

Раздел II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНФОРМАЦИОННЫХ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ.

Попов Н.М.

О некоторых вопросах теории оптимальных алгоритмов и информационной сложности

Введение.

Теория оптимальных (минимаксных) алгоритмов восходит к работам [1—10], опубликованным в конце сороковых годов и пятидесятих—шестидесятих годах XX века. В настоящее время имеются крупные монографии [11—13], посвященные проблематике оптимальных алгоритмов и тесно связанным с ней вопросам информационной сложности задач. Охарактеризуем коротко содержание данной статьи. В §1 описываются формализованные представления задач и численных алгоритмов, а затем даются определения основных понятий теории оптимальных (минимаксных) алгоритмов и информационной сложности. В §2 предлагается обзор известных результатов этой теории. В обзоре, во-первых, прослеживаются общие (с точки зрения данной теории) закономерности, свойственные сразу нескольким типам задач вычислительной математики, таким как оптимизация, интегрирование, приближение функций. А во-вторых, в указанном обзоре отражены исследования широкого спектра оптимизационных задач: от традиционных скалярных — унимодальных, выпуклых, липшицевых, гладких — до сравнительно новых — многокритериальных задач с различными принципами оптимальности решений, задач оптимизации по бинарным отношениям и функциям выбора. Собранные в обзоре материалы образуют общую картину, предвещающую §§3,4, в которых результаты статей [14—18] систематизируются на основе [19]. В §3 приводятся оценки информационной сложности многокритериальных задач приближенного построения множества оптимальных по Парето стратегий. Показано, как существенно информационная сложность таких задач зависит от используемых понятий аппроксимации множества паретовских стратегий — аппроксимации "по функционалу" и аппроксимации "по аргументу". Отметим, что эти результаты, полученные для многокритериальных задач, в виде частных случаев распространяются и на скалярные задачи глобальной оптимизации. В заключительном §4 по информационной сложности сравниваются между собой скалярная задача глобальной оптимизации и задача нахождения корней нелинейных уравнений методами глобального поиска.

§1. Терминология и основные понятия теории оптимальных алгоритмов и информационной сложности.

При определении понятий "оптимальный алгоритм", "сложность алгоритма", "сложность задачи" будем основываться на теории оптимальных (минимаксных) алгоритмов [12, 13]. Близкий подход к формализации указанных понятий, базирующийся на несколько иной терминологии, предлагается в [11].

Опишем сначала формальную схему задачи. Пусть F —функциональный класс, определенный на множестве X , принадлежащем N -мерному пространству R^N , отображение $S: F \rightarrow B$ действует из F в пространство B , и задача (так называемая индивидуальная задача) заключается в точном или приближенном отыскании элемента $S(f) \in B$ для некоторого $f \in F$. Исходная информация о функции f состоит в том, что $f \in F$. В процессе решения задачи поступает дополнительная информация об f . Охарактеризуем точность приближения к $S(f)$ параметром ε , при этом само приближение назовем ε -решением. Далее термином "задача" будем пользоваться и в более широком смысле, а именно, задачей (так называемой массовой задачей или же классом задач) назовем пару $Z = \langle F, S \rangle$. Содержание или тип массовой задачи Z (оптимизация, интегрирование, аппроксимация и т.д.) определяется отображением S .

Введенную схему поясним на примере многокритериальной задачи оптимизации. Пусть X —компактное множество стратегий, $X \subset R^N$, F —класс вектор-функций, заданных на X , и требуется найти или аппроксимировать в каком-либо смысле $P_f(X)$ —множество оптимальных по Парето точек (стратегий) на X по векторному критерию $f \in F$. Определим отображение Парето $\Pi: F \rightarrow 2^X$ равенством:

$$\Pi(f) = P_f(X), \quad f \in F, \quad P_f(X) \in 2^X,$$

где 2^X —множество всех подмножеств множества X . Тогда массовая задача построения множества парето-оптимальных стратегий описывается парой $\langle F, \Pi \rangle$. Данным представлением о задаче обычно руководствуются при выборе или создании численного алгоритма для ее решения. Это обусловлено тем, что в алгоритмах приближенного поиска множества $P_f(X)$ ¹⁾ чаще всего используется не явный вид конкретной вектор-функции f , а некоторые существенные ее свойства, характеризующие принадлежность f к тому или иному классу. Такими свойствами могут быть непрерывность, гладкость, выпуклость, монотонность, ограниченность скорости изменения функции и т.д. Отметим, что представление о многокритериальной задаче в виде пары $\langle F, \Pi \rangle$ вполне адекватно ситуации, когда отсутствует аналитический вид вектор-функции f , имеется алгоритм расчета ее значений на ЭВМ, и можно лишь отнести f к какому-то классу на основании априорно известных или предварительно выявленных свойств f .

