphi_1(t)v(x,t) = -\gamma(t)u_2(x,t)\psi(t) + \\ + \gamma(t) \int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(\theta)d\theta\right\} \gamma(\tau)(\varphi_1(\tau)v(x,\tau) + u_2(x,\tau)\psi(\tau))d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1.4)$$

$$v(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.5)$$

Интегрируя уравнение (1.4) с условием (1.5), получим

$$v(x,t) = \Psi(x,t) + \int_0^x \int_0^t K(x,s,t,\tau)v(s,\tau)d\tau ds, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1.6)$$

где

$$\Psi(x,t) = -\psi(t) \int_0^x h_1(x,s,t)u_2(s,t)ds + \int_0^x \int_0^t K_1(x,s,t,\tau)u_2(s,\tau)\psi(\tau)d\tau ds,$$

$$K(x,s,t,\tau) = K_1(x,s,t,\tau)\varphi_1(\tau),$$

$$h_1(x,s,t) = \exp\{-\gamma(t)\varphi_1(t)(x-s)\}\gamma(t),$$

$$K_1(x,s,t,\tau) = h_1(x,s,t) \exp\left\{-\int_\tau^t \gamma(\theta)d\theta\right\} \gamma(\tau).$$

Так как $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют условию (1.3), то

$$v(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.7)$$

Разрешив уравнение (1.6) с помощью резольвенты $R(x,s,t,\tau)$ ядра $K(x,s,t,\tau)$, имеем

$$v(x,t) = \Psi(x,t) + \int_0^x \int_0^t R(x,s,t,\tau)\Psi(s,\tau)d\tau ds, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Положив $x=l$, используя условие (1.7) и поменяв порядок интегрирования в некоторых интегралах, получим уравнение для функции $\psi(t)$

$$h_2(t)\psi(t) + \int_0^t K_2(t,\tau)\psi(\tau)d\tau = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.8)$$

где $h_2(t) = \int_0^l h_1(l,s,t)u_2(s,t)ds$,

а

$$K_2(t,\tau) = -\int_0^l K_1(l,s,t,\tau)u_2(s,\tau)ds + \int_0^l R(l,s,t,\tau) \int_0^s h_1(s,\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi ds - \\ - \int_{\tau}^t \int_0^l \int_0^s R(l,s,t,\theta)K_1(s,\xi,\theta,\tau)u_2(\xi,\tau)d\xi ds d\theta.$$

Покажем, что функция $h_2(t)$ положительна на отрезке $[0, T]$. Для этого достаточно доказать, что $u_2(x, t) > 0$ для $(x, t) \in Q_T$. Так как $u_2(x, t)$ является решением задачи (1.1), (1.2) с $\varphi(t) = \varphi_2(t)$, то она удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_2(x, t) = \mu(t) \exp\{-\gamma(t)\varphi_2(t)x\} + \\ + \int_0^x \int_0^t \exp\{-\gamma(t)\varphi_2(t)(x-s) - \int_{\tau}^t \gamma(\theta)d\theta\} \gamma(\tau)\gamma(t)\varphi_2(\tau)u_2(s, \tau)d\tau ds. \quad (1.9)$$

Так как $\gamma(t) > 0$, $\mu(t) > 0$, $\varphi_2(t) > 0$ для $t \in [0, T]$, то из уравнения (1.9) следует, что $u_2(x, t) > 0$ в Q_T . Таким образом $h_2(t) > 0$ для $t \in [0, T]$, и из уравнения (1.8) следует, что $\psi(t) = 0$ для $t \in [0, T]$. Тогда функция $\Psi(x, t) = 0$ для $(x, t) \in Q_T$, и из уравнения (1.6) имеем $v(x, t) = 0$ в Q_T . Таким образом $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для $t \in [0, T]$, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в Q_T и теорема 1 доказана.

2. Итерационный метод и его сходимость.

В этом параграфе мы предложим итерационный метод решения обратной задачи и проведём обоснование его сходимости.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $u(x, t)$ являются решением обратной задачи. Из уравнения (1.1) и условия (1.2) следует, что при заданной функции $\varphi(t)$ функция $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

$$u(x, t) = \mu(t) \exp\{-\gamma(t)\varphi(t)x\} + \\ + \int_0^x \int_0^t \exp\{-\gamma(t)\varphi(t)(x-s) - \int_{\tau}^t \gamma(\theta)d\theta\} \gamma(\tau)\gamma(t)\varphi(\tau)u(s, \tau)d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_T \quad (2.1)$$

Таким образом, заданная функция $\varphi(t)$ однозначно определяет функцию $u(x, t)$, являющуюся решением уравнения (2.1). Чтобы

подчеркнуть эту зависимость, далее будем обозначать через $u(x,t;\varphi)$ решение уравнения (2.1) с заданной $\varphi(t)$.

Положив в уравнении (2.1) $x=l$ и используя условие (1.3), получим

$$g(t) = \mu(t) \exp\{-\gamma(t)\varphi(t)l\} + \int_0^l \int_0^t \exp\{-\gamma(t)\varphi(t)(l-s) - \int_\tau^t \gamma(\theta)d\theta\} \gamma(t)\gamma(\tau)\varphi(\tau)u(s,\tau;\varphi) d\tau ds.$$

Умножив это уравнение на $\exp\{\gamma(t)\varphi(t)l\}$, прологарифмировав результат и проведя простые преобразования имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{l\gamma(t)} \ln \left[\mu(t)(g(t))^{-1} + (g(t))^{-1} \int_0^l \int_0^t \exp\{\gamma(t)\varphi(t)s\} \Gamma(t,\tau)\varphi(\tau)u(s,\tau;\varphi) d\tau ds \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

где $\Gamma(t,\tau) = \exp\{-\int_\tau^t \gamma(\theta)d\theta\} \gamma(t)\gamma(\tau)$.

Уравнение (2.2) представляет собой нелинейное уравнение для функции $\varphi(t)$. Запишем его в операторном виде

$$\varphi(t) = (A\varphi)(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

где оператор $A\varphi$ определяется так

$$(A\varphi)(t) = \frac{1}{l\gamma(t)} \ln \left[\frac{\mu(t) + \int_0^l \int_0^t \exp\{\gamma(t)\varphi(t)s\} \Gamma(t,\tau)\varphi(\tau)u(s,\tau;\varphi) d\tau ds}{g(t)} \right]. \quad (2.4)$$

Используя операторное уравнение (2.3), определим итерационный процесс для нахождения решения обратной задачи

$$\varphi_{n+1}(t) = (A\varphi_n)(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.5)$$

где $\varphi_0(t)$ заданная непрерывная положительная функция.

Схема действия итерационного процесса (2.5) такова. Для заданной функции $\varphi_n(t)$ решается интегральное уравнение (2.1) и определяется функция $u(x,t;\varphi_n)$. Затем с известными $\varphi_n(t)$ и $u(x,t;\varphi_n)$ по формуле (2.4) находится $(A\varphi_n)(t)$, а значит и $\varphi_{n+1}(t)$.

Особенностью итерационного процесса (2.5) является то, что его можно рассматривать на любом отрезке $[0, t_0] \subseteq [0, T]$. Это обусловлено тем, что функция $u(x,t;\varphi)$ на множестве $Q_{t_0} = \{(x,t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_0\}$ однозначно определяется значениями $\varphi(t)$ на отрезке $[0, t_0]$. Докажем

сходимость итерационного процесса (2.5) на отрезке $[0, t_0]$, где t_0 достаточно малое положительное число.

Теорема 2. Пусть заданные функции $\gamma(t)$, $\mu(t)$ и $g(t)$ таковы, что: $\gamma, \mu, g \in C[0, T]$, $\gamma(t) > 0$, $\mu(t) > 0$, $g(t) > 0$ для $t \in [0, T]$, $\mu(0) > g(0)$. Тогда существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что на отрезке $[0, t_0]$ последовательность непрерывных функций $\varphi_n(t)$, определяемая итерационным процессом (2.5), равномерно сходится к непрерывной функции $\bar{\varphi}(t)$ такой, что $\bar{\varphi}(t)$, $u(x, t; \bar{\varphi})$ являются решением обратной задачи на Q_{t_0} .

Доказательство. Выше было доказано, что если функции $\varphi(t)$, $u(x, t)$ являются решением обратной задачи, то $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Положив в этом уравнении $t = 0$, найдём значение $\varphi(t)$ в нуле

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{1}{l\gamma(0)} \ln \left(\frac{\mu(0)}{g(0)} \right) > 0.$$

Пусть t_0 некоторое число, $t_0 \in (0, T]$. Рассмотрим множество функций

$$\Phi = \left\{ \varphi \in C[0, t_0], \frac{\varphi_0}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{3}{2} \varphi_0, 0 \leq t \leq t_0 \right\}. \quad (2.6)$$

Покажем, что существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что оператор A , определяемый (2.4), отображает множество Φ в себя и является сжимающим на этом множестве.

Получим оценку для функции $u(x, t; \varphi)$, $(x, t) \in Q_{t_0}$. Как уже отмечалось $u(x, t; \varphi) > 0$, $\forall (x, t) \in Q_{t_0}$, $\varphi \in \Phi$. Из уравнения (2.1) следует, что

$$u(x, t; \varphi) \leq \mu_M + \int_0^x \int_0^t \gamma_M^2 \frac{3}{2} \varphi_0 u(s, \tau; \varphi) d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad \forall \varphi \in \Phi \quad (2.7)$$

где $\mu_M = \|\mu\|_{C[0, T]}$, $\gamma_M = \|\gamma\|_{C[0, T]}$.