Перейдем к описанию формализованной модели численных алгоритмов. Согласно [13] детерминированный алгоритм A решения задачи $Z = \langle F, S \rangle$ представляется совокупностью отображений:

$$A = \langle u(\cdot); \xi^1, \xi^2(\cdot), \dots, \xi^K(\cdot); v(\cdot) \rangle, \quad (1)$$

где $u: F \times X \rightarrow Y$, $\xi^1 \equiv x^1 \in X$,

$$\xi^k: X^{k-1} \times Y^{k-1} \rightarrow X, \quad k = 2, 3, \dots, K, \quad v: X^K \times Y^K \rightarrow B.$$

Здесь F, X, B имеют тот же смысл, что и ранее; K —конечное число шагов (итераций) алгоритма A , которое либо фиксируется заранее, либо определяется

¹⁾ За исключением простых случаев точное нахождение $P_f(X)$ возможно лишь когда X —конечное множество.

в ходе его работы; Y —некоторое пространство; X^k, Y^k — k -ые декартовы степени множества X и пространства Y . Решение задачи с помощью алгоритма A состоит в последовательном вычислении

$$x^1 = \xi^1, \quad y^1 = u(f, x^1), \quad x^2 = \xi^2(x^1, y^1), \quad y^2 = u(f, x^2), \dots, \quad (2.a)$$

$$x^K = \xi^K(x^1, \dots, x^{K-1}, y^1, \dots, y^{K-1}), \quad y^K = u(f, x^K),$$

$$A(f) = v(x^1, \dots, x^K, y^1, \dots, y^K). \quad (2.6)$$

Отображение $u(\cdot)$ описывает информацию, получаемую о решаемой задаче на каждом шаге алгоритма A . Величины $y^k = u(f, x^k)$ —это характеристики функции $f \in F$ в точках $x^k \in X$, $k=1, 2, \dots, K$. Например, для алгоритмов нулевого порядка в роли отображения $u(\cdot)$ выступает процедура вычисления значений функции f —

$$u(f, x^k) = f(x^k), \quad (3)$$

для алгоритмов первого порядка в качестве $u(\cdot)$ фигурирует процедура расчета значений функции f и ее градиента —

$$u(f, x^k) = (f(x^k), f'(x^k)) \quad (4)$$

и т.д. Вычисления величин y^k , $k=1, 2, \dots, K$ называются информационными. Число шагов алгоритма отождествляется с количеством информационных вычислений. Отображения $\xi^1, \xi^2(\cdot), \dots, \xi^K(\cdot)$ задают совокупность детерминированных правил (стратегию) выбора точек x^k для отыскания характеристик y^k , $k=1, 2, \dots, K$. Эти правила, вообще говоря, учитывают информацию о решаемой индивидуальной задаче, накопленную на предыдущих шагах. Вычисления точек x^k , $k=1, 2, \dots, K$ называются алгоритмическими. Отображение $v(\cdot)$ есть итоговая операция (итоговое вычисление) алгоритма A , а результатом его работы является приближенное решение $A(f)$, $f \in F$. Отметим, что на практике отыскание $v(x^1, \dots, x^K, y^1, \dots, y^K)$ не обязательно начинается лишь после выполнения всех информационных вычислений. В терминологии исследования операций [20] работа алгоритма A может интерпретироваться как процесс принятия решений в условиях неопределенности (неполной информации о конкретном $f \in F$).

Модель (1) допускает обобщения и модификации. Так, можно предположить, что получаемая информация об f изменяется по шагам алгоритма; итоговую операцию в некоторых случаях целесообразно детализировать и т.д.

Алгоритмы вида (1) образуют класс последовательных алгоритмов. Его важным подклассом является множество пассивных алгоритмов, предписывающих информационные вычисления в заранее фиксированных точках. В схеме (2) для пассивного алгоритма A

$$\xi^k \equiv x^k \in X, \quad k=1, 2, \dots, K,$$

и его будем представлять в виде:

$$A = (u(\cdot); \{x^1, x^2, \dots, x^K\}; v(\cdot)), \quad (5)$$

где $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ имеют тот же смысл, что и в (1).

Обратим внимание на один терминологический нюанс. В литературе по проблемам оптимизации (см., например, [21 — 23]) часто рассматривают численный метод как бесконечношаговый процесс, формирующий последовательность итераций, сходящуюся к точному решению. При этом конечношаговыми (конечными) называют методы, позволяющие найти точное решение за конечное число шагов (например, симплекс-метод в линейном программировании, метод сопряженных направлений в квадратичном программировании). Здесь, как и в [11—13], конечношаговость алгоритма понимается в другом смысле, а именно, конечношаговым (K -шаговым) будем называть всякий алгоритм A вида (1), у которого число шагов K конечно (вместе с тем K зависит, вообще говоря, от размерности решаемой задачи, от требуемой точности решения и, возможно, от других аспектов). Отметим, что бесконечношаговые методы могут изучаться в рамках модели (1), если рассматривать их K -шаговые "усечения" при произвольных $K < +\infty$.

Сформулируем теперь основные понятия теории оптимальных (минимаксных) алгоритмов и информационной сложности.