Из неравенства (2.7) следует оценка

$$0 < u(x, t; \varphi) \leq c_1 = \mu_M \exp \left\{ \frac{3}{2} \varphi_0 \gamma_M^2 T l \right\}, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (2.8)$$

Из положительности $u(x, t; \varphi)$ следует оценка снизу

$$(A\varphi)(t) \geq c_2(t_0), \quad \forall t \in [0, t_0], \quad \varphi \in \Phi \quad (2.9)$$

где $c_2(t_0) = \frac{1}{l \|\gamma\|_{C[0, t_0]}} \ln \left[\frac{\min_{[0, t_0]} \mu(t)}{\|g\|_{C[0, t_0]}} \right]$.

Используя неравенство (2.8), получим оценку сверху

$$(A\varphi)(t) \leq c_3(t_0), \quad \forall t \in [0, t_0], \quad \varphi \in \Phi, \quad (2.10)$$

$$\text{где } c_3(t_0) = \frac{1}{l \min_{[0, t_0]} \gamma(t)} \ln \left[\frac{\|\mu\|_{C[0, T]} + l t_0 \exp\{\|\gamma\|_{C[0, t_0]} \frac{3}{2} \varphi_0 l\} \|\gamma\|_{C[0, t_0]}^2 \frac{3}{2} \varphi_0 c_1}{\min_{[0, t_0]} g(t)} \right].$$

Из определения $c_2(t_0), c_3(t_0)$ и оценок (2.9), (2.10) следует, что существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что

$$c_2(t_0) \geq \frac{\varphi_0}{2}, \quad c_3(t_0) \leq \frac{3}{2} \varphi_0, \quad (2.11)$$

а значит для такого t_0 оператор A отображает множество Φ в себя.

Найдём условия, при которых оператор A является сжимающим на множестве Φ . Получим оценку устойчивости $u(x, t; \varphi)$ относительно $\varphi \in \Phi$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. Так как $u(x, t; \varphi_i)$ $i=1, 2$ являются решениями уравнения (2.1) с $\varphi(t) = \varphi_i(t)$, то для $v(x, t) = u(x, t; \varphi_1) - u(x, t; \varphi_2)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |v(x, t)| \leq & \|\mu\|_{C[0, t_0]} \|\gamma\|_{C[0, t_0]} l \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[0, t_0]} + \\ & + l t_0 \|\gamma\|_{C[0, t_0]}^2 c_1 (1 + \|\gamma\|_{C[0, t_0]} \frac{3}{2} \varphi_0 l) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[0, t_0]} + \\ & + \int_0^x \int_0^t \|\gamma\|_{C[0, t_0]}^2 \frac{3}{2} \varphi_0 |v(s, \tau)| d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$|v(x, t)| \leq c_4(t_0) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[0, t_0]}, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} c_4(t_0) = & \left[\|\mu\|_{C[0, t_0]} \|\gamma\|_{C[0, t_0]} l + \right. \\ & \left. + l t_0 \|\gamma\|_{C[0, t_0]}^2 c_1 (1 + \|\gamma\|_{C[0, t_0]} \frac{3}{2} \varphi_0 l) \right] \exp \left\{ l \|\gamma\|_{C[0, t_0]}^2 \frac{3}{2} \varphi_0 t_0 \right\}. \end{aligned}$$

Из определения (2.4) и оценки (2.12) следует, что

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_{C[0, t_0]} \leq c_5(t_0) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C[0, t_0]}, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} c_5(t_0) = & \frac{t_0}{\min_{[0, t_0]} \gamma(t) \min_{[0, t_0]} g(t)} \times \\ & \times \left[\exp \left\{ \frac{3}{2} \varphi_0 \|\gamma\|_{C[0, t_0]} l \right\} \|\gamma\|_{C[0, t_0]}^2 \left(\|\gamma\|_{C[0, t_0]} l \frac{3}{2} \varphi_0 c_1 + c_1 + \frac{3}{2} \varphi_0 c_4(t_0) \right) \right]. \end{aligned}$$

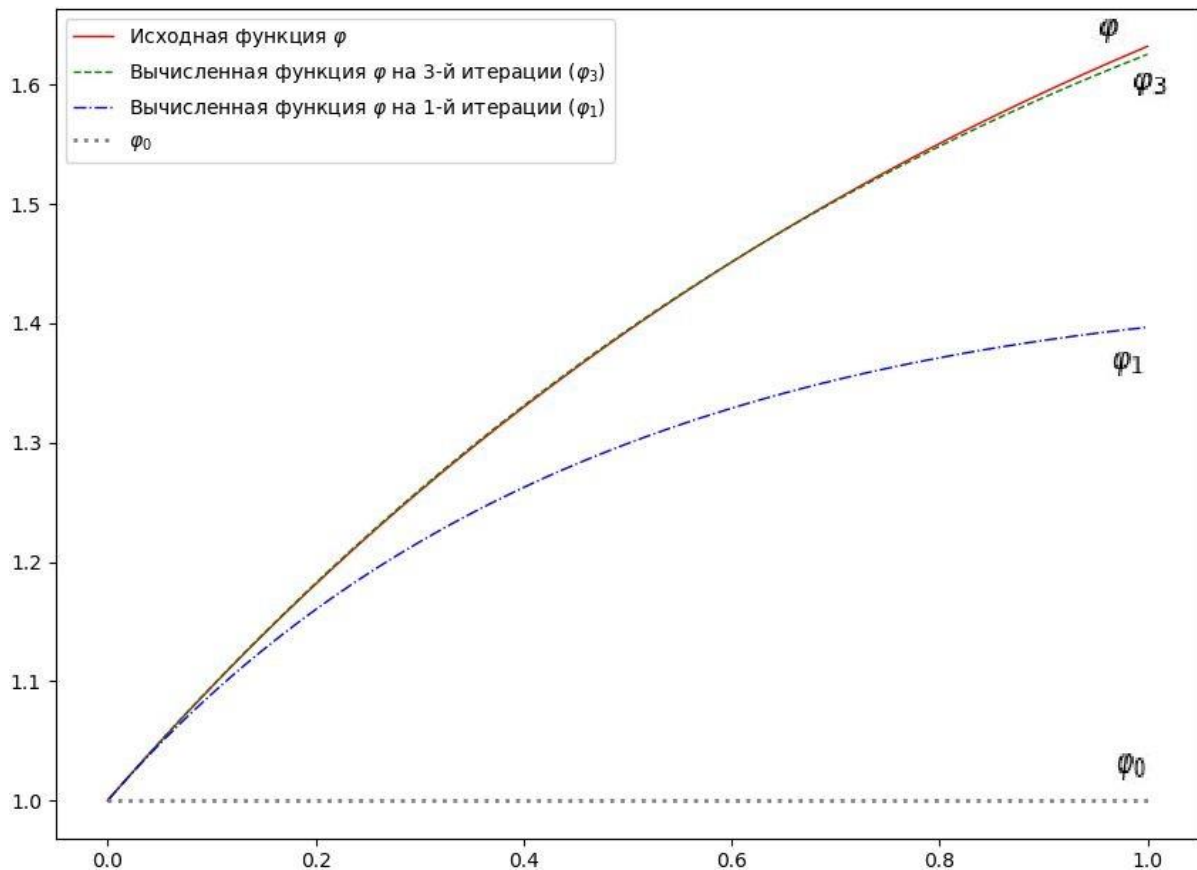
Из определения постоянных $c_2(t_0), c_3(t_0), c_5(t_0)$ следует, что существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что выполнены неравенства (2.11) и $c_5(t_0) < 1$. Для этого t_0 оператор A отображает множество Φ в себя и является сжимающим на Φ . Следовательно для любой $\varphi_0(t) \in \Phi$

последовательность функций $\varphi_n(t)$, определяемая итерационным процессом (2.5), равномерно сходится к $\bar{\varphi} \in C[0, t_0]$, являющейся решением операторного уравнения (2.3). Тогда из уравнений (2.3) и (2.1) следует, что $\bar{\varphi}(t)$, $u(x, t; \bar{\varphi})$ являются решением обратной задачи для $(x, t) \in Q_{t_0}$. Теорема 2 доказана.

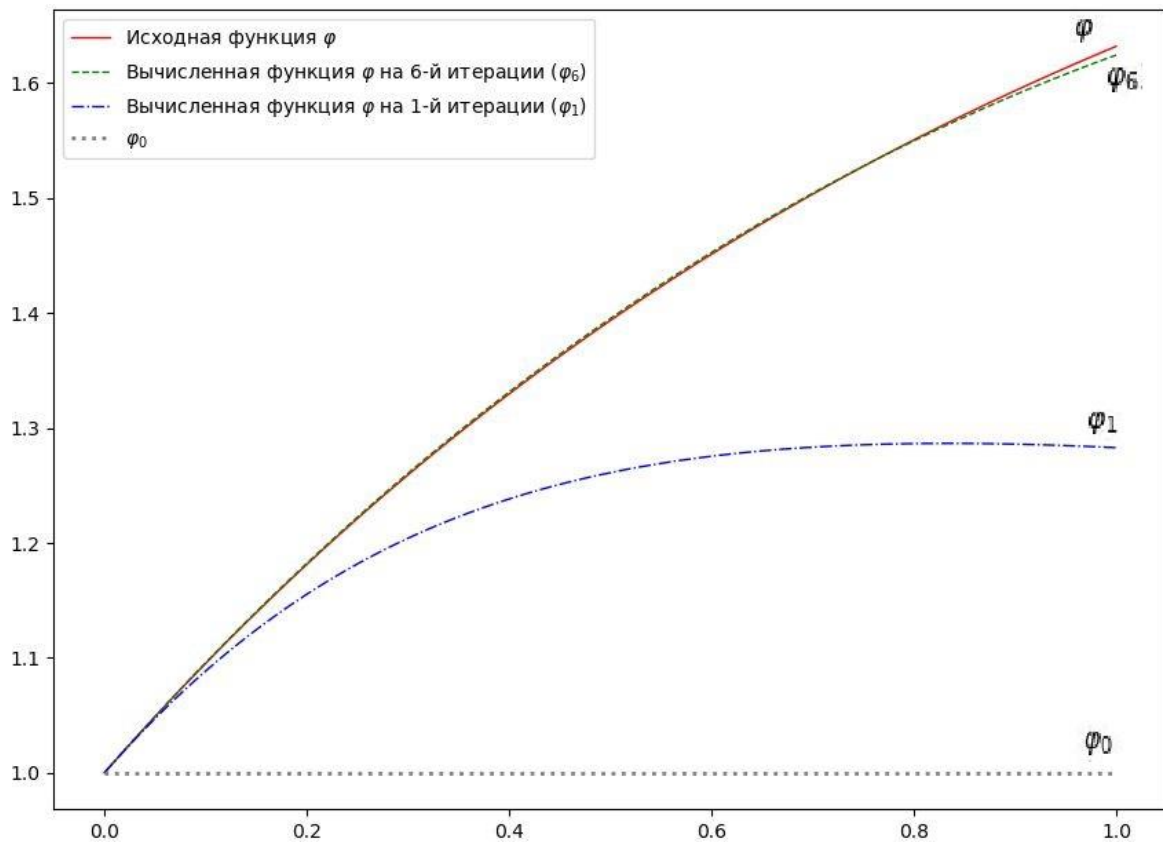
3. Результаты вычислительных экспериментов.

В этом параграфе мы приведем некоторые результаты, иллюстрирующие сходимость предложенного итерационного метода. Схема вычислительных экспериментов была такова. Задавались числа l, T , функции $\gamma(t), \mu(t), \varphi(t)$. С ними решалась задача (1.1), (1.2) и находилась функция $u(x, t)$. После этого определялась функция $g(t) = u(l, t)$, с которой затем итерационным методом решалась обратная задача и результаты сравнивались с исходной функцией $\varphi(t)$.

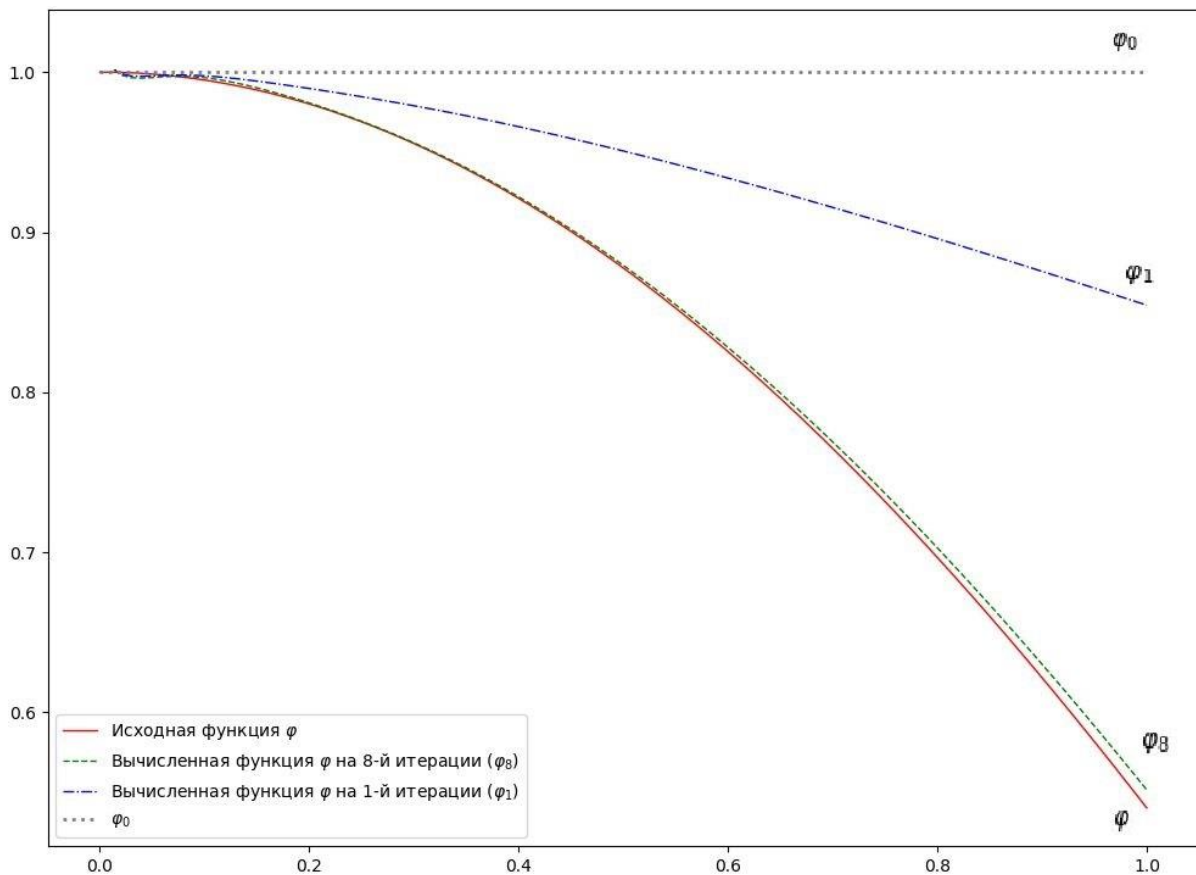
Рассмотрим первый пример. Пусть $l = 1, T = 1, \gamma(t) = 1, \mu(t) = 1 + t$, $\varphi(t) = 2 - e^{(-t)}$.



Во втором примере $l=1, T=1, \gamma(t)=1+t, \mu(t)=1+t, \varphi(t)=2-e^{(-t)}$.



В примере 3 $l=1, T=1, \gamma(t)=5, \mu(t)=1+t, \varphi(t)=\cos(t)$.



Приведённые результаты расчётов показывают очень хорошую скорость сходимости итерационного метода для рассмотренных вариантов функции $\varphi(t)$.

Литература

1. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 1994, v. 22, № 1, p. 297-321.
2. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* An inverse problem for identification of a time and space-dependent memory kernel in viscoelasticity. *Inverse Problems*, 2001, v. 17, p. 13-24.
3. *Colombo F., Guidetti D.* A global in time existence and uniqueness results for a semilinear integro-differential parabolic inverse problem in Sobolev spaces. *Math Methods in Appl. Sciences* 2007, v. 17, p. 1-29.
4. *Дурдиев Д.Н.* Глобальная разрешимость обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики. *Дифференциальные уравнения*. 2008, т.44, № 7, 893-899.
5. *Avdonin S.A., Ivanov S.A., Wang J.M.* Inverse problems for the heat equation with memory. *American Institute of Mathematical Sciences*. 2019, v. 13, № 1, p. 31-38.
6. *Денисов А.М., Туйкина С.Р.* О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции. *Доклады АН СССР*, 1984, т. 276, №1, с. 100-102.
7. *Lorenzi A., Papazoni E.* An universe problem arising in the theory of absorption. *Appl. Anal.* 1990, v. 36, № 2, p. 249-263.
8. *Denisov A.M., Lorenzi A.* Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2007, v. 15, № 6, p. 599-610.
9. *Денисов А.М.* Обратная задача для квазилинейной системы уравнений в частных производных с нелокальным краевым условием. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014, т.54, №10, с. 1571-1579.
10. *Tuikina. S.R., Solov'eva S.I.* Numerical solution of an inverse problem for a two-dimensional mathematical model of sorption dynamics. *Computational mathematics and modeling*, v.23, № 1, p.34-41
11. *Tuikina. S.R.* Numerical determination of two sorbent characteristics from dynamic observations. *Computational mathematics and modeling*. 2018, v.29, № 3, p. 299-306.
12. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М. Изд-во МГУ, 1999, 798 с.
13. *Денисов А.М., Лукин А.В.* Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. М. Изд-во МГУ, 1989, 71 с.

Раздел IV. Информатика

А.А. Васин, О.М. Григорьева

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РЫНКИ: ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕЙ ПЕРЕДАЧИ

1. Введение

Рынки природного газа, нефти и электроэнергии играют важную роль в экономике многих стран. Каждый такой рынок включает свою собственную систему передачи (трубопроводы, высоковольтные линии). Доля затрат на передачу в окончательной стоимости ресурса, как правило, велика, поэтому задача оптимизации транспортной системы представляет большой практический интерес.

Для российской экономики энергетический сектор особо важен: в совокупности электроэнергетика, газовая и нефтяная отрасли вносят 25-26% в ВВП. Оптимизация транспортной инфраструктуры является одновременно инвестицией в развитие и способом регулирования рынка в каждой отрасли и может внести существенный вклад в рост национальной экономики. Поэтому задача оптимального развития транспортных сетей энергетических рынков могла бы стать одним из национальных проектов, реализуемых в настоящее время в России. Ведущая роль государства в решении этой задачи обусловлена тем, что транспортная сеть является естественной монополией и рыночные механизмы не могут обеспечить ее эффективное развитие. При постановке задачи важно правильно сформулировать критерий оптимизации как частный случай оптимизации общественного благосостояния (см. [1]).

Публикации в этой области [2-5] обычно рассматривают краткосрочные проблемы оптимизации, связанные с фиксированными сетевыми структурами рынка. В настоящей работе предлагается обзор и обобщение результатов наших исследований [6-10] относительно методов расчета оптимального расширения сети передачи.

Рассматриваемая проблема оптимизации системы передачи является частным случаем оптимизации общественного благосостояния для рынка с несколькими товарами в условиях совершенной конкуренции [11]. Мы изучаем проблему оптимизации благосостояния, принимая во внимание производственные затраты, полезности потребления и затраты на расширение линий электропередачи в рыночной сети. Трудность решения этой проблемы связана с тем, что строительство или расширение любой линии передачи требует постоянных затрат. Если бы оптимальный набор расширяемых линий был известен, задача была бы выпуклой. Однако эффективное вычисление этого набора требует разработки специальных методов оптимизации. Задача в общей постановке является NP-трудной [9,12].