Обозначим через $\alpha(A, f)$ точность решения задачи $Z = \langle F, S \rangle$ с помощью алгоритма A для фиксированного $f \in F$. При этом подразумевается, что известен некоторый способ измерения погрешности приближения $A(f)$ к точному решению $S(f)$, $f \in F$. Считаем, что $\alpha(A, f)$ — скаляр. Величину $\sup_{f \in F} \alpha(A, f)$ назовем гарантированной точностью (гарантированной погреш-

ностью) алгоритма A на классе F . Пусть A^K — множество K -шаговых алгоритмов (1), (2) приближенного решения задачи $Z = \langle F, S \rangle$.

Определение 1. Наилучшей гарантированной точностью решения задачи $Z = \langle F, S \rangle$ в множестве алгоритмов A^K называется величина

$$\alpha(A^K) = \inf_{A \in A^K} \sup_{f \in F} \alpha(A, f).$$

Алгоритм $A^* \in A^K$ называется оптимальным по точности в множестве алгоритмов A^K на классе F , если $\sup_{f \in F} \alpha(A^*, f) = \alpha(A^K)$. ■¹⁾

Пусть далее ε — требуемая точность решения задачи $Z = \langle F, S \rangle$. Будем говорить, что алгоритм A находит ε -решение массовой задачи $Z = \langle F, S \rangle$, если он отыскивает $S(f)$ с точностью $\varepsilon > 0$ для всех $f \in F$.

Отметим здесь следующее обстоятельство. В определении 1 точности $\alpha(A, f)$, $\alpha(A^K)$ предполагались скалярными величинами. Однако, в ряде случаев погрешность приближенного решения удобно характеризовать не

¹⁾ Здесь и далее символом ■ обозначаются окончания формулировок определений и утверждений.

одним, а несколькими параметрами. Именно такие ситуации рассматриваются в §§3,4 настоящей работы. Поэтому, в формулируемых ниже определениях данного пункта требуемая точность ε может быть не только скалярной, но и векторной величиной. Условимся, что если ε — вектор, то неравенство $\varepsilon > 0$ следует понимать покомпонентно.

Введем теперь $A(\varepsilon)$ — класс алгоритмов вида (1), (2), позволяющих за конечное (нефиксированное) число шагов получить ε -решение массовой задачи $z = \langle F, S \rangle$. Считаем, что $A(\varepsilon) \neq \emptyset$, и количество шагов в алгоритмах $A \in A(\varepsilon)$ при решении индивидуальных задач с различными $f \in F$ зависит от f . Обозначим через $K(\varepsilon, A, f)$ число шагов (количество информационных вычислений), за которое алгоритм $A \in A(\varepsilon)$ находит ε -решение для фиксированного $f \in F$. Сложность алгоритмов разделяют на информационную и комбинаторную [12, 13]. Согласно [11—13], информационной сложностью алгоритма $A \in A(\varepsilon)$ на классе F называется величина

$$c_I(A) = \sup_{f \in F} K(\varepsilon, A, f).$$

Алгоритмические и итоговое вычисления алгоритма $A \in A(\varepsilon)$ разбиваются на элементарные операции из заранее фиксированного набора, который может задаваться произвольным образом и нередко выбирается из соображений удобства в зависимости от исследуемой задачи. Комбинаторная сложность алгоритма $A \in A(\varepsilon)$ определяется как максимальное по $f \in F$ число элементарных операций, необходимых для выполнения алгоритмических и итогового вычислений при отыскании ε -решения задачи $z = \langle F, S \rangle$ для $f \in F$ с помощью алгоритма A .

Определение 2. Информационной сложностью задачи $z = \langle F, S \rangle$ в множестве алгоритмов $A(\varepsilon)$ называется величина $c_I(A(\varepsilon)) = \min_{A \in A(\varepsilon)} c_I(A)$.

Алгоритм $A^* \in A(\varepsilon)$ называется оптимальным по информационной сложности в множестве алгоритмов $A(\varepsilon)$ на классе F , если $c_I(A^*) = c_I(A(\varepsilon))$. ■

Итак, информационная сложность задачи z определяется по отношению к фиксированному множеству алгоритмов ее решения с заданной точностью и по существу представляет собой функцию от требуемой точности решения задачи z

Конечно, введенная в определении 2 информационная трактовка сложности задач сама по себе является упрощенной и не вполне адекватной реальной сложности процесса решения задач. Данная трактовка сложности не связана ни с какой моделью вычислительного устройства и не учитывает вычислительные затраты алгоритмов на обработку получаемой (в самих этих алгоритмах) информации о решаемых задачах. Однако, как следует из приведенной в [11—13] аргументации, такой "информационный" подход к анализу трудоемкости решения задач имеет под собой веские основания. Во-первых, информационная сложность того или иного численного метода заведомо оценивает снизу его реальную трудоемкость, которая может быть уточнена с учетом комбинаторной сложности метода. Во-вторых, информационная сложность алгоритмов и задач служит для них важной базовой характеристикой. Наконец, на практике встречается немало прикладных задач,

при решении которых на ЭВМ подавляющая доля машинного времени расходуется на информационные вычисления, а затратами на внутренние операции алгоритмов (алгоритмические и итоговое вычисления) допустимо пренебречь. Трудоемкость решения таких задач вполне естественно оценивать именно их информационной сложностью.