В следующем разделе представлена формальная модель рынка. В третьем и четвертом разделе излагаются результаты математического исследования задачи оптимизации благосостояния [9-10]: метод переноса балансов спроса и предложения, который решает вспомогательную задачу с фиксированным набором расширяемых линий передачи; оценка сложности этого метода; модифицированный метод переноса баланса для решения основной задачи оптимизации благосостояния и оценка потерь благосостояния в соответствии с полученными приближенными решениями. В пятом разделе рассматривается обобщение задачи оптимизации общественного благосостояния, когда расширение линий производится не одновременно, а есть некоторый интервал планирования. В течение этого интервала можно в разные периоды осуществлять расширения [13].

2. Формальное описание модели рынка

Рассматривается рынок однородного товара, состоящий из нескольких локальных рынков и сетевой системы передачи. Структура рынка соответствует графу типа дерева. Пусть N - множество узлов, соответствующих локальным рынкам и $L \subseteq \{(i, j) | i, j \in N\}$ – множество пар узлов, образующих линии передачи. Каждый узел $i \in N$ соответствует точечному совершенно конкурентному рынку, на котором цена p_i определяется из условий баланса спроса, предложения, притока и оттока товара по системе передачи. Потребители и производители соответственно характеризуются функцией спроса $D_i(p_i)$ и функцией предложения $S_i(p_i)$.

Функция спроса - невозрастающая функция, которая зависит от цены в узле i и указывает объем товара, который хотят купить потребители. Она взаимно однозначно соответствует функции полезности потребления, зависящей от объема потребления в узле i :

$$D_i(p_i) = \underset{v_i^d \geq 0}{\text{Arg max}} (U_i(v_i^d) - p_i v_i^d),$$

$$U_i(v_i^d) = \int_0^{v_i^d} D_i^{-1}(u) du,$$

где v_i^d - объем потребления в узле i .

Функция предложения $S_i(p_i)$ определяет при данной цене p_i оптимальный объем производства, максимизирующий прибыль производителей. Она связана с функцией производственных затрат $c_i(v_i)$ (неубывающая выпуклая функция, $c_i(0) = 0$), которая зависит от объема производства в узле i :

$$S_i(p_i) = \underset{v_i \geq 0}{\text{Arg max}} (p_i v_i - c_i(v_i)),$$

$$c_i(v_i) = \int_0^{v_i} S_i^{-1}(u) du.$$

Каждая линия передачи (i, j) характеризуется удельными затратами на передачу единицы товара e_{ij}^t , начальной пропускной способностью Q_{ij}^0 , фиксированными затратами E_{ij}^f и функцией переменных затрат $E_{ij}^v(\Delta Q_{ij})$ на увеличение пропускной способности (неубывающая выпуклая функция, $E_{ij}^v(0) = 0$), которая зависит от объема расширения линии; E_{ij}^f и $E_{ij}^v(\Delta Q_{ij})$ - это затраты приведенные к тому же интервалу, для которого определяются функции $D_i(p_i)$ и $S_i(p_i)$. Они рассчитываются, исходя из единовременных затрат, согласно [14].

Суммарные транспортные затраты для любой линии $(i, j) \in L$ включают затраты на передачу товара и затраты на расширение линии:

$$E_{ij}(q_{ij}) = \begin{cases} E_{ij}^f + E_{ij}^v(|q_{ij}| - Q_{ij}^0) + e_{ij}^t |q_{ij}|, & |q_{ij}| > Q_{ij}^0 \\ e_{ij}^t |q_{ij}|, & |q_{ij}| \leq Q_{ij}^0 \end{cases}$$

где q_{ij} - поток (объем передачи) из узла i в узел j . Если $q_{ij} < 0$, то передача осуществляется в обратном направлении $q_{ji} = -q_{ij}$.

При любых фиксированных потоках $\vec{q} = (q_{ij}, (i, j) \in L, i < j)$ и объемах производства $\vec{v} = (v_i, i \in N)$ общественное благосостояние определяется как суммарная полезность потребления за вычетом суммарных затрат на производство и суммарных транспортных затрат:

$$W(\vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} U_i \left(v_i - \sum_{j | (i, j) \in N} q_{ij} \right) - \sum_{i \in N} c_i(v_i) - \sum_{(i, j) \in L, i < j} E_{ij}(q_{ij}).$$

Формальная задача максимизации общественного благосостояния имеет следующий вид:

$$\max_{\vec{q}, \vec{v} \geq 0} W(\vec{q}, \vec{v}). \quad (1)$$

Из-за наличия фиксированной компоненты в функциях затрат на увеличение пропускной способности эта задача не является выпуклой.

Рассмотрим вспомогательную задачу с фиксированным множеством расширяемых линий $\bar{L} \subseteq L$:

$$\max_{\vec{q}, \vec{v} \geq 0} W(\vec{q}, \vec{v}, \bar{L}), \quad (2)$$

которая отличается от задачи (1) тем, что $|q_{ij}| \leq Q_{ij}^0$ для $(i, j) \in L \setminus \bar{L}$, и фиксированная компонента E_{ij}^f всегда включена в $E_{ij}(q_{ij})$ для $(i, j) \in \bar{L}$.

Пусть $\tilde{W}(\bar{L})$ - максимальное значение благосостояния в задаче (2). Тогда исходная задача (1) сводится к задаче поиска оптимального множества расширяемых линий:

$$L^* \in \text{Arg} \max_{\bar{L} \subseteq L} \tilde{W}(\bar{L}).$$

Пусть $\vec{p} = (p_i, i \in N)$ - вектор цен. Обозначим через $\Delta S_i(p_i) = S_i(p_i) - D_i(p_i)$ баланс предложения и спроса в i -м узле.

Определение 1. Конкурентным равновесием рынка с фиксированным множеством \bar{L} расширяемых линий называется такая совокупность векторов \vec{p} , \vec{v} и \vec{q} , для которой выполняются следующие условия $\forall i \in N$:

$$\begin{cases} v_i = S(p_i), \\ \Delta S_i(p_i) = \sum_{j|(i,j) \in L} q_{ij}, \end{cases}$$

$\forall (i, j) \in L$:

$$\begin{cases} q_{ij} = -Q_{ij}^0, \text{ если } p_j - p_i < -e_{ij}^t, (i, j) \in L \setminus \bar{L}, \\ p_j - p_i = -e_{ij}^t + E_{ij}^{v'}(|q_{ij}| - Q_{ij}^0), \text{ если } q_{ij} < -Q_{ij}^0, (i, j) \in \bar{L}, \\ q_{ij} \in [-Q_{ij}^0, 0], \text{ если } p_j - p_i = -e_{ij}^t, \\ q_{ij} = 0, \text{ если } p_j - p_i \in (-e_{ij}^t, e_{ij}^t), \\ q_{ij} \in [0, Q_{ij}^0], \text{ если } p_j - p_i = e_{ij}^t, \\ p_j - p_i = e_{ij}^t + E_{ij}^{v'}(|q_{ij}| - Q_{ij}^0), \text{ если } q_{ij} > Q_{ij}^0, (i, j) \in \bar{L}, \\ q_{ij} = Q_{ij}^0, \text{ если } p_j - p_i > e_{ij}^t, (i, j) \in L \setminus \bar{L}. \end{cases}$$

В [8] сформулирован следующий результат, обобщающий теорему благосостояния [11] для сетевого рынка [8, с. 412, Теорема 1]: задача (2) является задачей выпуклого программирования, а ее решение соответствует конкурентному равновесию рынка.

3. Метод переноса баланса для решения вспомогательной задачи

В предыдущей работе [9] представлен эффективный метод решения задачи (2) для рынка с сетью древовидного типа.

Этап 1. Упорядочение вершин по уровням.

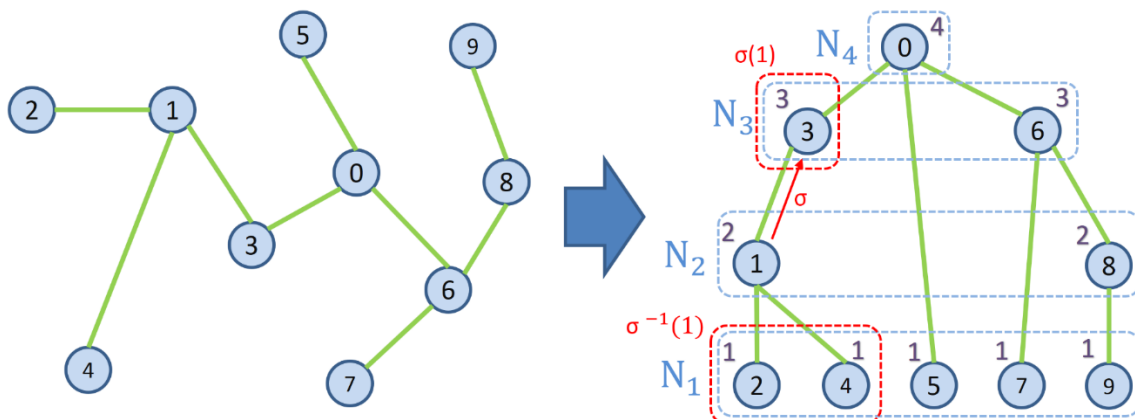


Рисунок 1. Пример упорядочения вершин по уровням.