Обсуждаемый здесь подход к анализу сложности задач и трудоемкости численных методов применяется для непрерывных задач оптимизации, интегрирования, аппроксимации и других непрерывных задач на классах нелинейных функций. Такие задачи чаще всего удается решать лишь приближенно; при этом сам процесс решения каждой из них можно интерпретировать (см. [11]) как процедуру выделения (идентификации) индивидуальной задачи из соответствующего класса задач, выполняемую до тех пор, пока ни становится возможным формирование приближенного решения с удовлетворительной точностью. Выделение индивидуальной задачи из класса осуществляется за счет накопления информации, приобретаемой в результате информационных вычислений. По-видимому, можно говорить об определенной общности природы разных непрерывных нелинейных задач, позволяющей изучать их сложность с единых позиций.

Отметим, что принципиально другой подход к исследованию сложности алгоритмов и задач развивается в теории сложности вычислений [24 — 26], различные аспекты данной теории освещаются также в [27, 28]. Этот подход ориентирован на задачи дискретной математики, задачи дискретной и комбинаторной оптимизации, а также непрерывные линейные задачи, такие как, например, решение систем линейных алгебраических уравнений, задачи линейного программирования. Для названных здесь типов задач не возникает проблемы выделения индивидуальных задач из соответствующих классов, поскольку каждую индивидуальную задачу удастся однозначно идентифицировать конечным кодом, содержащим о ней полную информацию. Сказанное объясняет то обстоятельство, что для задач, изучаемых в теории сложности вычислений [24—26], на первый план выходят вопросы эффективного поиска решений по кодируемой полной информации, а понятия информационных вычислений (как вычислений, доставляющих информацию) и информационной сложности утрачивают свое значение. Трудоемкость соответствующих алгоритмов характеризуется так называемой временной сложностью — понятием, родственным к упоминавшейся выше трактовке комбинаторной сложности алгоритмов.

Ниже все внимание в настоящей работе сосредоточивается на задачах, трудоемкость решения которых характеризуется информационной сложностью, а вопросы теории сложности вычислений в дальнейшем не рассматриваются.

Для решения задач с трудоемкими и дорогостоящими информационными вычислениями целесообразно применять алгоритмы, минимизирующие количество таких вычислений. Структура таких алгоритмов может быть весьма непростой, но их высокая комбинаторная сложность часто оказывается оправданной. В то же время известны оптимальные по информационной сложности алгоритмы с настолько большой комбинаторной сложностью, что их реальное использование крайне затруднено. Иллюстрирующие последний тезис примеры можно найти в следующем параграфе.

Предположим, что $A(\varepsilon)$ — класс алгоритмов, находящих ε -решение задачи $z = \langle F, S \rangle$ за конечное число шагов, задан при каждом $\varepsilon > 0$. Введем общий класс алгоритмов $A = \bigcup_{\varepsilon > 0} A(\varepsilon)$.

Определение 3. Семейство алгоритмов $\{A_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, $A_\varepsilon \in A(\varepsilon)$ называется асимптотически оптимальным по информационной сложности при $\varepsilon \rightarrow 0$ в множестве алгоритмов A на классе F , если $\frac{c_I(A_\varepsilon)}{c_I(A(\varepsilon))} \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Семейство алгоритмов $\{A_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, $A_\varepsilon \in A(\varepsilon)$ называется оптимальным по порядку информационной сложности при $\varepsilon \rightarrow 0$ в множестве алгоритмов A на классе F , если $c_I(A_\varepsilon) = O(c_I(A(\varepsilon)))$, т.е. если существуют числа $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ такие, что $k_1 c_I(A(\varepsilon)) \leq c_I(A_\varepsilon) \leq k_2 c_I(A(\varepsilon))$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. ■

Левое из последних неравенств всегда выполнено при $k_1 = 1$. Заметим, что константы k_1 , k_2 могут зависеть от N — размерности задачи $z = \langle F, S \rangle$. (Под размерностью задачи z понимается размерность пространства, содержащего множество X , на котором определен функциональный класс F .)

Дадим также определение бесконечношагового алгоритма, оптимального по порядку информационной сложности. Рассмотрим алгоритм A , подобный (1), (2), с неограниченным числом шагов

$$A = \langle u(\cdot); \xi^1, \xi^2(\cdot), \dots, \xi^K(\cdot), \dots; v(\cdot) \rangle.$$

Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ алгоритм A находит ε -решение задачи $z = \langle F, S \rangle$ за $K(\varepsilon) < +\infty$ шагов. Обозначим через A^ε алгоритм, состоящий из $K(\varepsilon)$ начальных шагов алгоритма A . Очевидно, что $A^\varepsilon \in A(\varepsilon)$.

Определение 4. Алгоритм A с неограниченным числом шагов называется оптимальным по порядку информационной сложности на классе F при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $c_I(A^\varepsilon) = O(c_I(A(\varepsilon)))$. ■

Информационную сложность алгоритмов решения многомерных задач изучают как функцию не только от точности ε , но и от размерности N . (До сих пор размерность N предполагалась фиксированной, и потому, зависимость от нее информационной сложности задач и алгоритмов явно не указывалась.) Пусть конечношаговый алгоритм $A \in A(\varepsilon)$ имеет информационную сложность порядка $\beta(N)$ при $N \rightarrow +\infty$, т.е. $c_I(A) = O(\beta(N))$. Говорят, что: если $\beta(N) = N^p$, $p = \text{const} > 0$, то алгоритм A обладает полиномиальной информационной сложностью по размерности N ; если же $\beta(N) = a^N$, $a = \text{const} > 0$, то алгоритм A имеет экспоненциальную информационную сложность по N .

Будем также полагать, что алгоритм A с неограниченным количеством шагов, находящий ε -решение задачи $z = \langle F, S \rangle$ с произвольным наперед заданным $\varepsilon > 0$, обладает информационной сложностью $O(\beta(N))$ при $N \rightarrow +\infty$ в том случае, когда для каждого фиксированного достаточно малого $\varepsilon > 0$ алгоритм $A^\varepsilon \in A(\varepsilon)$, состоящий из $K(\varepsilon, N) < +\infty$ начальных шагов алгоритма

A , имеет информационную сложность $O(\beta(N))$ при $N \rightarrow +\infty$. Здесь $K(\varepsilon, N)$ — число шагов, за которое алгоритм A строит ε -решение задачи z размерности N .

Все введенные здесь понятия сформулированы в рамках минимаксной концепции оптимальности алгоритмов. Отметим, что данная концепция в форме принципа наилучшего гарантированного результата лежит в основе методологии исследования операций [20]. Упомянем также другую хорошо известную концепцию оптимальности алгоритмов "в среднем", которая, однако в данной работе не рассматривается. В следующих параграфах вопросы сложности задач и эффективности численных методов обсуждаются и анализируются только с позиций минимаксной концепции оптимальности.

Модель (1), (2) описывает так называемые детерминированные алгоритмы. Наряду с ними изучаются и разрабатываются стохастические алгоритмы (методы случайного поиска), в которых выбор точек для информационных вычислений осуществляется в соответствии с некоторыми распределениями вероятностей. Обычно анализ свойств и применимости стохастических алгоритмов, а также сравнение их между собой по качеству предполагает использование осредненных показателей эффективности алгоритмов. Формальные модели и определения оптимальности стохастических алгоритмов имеются в [11, 13]. Здесь отметим только, что всякий детерминированный численный метод можно рассматривать как (вырожденный) стохастический метод, на всех шагах которого с единичной вероятностью реализуются конкретные детерминированные правила выбора точек для информационных вычислений. В данном контексте множество всех стохастических алгоритмов решения задачи z интерпретируется как расширение множества детерминированных алгоритмов решения той же задачи z .

§2. Некоторые известные результаты теории оптимальных алгоритмов и информационной сложности.

В теории оптимальных (минимаксных) алгоритмов и информационной сложности получено много результатов. Обширные библиографии по этой проблематике имеются в [12, 13]. Упомянем часть известных работ, относящихся к данной области.

Одними из первых публикаций, в которых изучались задачи о минимаксных алгоритмах, были [1—3]. В [1, 2] рассматриваются задачи построения оптимальных квадратурных формул на некоторых классах функций. Кроме того в [1] обсуждается вопрос об оптимальном приближении линейных функционалов.

В [3] предложен получивший широкую известность последовательный алгоритм поиска экстремума унимодальной функции на отрезке — метод Фибоначчи. При фиксированном количестве информационных вычислений значений целевой функции метод Фибоначчи "почти оптимален" по точности. После статьи [3] оптимальным алгоритмам максимизации (минимизации) унимодальных функций был посвящен целый ряд работ — см. библиографии в [12, 13]. В некоторых из них (например, [29—31]) рассматривается многомерный случай. Вопросы оптимизации алгоритмов поиска минимума выпуклой функции одной переменной исследуются в [32—34].