Представим транспортную структуру рынка в виде корневого дерева минимальной высоты. Не ограничивая общности, считаем, что $0 \in N$ - корневая вершина дерева. Обозначим $Z(i)$ - множество смежных вершин для вершины $i \forall i \in N$. Пусть N_1 - множество финальных вершин, N_2 - множество предфинальных вершин, $N_k = \{i \in N \setminus \cup_{j=1}^{k-1} N_j \mid |Z(i) \setminus \cup_{j=1}^{k-1} N_j| = 1\}$ - множество вершин k -го уровня, $k = 1, 2, \dots, h$, $N_h = \{0\}$. $\forall i \in N$ обозначим через $\sigma(i)$ предшествующую вершину для вершины i . Введем следующие обозначения: $\bar{B}_j(p_j)$ - баланс спроса и предложения в вершине j с учетом перетока из нижележащих вершин; $B_{ij}(p_j)$ - равновесный переток товара из вершины i в предшествующую ей вершину $j = \sigma(i)$ с учетом перетока из нижележащих вершин.

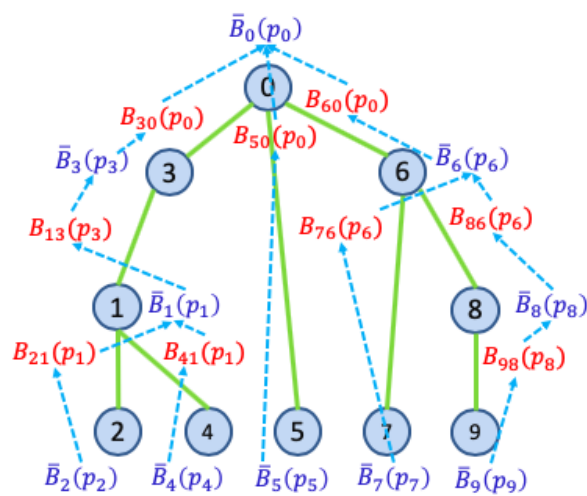


Рисунок 2. Перенос баланса в корневую вершину.

Этап 2. Последовательно двигаясь от финальных вершин к корневой, определяем функции $\bar{B}_j(p_j)$ и $B_{ij}(p_j)$. Шаг завершается построением функции $\bar{B}_0(p_0)$.

Шаг 2.1. Проходим финальные вершины. $\forall i \in N_1 \bar{B}_i(p_i) = B_i(p_i)$.

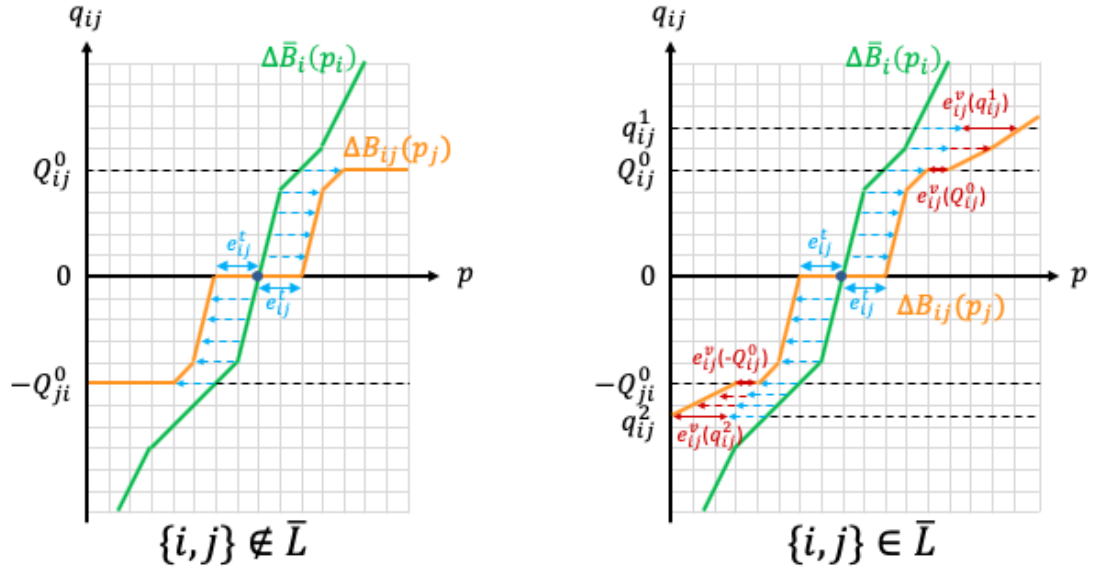


Рисунок 3. Построение функции $B_{ij}(p_j)$.

$e_{ij}^v(q_{ij}) = E_{ij}^{v'} (|q_{ij}| - Q_{ij}^0)$ - функция предельных затрат на увеличение пропускной способности линии (i, j) в зависимости от потока из узла i в узел j .

Шаг 2.1, $l=2, \dots, h$ Для каждой линии $(i, j) \in L$ такой, что $j \in N_l$, $i \in \sigma^{-1}(j)$, строим функцию $B_{ij}(p_j)$. Для каждой вершины $j \in N_l$ строим функцию $\bar{B}_j(p_j)$:

$$\bar{B}_j(p_j) = B_j(p_j) + \sum_{i \in \sigma^{-1}(j)} B_{ij}(p_j), \quad (3)$$

Построение функции $B_{ij}(p_j)$:

Пусть \tilde{p}_i - решение уравнения $\bar{B}_i(p_i) = 0$. Если $(i, j) \in \bar{L}$, то $B_{ij}(p_j) =$

$$= \begin{cases} 0, \tilde{p}_i - e_{ij}^t < p_j < \tilde{p}_i + e_{ij}^t, \\ \bar{B}_i(p_j - e_{ij}^t), \tilde{p}_i + e_{ij}^t \leq p_j < (\bar{B}_i)^{-1}(Q_{ij}^0) + e_{ij}^t, \\ Q_{ij}^0, (\bar{B}_i)^{-1}(Q_{ij}^0) + e_{ij}^t \leq p_j \leq (\bar{B}_i)^{-1}(Q_{ij}^0) + e_{ij}^t + e_{ij}^v(Q_{ij}^0), \\ q_{ij}|q_{ij} = \bar{B}_i(p_j - e_{ij}^t - e_{ij}^v(q_{ij})), p_j > (\bar{B}_i)^{-1}(Q_{ij}^0) + e_{ij}^t + e_{ij}^v(Q_{ij}^0). \end{cases}$$

Если $(i, j) \notin \bar{L}$, то

$$B_{ij}(p_j) = \begin{cases} 0, \tilde{p}_i - e_{ij}^t < p_j < \tilde{p}_i + e_{ij}^t, \\ \bar{B}_i(p_j - e_{ij}^t), \tilde{p}_i + e_{ij}^t \leq p_j < (\bar{B}_i)^{-1}(Q_{ij}^0) + e_{ij}^t, \\ Q_{ij}^0, p_j \geq (\bar{B}_i)^{-1}(Q_{ij}^0) + e_{ij}^t. \end{cases}$$

Для случая $p_j \leq \tilde{p}_i - e_{ij}^t$ функция $B_{ij}(p_j) < 0$ определяется симметрично.

Этап 3. Определение равновесных цен и оптимальной стратегии.

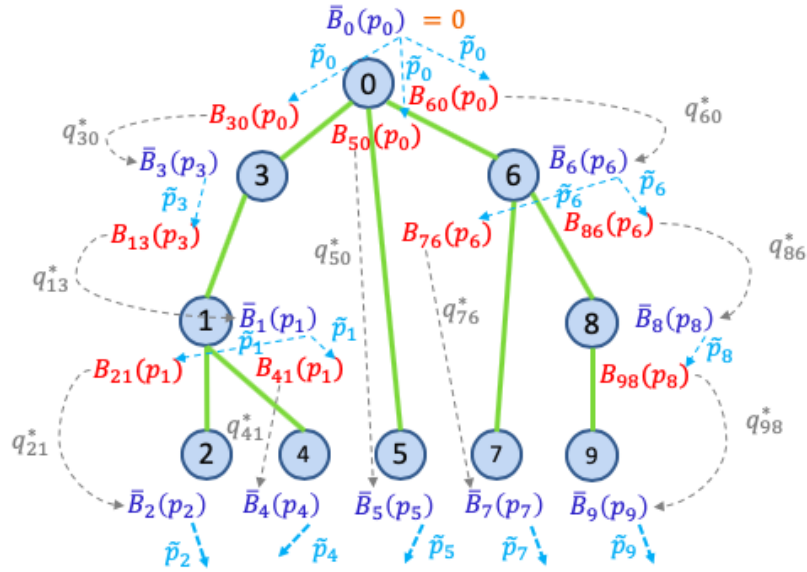


Рисунок 4. Определение равновесных цен и оптимальной стратегии.

Шаг 3.1. Находим \tilde{p}_0 из уравнения $\bar{B}_0(\tilde{p}_0) = 0$ и $v_0^* = B_0(\tilde{p}_0)$.

Шаг 3.1, l=2, ..., h. Для каждой линии (i, j) такой, что $j \in N_{(h-l+2)}, i \in N_{h-l+1} \cap \sigma^{-1}(j)$, находим:

$$q_{ij}^* = B_{ij}(\tilde{p}_j), \tilde{p}_i = (\bar{B}_i)^{-1}(q_{ij}^*), v_i^* = B_i(\tilde{p}_i). \quad (4)$$

Описанный алгоритм находит решение вспомогательной задачи (2). Для случая кусочно-линейных функций B_i и e_{ij}^v доказано, что его сложность равна $O(|N|^2)$ ([10, с. 186, теорема 4]).