Существенное внимание уделено построению оптимальных методов минимизации выпуклых функций многих переменных. При обосновании этих методов считается, что область определения класса выпуклых целевых функций служит ограниченное замкнутое выпуклое множество с непустой внутренностью. Оно может задаваться функциональными ограничениями. Сначала в [35, 36] для информационной сложности задачи минимизации выпуклых функций конечного числа переменных была установлена оценка $O(\ln(1/\varepsilon))$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (ε —задаваемая точность решения по значениям целевой функции) как в классе алгоритмов первого порядка, основанных на информации вида (4), так и в классе алгоритмов нулевого порядка, использующих информацию вида (3). Алгоритмами первого и нулевого порядка, на которых достигается оценка $O(\ln(1/\varepsilon))$, являются соответственно метод центров тяжести (МЦТ) [35] и метод [36] (для краткости назовем его здесь методом многогранников (ММ)). Комбинаторная сложность итераций этих алгоритмов (особенно ММ) столь велика, что их реализация и практическое использование крайне затруднены. Кроме того информационная сложность ММ экспоненциально зависит от N —размерности задачи. В [37] (см. также [11]) показано, что в классе алгоритмов первого порядка в асимптотике по $\varepsilon \rightarrow 0+$ справедлива более полная, чем $O(\ln(1/\varepsilon))$, оценка информационной сложности выпуклой задачи оптимизации, а именно — оценка $O(N \ln(1/\varepsilon))$, учитывающая влияние N . Оказывается, что информационной сложностью $O(N \ln(1/\varepsilon))$ обладают уже упоминавшийся МЦТ и метод вписанных эллипсоидов (МВЭ) [38]. Трудоемкость итераций МВЭ гораздо меньше, чем у МЦТ; комбинаторная сложность МВЭ полиномиально зависит от N . Среди других алгоритмов первого порядка, предназначенных для решения задач выпуклого программирования, отметим метод описанных эллипсоидов (МОЭ) [11, 37], являющийся конкретным вариантом более общего метода [39], и метод симплексов (МС) [40, 41]. (Не следует путать МС с симплекс-методом в линейном программировании.) Информационная сложность МОЭ равна $O(N^2 \ln(1/\varepsilon))$, а комбинаторная сложность МОЭ полиномиальна по N , причем она значительно ниже, чем у МВЭ. Одна из модификаций МС (см. [41], стр. 147—157) возникла как обобщение метода решения систем линейных неравенств; другая модификация МС предложена в [40] (см. также [41]). Информационная сложность обеих модификаций МС равна $O(N^3 \ln(1/\varepsilon))$.

Метод нулевого порядка для решения задач выпуклого программирования, имеющий оценку информационной сложности $O(P(N) \cdot \ln(1/\varepsilon))$ ($P(N)$ —полином от N), разработан в [11]. Перечисленные алгоритмы решения выпуклых задач оптимизации являются последовательными; они объединяются общим названием — методы отсечений, поскольку опираются на соответствующие геометрические идеи. Все эти алгоритмы при фиксированном N оптимальны по порядку в смысле определения 4. Приведенные результаты характеризуют асимптотику информационной сложности задачи выпуклого программирования по точности $\varepsilon \rightarrow 0+$. В [11] изучается также асимптотическое поведение информационной сложности этой задачи при росте

размерности N . Оказывается, что оно существенно зависит от геометрических свойств области определения класса выпуклых целевых функций. Заметим еще, что в [11] исследуется информационная сложность ряда подклассов выпуклых оптимизационных задач: классов липшицевых выпуклых, гладких выпуклых и сильно выпуклых задач.

Столь эффективные алгоритмы, как методы отсечений в выпуклом программировании, удается построить для сравнительно узких классов задач, и из обсуждаемых далее результатов ясно, что это обстоятельство связано с объективными трудностями.

Возможный подход к анализу информационной сложности задач основан на понятии ε -энтропии, введенном в [4]. Это понятие позволяет увязать проблему оценивания информационной сложности задач с изучением "массивности" различных функциональных классов. Согласно [6] массивность класса (множества) в метрическом пространстве характеризуется числом элементов минимального ε -покрытия этого класса (т.е. покрытия наименьшим количеством шаров радиуса $\varepsilon > 0$ в данном пространстве) при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Идея оценивания информационной сложности через ε -энтропию для некоторых задач используется, например, в [9, 42]. С помощью понятия ε -энтропии в [7] исследуется задача оптимального кодирования на классах функций. В [4, 7] отыскивается ε -энтропия ряда функциональных классов. Получение оценок информационной сложности некоторых задач может также базироваться (см. [12]) на теории поперечников [43].

Обозначим через r метрику в N -мерном пространстве R^N . Далее, в тех случаях когда вид r не конкретизируется, предполагается, что r — произвольная метрика, эквивалентная евклидовой метрике.¹⁾ В [13] показано, что если X — ограниченное множество в R^N , $F = F(L)$ — класс функций, удовлетворяющих условию Липшица на X с константой L , то вопрос о построении оптимальных пассивных алгоритмов, использующих информацию вида (3) для решения задачи $z = \langle F, S \rangle$ при нескольких типах S сводится к задаче оптимального покрытия множества X .²⁾ Это положение справедливо для задач глобальной оптимизации, поиска корней нелинейных уравнений, восстановления функций по их значениям и некоторых других задач. Точнее говоря, для названных задач оптимальные на $F(L)$ в смысле определения 2 пассивные алгоритмы нулевого порядка предписывают вычислять значения функций $f \in F(L)$ в центрах r -шаров радиуса $\delta = \varepsilon/L$, образующих оптимальное (минимальное) δ -покрытие множества X . (Здесь ε — точность, задаваемая по значениям функции $f \in F(L)$; r -шаром радиуса δ с центром в точке x^0 называется множество $\{x \in R^N \mid r(x^0, x) \leq \delta\}$.) Центры указанных r -шаров составляют минимальную по числу элементов δ -сеть на X . Таким образом, информационная сложность рассматриваемых задач на $F(L)$ в множествах соответствующих пассивных

¹⁾ Метрики r_1 и r_2 в пространстве R^N называются эквивалентными, если существуют такие числа $c' > 0$, $c'' > 0$, что $c' r_1(x', x'') \leq r_2(x', x'') \leq c'' r_1(x', x'')$ для всех $x', x'' \in R^N$.