4. Алгоритм нахождения приближенного решения

Указанный выше алгоритм удалось модифицировать с тем, чтобы найти приближенное решение исходной задачи (1). Для этого исходная задача приводится к задаче без фиксированных затрат E_{ij}^f следующим образом. Фиксированные затраты обнуляются, а предельные затраты увеличиваются и уравниваются в интервале от начальной пропускной способности Q_{ij}^0 до некоторого значения b_{ij} , которое выбирается так, чтобы это увеличение полностью покрыло фиксированные затраты E_{ij}^f . Вводятся модифицированная функция транспортных затрат $E_{ij}^m(q_{ij})$ и модифицированные функции перетока $B_{ij}^m(p_j)$ и баланса $\bar{B}_j^m(p_j)$ соответственно, они используются в формуле (3); $E_{ij}^m(q_{ij}) = E_{ij}(q_{ij})$ вне интервалов (a_{ij}, b_{ij}) , (b_{ji}, a_{ji}) , которые называются связанными. При движении вверх по дереву связанные интервалы переходят в вышележащие вершины. Пусть $Int(i) = ((c_1^i, d_1^i), (c_2^i, d_2^i), \dots, (c_{n(i)}^i, d_{n(i)}^i))$ - множество связанных интервалов вершины i .

В работе [9, с. 15, Теорема 4] доказано, что стратегия (\vec{v}^m, \vec{q}^m) , определенная модифицированным алгоритмом, является решением задачи оптимизации благосостояния с возмущенными функциями стоимости передачи $E_{ij}^m(q_{ij})$. При этом, если $0 \notin \cup_{k=1, \dots, n(0)}(c_k^0, d_k^0)$, тогда (\vec{v}^m, \vec{q}^m) является решением общей задачи (1).

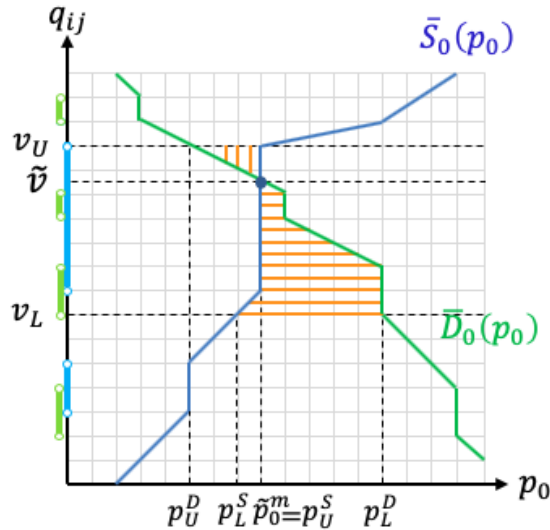


Рисунок 6. Оценки потерь общественного благосостояния.

Теперь рассмотрим случай, когда в корневом узле равновесие $S - D$ баланса $\bar{B}_0(\tilde{p}_0^m) = 0$ лежит в одном из связанных интервалах. В начале шага 3m мы определяем равновесные потоки q_{i0} для $i \in \sigma^{-1}(0)$. Затем определяем множество ветвей-потребителей $\sigma_{D(0)}^{-1} = \{i \in \sigma^{-1}(0): q_{i0}^m < 0\}$ и множество ветвей-производителей $\sigma_{S(0)}^{-1} = \{i \in \sigma^{-1}(0): q_{i0}^m > 0\}$ относительно корневого узла. Мы определяем совокупный спрос и предложение в этом узле следующим образом: $\bar{S}_0(p) = S_0(p) + \sum_{i \in \sigma_{S(0)}^{-1}} B_{i0}(p)$, $\bar{D}_0(p) = D_0(p) - \sum_{i \in \sigma_{D(0)}^{-1}} B_{i0}(p)$. Связанные интервалы для обеих функций, равновесный объем \tilde{v} и равновесная цена для корневого узла рассчитываются аналогично данному модифицированному алгоритму (см. Рис. 6, связанные интервалы соответствуют вертикальным отрезкам).

Случай, где \tilde{v} не принадлежит ни одному связанному интервалу, рассмотрен в упомянутой теореме [9, с. 15, Теорема 4]. В противном случае предлагается следующий метод определения приближенных решений. Обозначим через $\{(c_{0S}^k, d_{0S}^k), k = 1, \dots, n(\bar{S}_0)\}$ набор связанных интервалов для агрегированного предложения, $\{(c_{0D}^k, d_{0D}^k), k = 1, \dots, n(\bar{D}_0)\}$ – аналогичный набор для агрегированного спроса.

Пусть $v_L = \max\{v \in [0, \tilde{v}) | v \notin \cup_k (c_{0\bar{S}}^k, d_{0\bar{S}}^k) \vee \cup_k (c_{0\bar{D}}^k, d_{0\bar{D}}^k)\}$,
 $v_u = \min\{v > \tilde{v} | v \notin \cup_k (c_{0\bar{S}}^k, d_{0\bar{S}}^k) \vee \cup_k (c_{0\bar{D}}^k, d_{0\bar{D}}^k)\}$ – самые близкие к \tilde{v}
верхние и нижние значения, не принадлежащие ни одному из связанных
интервалов. Для первого приближенного решения определим цены $p_L^S = \bar{S}_0^{-1}(v_L)$ и $p_L^D = \bar{D}_0^{-1}(v_L)$ (см Рис. 7). Затем определяем объемы
производства v_i^L и потоки q_{i0}^L в каждом производящем узле $i \in \sigma_{\bar{S}(0)}^{-1}$,
используя отношения (4), но берем p_L^S вместо \tilde{p}_0 . Далее продолжаем
определять $q_{i\sigma(i)}^L$ и v_i^L согласно (4) во всех следующих узлах этих ветвей.
Нет необходимости изменять процедуру, поскольку v_L не принадлежит ни
одному связанному интервалу, и, следовательно, для каждого i , $q_{i\sigma(i)}^L$
также не принадлежит ни одному из таких интервал для $\bar{B}_{i\sigma(i)}^m$. Затем,
исходя из цены p_L^D , метод определяет потоки q_{i0}^L и объемы производства
 v_i^L в каждом потребляющем узле $i \in \sigma_{\bar{D}(0)}^{-1}$ и последовательно определяет
 $q_{i\sigma(i)}^L$ и v_i^L для всех последующих узлов i в ветвях-потребителях.

Для второго приближенного решения задачи мы используем объем
 v_U и соответствующие цены p_U^S и p_U^D при определении объемов v_i^U , $q_{i\sigma(i)}^U$
для производящих и потребляющих отраслей.

В работе [9, с. 19, Теорема 5] доказано, что для приведенных
приближенных решений потери благосостояния соответствуют
следующим оценкам:

$$W^* - W(\vec{v}^L, \vec{q}^L) \leq \int_{v_L}^{\tilde{v}} (\bar{D}_0^{-1}(v) - \bar{S}_0^{-1}(v)) dv,$$

$$W^* - W(\vec{v}^U, \vec{q}^U) \leq \int_{\tilde{v}}^{v_U} (\bar{S}_0^{-1}(v) - \bar{D}_0^{-1}(v)) dv,$$

то есть площадям заштрихованных областей на рисунке 6.

5. Динамическая модель

Рассмотрим модель многоузлового рынка с экзогенно заданными
функциями спроса $D_i(p_i, t)$ и затрат $c_i(v, t)$ в период t , которые
характеризуют соответственно потребителей и производителей на рынке i
[13]. Функция спроса монотонно убывает по цене p_i и связана с функцией
полезности потребления в период t : $U_i(q, t) = \int_0^q D_i(v, t) dv$, где q -
количество потребленного товара. Функция $c_i(v, t)$ монотонно возрастает
и выпукла. Каждая транспортная линия $(i, j) \in L$ характеризуется
начальной пропускной способностью $Q_{ij}^0 \geq 0$, затратами e_{ij}^{tr} за перевод
единицы ресурса из i в j , затратами на увеличение пропускной
способности в период t , включающей фиксированные затраты e_{ij}^f и
переменные затраты $e_{ij}^{vt}(\Delta Q_{ij}(t))$, а также дополнительные

фиксированные расходы E_{ij}^{f0} для первоначального строительства линии, если $Q_{ij}^0 = 0$. Функция $e_{ij}^{vt}(\Delta Q_{ij}(t))$ - монотонно возрастающая и выпуклая. При заданных потоках $\vec{q} = (q_{ij}(t), (i, j) \in L, t = 1, \dots, T)$ и объемах производства $v = (\vec{v}_i(t), (i, j) \in L, t = 1, \dots, T)$ суммарное общественное благосостояние за плановый промежуток определяется суммарной приведенной полезностью потребления по всем узлам за вычетом затрат на производство, расширение линий связи и транспортировку товара:

$$W(\vec{Q}, \vec{q}, \vec{v}) = \sum_{i \in N} \sum_{t=0}^T d(t) [U_i(t, v_i(t) + \sum_{l \in N(i)} q_{li}(t)) - c_i(v_i(t), t)] - \sum_{(i,j) \in L, i < j} E_{ij}(Q_{ij}, q_{ij}), \quad (5)$$

где $d(t)$ - коэффициент приведения для периода t ; обычно $d(t) = d^t$ для $t < T$, $d(T) = d^T / (1 - d)$, где d - коэффициент дисконтирования; $\vec{Q} = (\vec{Q}_{ij}, (i, j) \in L)$, $Q_{ij} = (Q_{ij}(0), Q_{ij}(1), \dots, Q_{ij}(T))$ - планируемое последовательное расширение линии $(i, j) \in L$, $Q_{ij}(0) \leq Q_{ij}(1) \leq \dots \leq Q_{ij}(T)$; $q_{ij} = (q_{ij}(t), t = 1, \dots, T)$ - это поток между узлами $(i, j) \in L$, зависящий от времени, $|q_{ij}(t)| \leq Q_{ij}(t - 1)$.