²⁾ Аналогичная ситуация имеет место и для классов функций, заданных квазиметриками.

алгоритмов нулевого порядка равна количеству узлов минимальной δ -сети на X . Как следует из обсуждаемых ниже результатов, тот же вывод справедлив и по отношению к множествам последовательных алгоритмов нулевого порядка. С проблемой оптимального покрытия множества X связана также задача построения оптимальных квадратурных формул на классе $F(L)$ и классах функций, заданных квазиметриками.

Известно (см., например, [4]), что число элементов в минимальном δ -покрытии ограниченного множества $X \subset R^N$ с непустой внутренней частью равно $O(\delta^{-N})$ при $\delta \rightarrow 0+$. Отсюда следует, что при наличии внутренних точек у ограниченного множества X информационная сложность перечисленных выше задач на классе $F(L)$ в множестве пассивных алгоритмов с информацией вида (3) зависит от точности $\varepsilon = L\delta$ как $O(\varepsilon^{-N})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. При произвольных r , X и $N \geq 2$ задача об оптимальном покрытии множества X является труднейшей задачей дискретной геометрии [44, 45], но в отдельных частных случаях удается довольно просто решить ее и, благодаря этому, конструктивно описать оптимальные в смысле определений 1, 2 алгоритмы на $F(L)$ — см. [13], а также точно и в явном виде найти информационную сложность задач на $F(L)$. Важный пример такого рода дает ситуация, когда X — координатный параллелепипед (ребра которого параллельны координатным осям) в пространстве R^N с кубической (чебышевской) метрикой

$$r(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N, \quad y = (y_1, \dots, y_N) \in R^N. \quad (6)$$

Обсудим теперь вопрос о соотношении информационной сложности задач в классах пассивных и последовательных алгоритмах. Пусть $A^0(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$ — соответственно множества всех пассивных и последовательных алгоритмов (см. (1), (2), (5)), основанных на некоторой информации об элементах класса F и находящих ε -решение задачи $z = \langle F, S \rangle$ для любого $f \in F(L)$. Поскольку $A^0(\varepsilon) \subseteq A(\varepsilon)$, информационная сложность задачи z в множествах алгоритмов $A^0(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$c_I(A(\varepsilon)) \leq c_I(A^0(\varepsilon)). \quad (7)$$

Для некоторых задач в (7) выполняется строгое неравенство, причем левая часть его существенно меньше правой. Такое положение возникает, например, в задаче поиска экстремума унимодальной функции на отрезке [3, 12]; в задаче нахождения корня непрерывной строго монотонной на отрезке функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков [5, 12]; в задаче выпуклого программирования [11]. В то же время, для многих задач в (7) имеет место равенство, т.е.

$$c_I(A(\varepsilon)) = c_I(A^0(\varepsilon)), \quad (8)$$

и значит, оптимальный пассивный алгоритм является оптимальным и в классе всех последовательных алгоритмов. Одно из первых утверждений такого рода относится к задаче интегрирования монотонных на отрезке функций [5].

В [12, 13, 46—48] получены достаточные условия выполнения равенства (8) для задачи $z = \langle F, S \rangle$ при различных и весьма общих предположениях относительно функционального класса F , отображения S и классов алгоритмов $A^0(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$. Из этих результатов, в частности следует, что если $F = F(L)$ — класс липшицевых функций с константой L на множестве $X \subset R^N$, множества $A^0(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$ состоят из алгоритмов нулевого порядка, то для целого ряда задач, включающего глобальную оптимизацию, отыскание корней нелинейных уравнений, восстановление функций, численное интегрирование, справедливо равенство (8). (Аналогичное утверждение верно и в более общем случае, когда F — класс функций на X , заданный произвольной квазиметрикой.) Иными словами, для каждой из названных задач класс $F(L)$ оказался настолько богатым, что какой бы ни был последовательный алгоритм $A \in A(\varepsilon)$, в $F(L)$ найдется "наихудшая" функция такая, что получаемая о ней в ходе работы алгоритма A информация не позволяет уменьшить количество информационных вычислений при решении задачи по сравнению с оптимальным на $F(L)$ пассивным алгоритмом. Указанная "наихудшая" (для алгоритма $A \in A(\varepsilon)$) функция имеет равные значения в точках информационных вычислений, предписываемых алгоритмом A , и наибольшую скорость изменения, определяемую константой L .