Функция $E_{ij}(\vec{Q}_{ij}, \vec{q}_{ij})$ показывает приведенную стоимость общих затрат на передачу:

$$E_{ij}(\vec{Q}_{ij}, \vec{q}_{ij}) = \sum_t |q_{ij}(t)| e_{ij}^{tr} d^t + \bar{E}_{ij}(\vec{Q}_{ij}),$$

где $\bar{E}_{ij}(\vec{Q}_{ij}) = \sum_{t=0}^{T-1} [ind_{ij}(\vec{Q}, t) (e_{ij}^f + e_{ij}^{vt} (\Delta Q_{ij}(t)) + ind_{ij}^0(\vec{Q}, t) E_{ij}^{f0})] d^t$.

Здесь индикатор расширения линии в период t

$$ind_{ij}(\vec{Q}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q_{ij}(t) > Q_{ij}(t - 1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Индикатор строительства линии в период t

$$ind_{ij}^0(\vec{Q}, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q_{ij}(t - 1) = 0 < Q_{ij}(t), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, определяется вектор индикаторов $\vec{J}(\vec{Q})$ расширения линий для данного вектора \vec{Q} . Рассмотрим вспомогательную задачу при фиксированном $\vec{J} = \{ind_{ij}(t), (i, j) \in L, t = 0, \dots, T - 1\}$:

$$\bar{W}(\vec{J}) = \max_{\vec{Q}: \vec{J}(\vec{Q}) = \vec{J}} W(\vec{Q}), \quad (6)$$

где

$$W(\vec{Q}) = \max_{\vec{q}, \vec{v}: |q_{ij}(t)| \leq Q_{ij}(t-1), (i,j) \in L, t=0, \dots, T} W(\vec{Q}, \vec{q}, \vec{v}).$$

Основная задача сводится к нахождению

$$\vec{J}^* \in \text{Argmax}_{\vec{J}} \bar{W}(\vec{J}).$$

Задача (6) является частным случаем известной задачи оптимального управления с дискретным временем с линейной динамикой (см. [15]):

$$I(u) = \sum_{t=0}^{T-1} F_0^t(x_t, u_t) + \Phi(x_T) \rightarrow \max_u$$

в условиях

$$\begin{aligned} x_t + 1 &= A_t x_t + B_t u_t, t = 0, 1, \dots, T-1, x_0 = a; \\ x_t &\in E^N, u = (u_0, u_1, \dots, u_{T-1}), \\ u_t &\in V_t \subset E^r, t = 0, 1, \dots, T-1; \end{aligned}$$

где A_t, B_t , - матрицы соответствующих размеров, I - интегрально-терминальный критерий, Φ - его терминальная часть, x_t - фазовый вектор и u_t - вектор управления, V_t - это набор допустимых векторов управления в период t .

В нашем случае $x_t = \vec{Q}(t)$, $u_t = \Delta Q(t)$, поэтому $N = r = |L|$;

$$V_t = \{\Delta \vec{Q}(t) \geq 0 | \forall (i, j) \Delta Q_{ij}(t) = 0, \text{ если } ind_{ij}(t) = 0, \Delta Q_{ij}(t) \leq \Delta Q_{max}\},$$

$$\vec{Q}(t+1) = \vec{Q}(t) + \Delta \vec{Q}(t),$$

$$F_t^0(x_t, u_t) = d(t)(W_t(\vec{Q}(t)) - E_t(\Delta \vec{Q}(t))),$$

$$\Phi(x_T) = d(T)W_T(\vec{Q}_T).$$

Из теорем 4-6 в [15] вытекает следующий результат:

Теорема 1. $W(\Delta \vec{Q})$ - выпуклая функция, компоненты ее градиента следующие:

$$W'_{\Delta Q_{ij}(t)}(\vec{Q}(t)) = \psi_t^{ij} - d(t)(e_{ij}^{vt'}(\Delta Q_{ij}(t)) - e_{ij}^{tr})$$

для любого (i, j) такого, что $ind_{ij}(t) = 1, t = 0, \dots, T-1$, где

$$\psi_t^{ij} = \sum_{\tau=t+1}^T d(\tau)W'_{\tau Q_{ij}}(\vec{Q}) = \sum_{\tau=t+1}^T d(\tau) (|p_i(\vec{Q}(\tau)) - p_j(\vec{Q}(\tau))| - e_{ij}^{tr}),$$

$p_i(\vec{Q}(t)), i \in N$, - конкурентные равновесные цены при заданных пропускных способностях.

Необходимые и достаточные условия оптимальности:

для $t = 0, \dots, T-1$ и каждой пары (i, j) такой, что $ind_{ij}(t) = 1$,

$$\begin{aligned} \Delta Q_{ij}(t) > 0 &\Rightarrow d(t)(e_{ij}^{vt'}(\Delta Q_{ij}(t)) - e_{ij}^{tr}) \\ &= \sum_{\tau=t+1}^T d(\tau) (|p_i(\vec{Q}(\tau)) - p_j(\vec{Q}(\tau))| - e_{ij}^{tr}), \\ \Delta Q_{ij}(t) = 0 &\Rightarrow d(t)(e_{ij}^{vt'}(0) - e_{ij}^{tr}) \\ &> \sum_{\tau=t+1}^T d(\tau) (|p_i(\vec{Q}(\tau)) - p_j(\vec{Q}(\tau))| - e_{ij}^{tr}) \end{aligned}$$

Следствие 1. Пусть функции переменных затрат на расширение $e_{ij}^v(\Delta Q)$, $(i, j) \in L$ не зависят от времени. Тогда для решения основной задачи оптимизации благосостояния существует оптимальный вектор индикаторов расширения линий, который удовлетворяет условию: если $ind_{ij}(t) > 0, d(t) \equiv 1$, тогда $ind_{ij}(t') > 0$ для любого $t' \in (0, 1, \dots, t)$. Более того, если дополнительно $e_{ij}^v = e \cdot Q_{ij}$, тогда для любого i, j $ind_{ij}(0) = 1, ind_{ij}(t) = 0$ для любого $t > 1$, и задача сводится к статической задаче (1).

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть существует $t = (0, \dots, T)$ для которого $ind_{ij}(t) > 0$ и $ind_{ij}(t') = 0$ для любого $t' \in (0, 1, \dots, t)$, т.е. не производится расширение в момент времени t' . Осуществим вместо расширения в период t аналогичное расширение в период t' . Рассмотрим изменение всех компонент в функции благосостояния (5). Отметим, что приведенная стоимость общих транспортных затрат составляет

$$E_{ij}(\vec{Q}_{ij}, \vec{q}_{ij}) = \sum_t |q_{ij}(t)| e_{ij}^{tr} d^t + \bar{E}_{ij}(\vec{Q}_{ij}),$$

где стоимость последовательного расширения линии (i, j) :

$$\bar{E}_{ij}(\vec{Q}_{ij}) = \sum_{t=0}^{T-1} ind_{ij}(\vec{Q}, t) \left(e_{ij}^f + e_{ij}^{vt} (\Delta Q_{ij}(t)) + ind_{ij}^0(\vec{Q}, t) E_{ij}^{f0} \right)$$

Поскольку $d(t) \equiv 1$, то при переносе расширения с момента t на t' получается, что приведенная стоимость общих затрат на передачу не изменится. При тех же затратах пропускная способность в период от t' до t выросла, следовательно множество допустимых значений в задаче оптимизации (6) стало шире, и можно выбирать значения потоков в более широком диапазоне.

Таким образом, решение оптимизационной задачи не хуже, чем в случае расширения в период t , так как можно всегда использовать то же самое решение.

Проведем доказательство второй части следствия. Для доказательства второй части следствия рассмотрим оптимальную стратегию и построим аналогичную стратегию, которая отличается только тем, что расширение всех линий происходят в начальный период $t = 0$; величина по каждой линии равна сумме величин расширения по всем моментам времени и равна ΔQ_{ij} . Так как функция затрат линейна $e_{ij}^v = e \cdot Q_{ij}$, то при одномоментном расширении переменные затраты неизменны, а фиксированные могут только сократиться. В каждый момент множество возможных управлений (6) остается прежним или становится шире. Следовательно, оптимальное значение не хуже.

6. Заключение

Изложенные результаты показывают, что метод переноса балансов позволяет эффективно решать задачи оптимизации сетей энергетических рынков с сотнями и даже тысячами узлов. Его достоинствами являются наглядность и понятная экономическая интерпретация. Таким образом, можно учесть основных потребителей и поставщиков энергии на оптовых рынках России и в других крупных энергосистемах. Поскольку модель упрощенно описывает реальные энергетические системы, то она предназначена в основном для макроэкономических расчетов и грубой оценки желательных параметров энергетических сетей. Детализация планов развития должна проводиться для каждой отрасли и конкретных сетей с учетом их специфики.

Важными задачами для дальнейшего развития и применения математических моделей в этой области являются: разработка моделей для описания эндогенного изменения функций спроса и предложения на энергоресурсы; учет взаимодополнительности и взаимозаменяемости основных энергоресурсов; анализ возможностей организации эффективного государственно-частного партнерства для развития сетей.

Литература

1. *Аткинсон Э.Б., Стиглиц Дж. Э.*, Лекции по экономической теории государственного сектора // М.: Аспект-Пресс, 1995.
2. *Hogan W. (1998):* Competitive electricity market design: a wholesale primer // Harvard University, WP.
3. *Davidson M.R., Dogadushkina Y.V., Kreines E.M., Novikova N.M., Seleznev A.V., Udaltsov Y.A., Shiryayeva L.V.* Mathematical Model of Power System Management in Conditions of a Competitive Wholesale Electric Power (Capacity) Market in Russia // Journal of Computer and Systems Sciences International. - 2009. - Vol. 48. - P. 243-253.
4. *Roger Z.Rios-Mercado, ConradoBorraz-Sanchez.* Optimization problems in natural gas transportation systems: A state-of-the-art review // Applied Energy. - 2015. - Vol 147(1). - P. 536-555.
5. *Enrico Edoli, Stefano Fiorenzani, Tiziano Vargiolu.* Co-optimization of energy market and ancillary services. Paper presented at the IEEE Xplore, International Power Engineering Conference. - 2005.
6. *Daylova E.A., Vasin A.A.* Determination of Transmission Capacity for a Two-node Market // Procedia Computer Science. - 2014. - Vol. 31. P. 151-157.
7. *Vasin A., Dolmatova M.* Optimization of transmission capacities for multinodal markets. Procedia Computer Science. 91; 2016. p. 238-244.

8. *Vasin A.A., Grigoryeva O.M., Tsyganov N.I.*, Optimization of an energy market transportation system // *Doklady Mathematics*. - 2017. - Vol. 96, No.1. - P. 1-4.
9. *Vasin A.A., Grigoryeva O.M., Tsyganov N.I.* Optimization of energy market's transport infrastructure // *Journal of Global Optimization*. – 2019
10. *Vasin A.A., Grigoryeva O.M., Tsyganov N.I.* Energy markets: optimization of transportation system. Paper presented at the VIII Moscow International Conference on Operation Research (ORM 2018), 1. 2018. pp. 183-189.
11. *Arrow, K.J., Debreu, G.* Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy // *Econometrica*. - 1954. - Vol. 22. - P. 265-290.
12. *Guisewite G.M., Pardalos P.M.* Minimum concave-cost network flow problems: Applications, complexity, and algorithms // *Annals of Operations Research*. - 1990. - Vol. 25 (1). - P. 75-99.
13. *Васин А.А., Лесик И.А., Григорьева О.М.* Задача оптимального развития транспортной системы энергетического рынка. IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM 2018), 2. 2018. pp. 247-252.
14. *Stoft S.* Power System Economics: Designing Markets for Electricity. New York. Wiley. - 2002.
15. *Васильев Ф.П.*, Методы решения экстремальных задач, М:Наука, 1981.

УДК 517.927.25

Капустин Н.Ю. О базисности системы корневых функций задачи с кратным собственным значением. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В работе рассматривается задача, описывающая биортогонально сопряженную систему к классической системе корневых функций для задачи о нагруженной струне со свободным другим концом при наличии кратного собственного значения. Изучается вопрос о базисности выделенных полных и минимальных подсистем из системы корневых функций при наличии одной или двух присоединенных функций.

Библиогр.: 3 назв

Ключевые слова: спектральная задача, биортогональная система, корневые функции, кратное собственное значение, базис Рисса.

УДК 517.927.25

Крицков Л.В. Сходимость спектральных разложений для сингулярного дифференциального оператора с общими краевыми условиями. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В работе изучена общая краевая задача для операции $lu = -u'' + q(x)u$, $0 < x < 1$, в случае, когда комплекснозначный коэффициент $q(x)$ не суммируем на $(0,1)$, но сходится интеграл $\int_0^1 x(1-x)|q(x)| dx$. С помощью полученной в работе асимптотики решений уравнения $lu = \mu^2 u$ построена асимптотика спектра задачи, проведена классификация краевых условий, доказаны теоремы о полноте и безусловной базисности системы корневых функций в $L_2(0,1)$.

Библиогр.: 12 назв.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор, асимптотика спектра, полнота, безусловная базисность.

УДК 517.977.5

Григоренко Н.Л., Григорьева Э.В., Рой П.К., Хайлов Е.Н. Задачи оптимального управления для математической модели лечения псориаза. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Текст аннотации. На заданном отрезке времени рассматривается математическая модель лечения псориаза, состоящая из трех нелинейных дифференциальных уравнений. Они описывают взаимосвязи между концентрациями Т-лимфоцитов, кератиноцитов и дендритных клеток. Также, в эту модель введены две ограниченные управляющие функции времени, которые отражают подавление взаимодействия между Т-лимфоцитами и кератиноцитами, а также между Т-лимфоцитами и дендритными клетками

с помощью лекарственных препаратов. Для такой модели ставится задача минимизации взвешенной суммы суммарной концентрации кератиноцитов и общей стоимости применяемого лечения, выражающейся в виде интеграла от суммы квадратов введенных управлений. Для нахождения свойств оптимальных управлений такой задачи применяется принцип максимума Понтрягина. Определение конкретных видов этих управлений для различных значений параметров рассматриваемой задачи осуществляется в программной среде VOCOP-2.0.5. Обсуждаются результаты полученных численных расчетов.

Библиогр.: 27 назв., Ил.: 10.

Ключевые слова: псориаз, нелинейная управляемая система, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, индикаторная функция.

УДК 519.63.

Жалеев Т.Р., Кубышкин В.А., Мухин С.И., Рубина А.Ф., Хруленко А.Б. Математическое моделирование кровотока в системе сосудов печени. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Работа посвящена математическому моделированию кровотока в системе сосудов, связанных с воротной веной печени. Построена анатомически адекватная модель сети венозных сосудов непарных органов брюшной области и бассейна воротной вены, интегрированная в общую модель большого круга кровообращения. Проведен цикл вычислительных экспериментов по моделированию перераспределения потоков венозной и артериальной крови в условиях портальной гипертензии при фиброзе печени. Исследованы гидродинамические особенности кровотока с учетом анатомических и искусственных шунтов и их влияние на уменьшение давления в портальной вене. Результаты расчетов соответствуют известным клиническим данным.

Библиогр.: 9 назв., Ил.: 16., Табл. 2

Ключевые слова: математическое моделирование, гемодинамика, портальная гипертензия.

УДК 519.6

Матвеев С.А., Смирнов А.П., Тыртышников Е.Е. Влияние источника мономеров на период колебаний в модели необратимой коагуляции. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В данной работе рассматриваются кинетические уравнения необратимой коагуляции с источником мономеров и стоком частиц, превышающих максимальный допустимый размер. Для класса Броуновских ядер из-

вестно существование решений периодических по времени. В настоящей работе предлагается анализ влияния мощности источника мономеров на период и амплитуду колебаний концентраций частиц по времени. Из приведенных в работе результатов численных экспериментов для увеличения мощности источника следует увеличение амплитуды колебаний при одновременном уменьшении их периода, не приводящее к качественному изменению структуры решений - изменение мощности источника приводит к перемасштабированию модельного времени и модельных концентраций частиц на единицу объема среды перемасштабирования.

Библиогр.: 9 назв., Ил.: 3.

Ключевые слова: кинетика процессов агрегации, колебательные процессы, малоранговые аппроксимации.

УДК 51-73

Жилкин А.С., Сычугов Д.Ю. Математическое моделирование работы охлаждаемой первой стенки реактора-ТОКАМАКА. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

В работе строится математическая модель системы охлаждения первой стенки реактора на основе установки токамак и проводится численный анализ принятого на сегодняшний день варианта конструкции первой стенки проектируемого реактора ТИН (Термоядерный Источник Нейтронов).

Библиогр.: 2 назв., Ил.: 2.

Ключевые слова: Токамак-реактор, тепловые потоки, модель охлаждаемой первой стенки.

УДК 917.977.1

Ильин А.В., Фомичев В.В., Фурсов А.С. Задачи управления системами с неопределенностью. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Рассматриваются различные постановки задач управления для линейных систем в условиях существенной неопределенности. В частности, рассматриваются три задачи. Задача наблюдения для систем при наличии внешних возмущений. Неизвестные возмущающие воздействия считаются ограниченными, причем известны их оценки. Задача решается при различных предположениях как о порядке возмущений и измеряемых сигналах, так и о свойствах системы.

Далее рассматривается задача оценивания неизвестного входного воздействия (т.е. задача обращения). Для решения задачи используется метод управляемой модели, управление в которой направлено на стабилизацию разности между измеряемыми выходами исходной системы и модели. Использование робастных алгоритмов стабилизации позволяет получать оценки неизвестных сигналов с заданной точностью.

Третьей задачей является проблема стабилизации переключаемых систем. Рассматривается система, динамика которой в каждый момент времени описывается одной из систем из заданного конечного набора. Переключения между режимами функционирования могут зависеть как от времени, так и от фазового вектора системы. Решаются последовательно две задачи: нахождение стабилизаторов (желательно единого) для каждого объекта из семейства, а далее исследуются условия, когда переключение между устойчивыми режимами не нарушает устойчивость переключаемой системы. Получены различные методы стабилизации переключаемых систем, охватывающие различные типы переключений.

Библиогр.: 30 назв.

Ключевые слова: автоматическое управление, управление при неопределенности, наблюдение, обратные задачи, системы с запаздыванием, переключаемые системы.

УДК 517.9, 519.6

Денисов А.М., Ефимов А.А. Обратная задача для интегродифференциального уравнения и метод ее решения. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Рассматривается обратная задача определения неизвестного коэффициента интегро-дифференциального уравнения. Доказываются теоремы существования и единственности решения обратной задачи. Предлагается и обосновывается численный метод определения неизвестного коэффициента. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие сходимость метода..

Библиогр.: 13 назв. Ил.: 3..

Ключевые слова: Обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, теорема существования решения обратной задачи, теорема единственности решения обратной задачи.

УДК 519.8

Васин А.А., Григорьева О.М. Энергетические рынки: оптимизация сетей передачи. // Прикладная математика и информатика № 61, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2019.

Рассматривается задача максимизации функции благосостояния при расширении сети передачи энергетического рынка. Учитываются производственные и транспортные затраты и полезность потребления. Излагаются ранее разработанные методы вычисления оптимальных (или близких к оптимальным) пропускных способностей, потоков и объемов производства для модели сетевого энергетического рынка. Рассматривается также динамическая задача оптимального расширения системы передачи при условии, что функции спроса и затрат экзогенно заданы для каждого пе-

риода времени в интервале планирования..

Библиогр.: 15 назв. Ил.: 6.

Ключевые слова: энергетический рынок, совершенная конкуренция, транспортная сеть, общественное благосостояние.