Приведенные теоретические результаты свидетельствуют о том, что если X — ограниченное множество в R^N , имеющее внутренние точки, то информационная сложность упомянутых в предыдущем абзаце задач на классе $F(L)$ экспоненциально зависит от размерности N и равна $O(\varepsilon^{-N})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $N \rightarrow +\infty$ по отношению к соответствующему множеству всех последовательных алгоритмов с информацией вида (3).

Исследование информационной сложности задач на классе $F(L)$ и построение оптимальных алгоритмов их решения, как правило, проводилось в множестве алгоритмов нулевого порядка. Иногда аналогичные вопросы изучались и относительно алгоритмов, основанных на информации более общего вида. Если X — координатный куб в пространстве R^N с кубической метрикой, то (как следует из сказанного выше) оптимальным алгоритмом нулевого порядка для решения задачи глобальной оптимизации на классе $F(L)$ является метод полного перебора узлов "минимальной" кубической сетки, вычисляющий значения целевой функции во всех узлах этой сетки. Оказывается (см. [49]), что данный метод остается оптимальным и в более широком классе алгоритмов, использующих произвольную линейную информацию, и значит, информационная сложность глобальной оптимизации на $F(L)$ в множестве алгоритмов нулевого порядка не может быть снижена за счет указанного расширения класса алгоритмов. Помимо значений целевой функции примерами линейной информации служат значения производных или разделенных разностей целевой функции в выбираемых точках. Сходный результат получен в [50] для задачи решения нелинейных уравнений на классе $F(L)$.

Как правило, последовательные алгоритмы решения задачи $z = \langle F, S \rangle$ с онкретной ("ненаихудшей") функцией $f \in F$ существенно превосходят по

эффективности оптимальный пассивный алгоритм для z и в том случае, когда для z справедливо равенство (8). Тем не менее, нахождение оптимального пассивного алгоритма, решающего задачу z , представляется целесообразным не только с теоретической, но и с практической точки зрения, так как знание его структуры нередко позволяет создавать оптимальные (или, по крайней мере, рациональные) последовательные алгоритмы решения той же задачи.

В [13] рассматривается концепция последовательной оптимальности алгоритмов. Она заключается в выделении из множества всех оптимальных алгоритмов решения задачи $z = \langle F, S \rangle$ класса последовательно-оптимальных алгоритмов, которые на каждом шаге наилучшим образом перерабатывают накопленную информацию об $f \in F$. Такие алгоритмы наиболее полно учитывают индивидуальные особенности каждой конкретной функции $f \in F$, выявленные в ходе вычислительного процесса. Поэтому, при "благоприятном (нехудшем) поведении" функций $f \in F$ последовательно-оптимальные алгоритмы в принципе способны обеспечить значительную экономию информационных вычислений при решении задач с требуемой точностью по сравнению с другими оптимальными алгоритмами. Однако, возникают серьезные трудности, связанные с конструктивной реализацией последовательно-оптимальных алгоритмов. Комбинаторная сложность этих алгоритмов может быть чрезвычайно высокой, поскольку на их итерациях должны решаться (см. [13]) труднейшие (в многомерном случае) вспомогательные задачи. Конструктивно описать последовательно-оптимальные алгоритмы удастся, как правило, для одномерных задач. В многомерном случае указанные трудности могут оказаться непреодолимыми; но анализ структуры последовательно-оптимальных алгоритмов зачастую помогает строить достаточно эффективные численные методы с приемлемой комбинаторной сложностью.

Важные результаты в теории минимаксных алгоритмов и информационной сложности получены для классов гладких функций. Пусть X — замкнутое ограниченное множество с непустой внутренностью в пространстве R^N , и $F^s(L)$ — класс s раз дифференцируемых функций на X , у которых s -ая производная по любому направлению удовлетворяет условию Липшица с константой L ($0 \leq s < +\infty$). В частности, $F^0(L) = F(L)$ — класс липшицевых функций. В [51] показано, что информационная сложность задачи глобальной оптимизации на классе $F^s(L)$ равна $O(\varepsilon^{-N/(s+1)})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ как в множестве последовательных алгоритмов s -ого порядка, вычисляющих в каждой очередной точке значения целевой функции и всех ее частных производных до порядка s включительно, так и в множестве последовательных алгоритмов нулевого порядка. Здесь ε — точность по значениям функции $f \in F^s(L)$. Та же оценка установлена в [11] для стохастической информационной сложности задачи глобальной оптимизации на классе $F^s(L)$. (Поясним, что стохастическая информационная сложность задачи определяется относительно множества стохастических алгоритмов решения этой задачи — см. [11].) Подход, предложенный в [51], дает возможность строить оптимальные по порядку семейства детерминированных алгоритмов поиска глобального экстремума

функций из $F^s(L)$. Приведенные факты, а также соответствующий результат [13] говорят о том, что информационную сложность глобальной оптимизации на классах $F^s(L)$, $0 \leq s < +\infty$, достигаемую в множествах детерминированных алгоритмов, нельзя существенно уменьшить за счет применения стохастических алгоритмов (методов случайного поиска).

По поводу методов случайного поиска в глобальной оптимизации отметим еще следующие аспекты. В [52, стр. 115] сказано, что они сходятся (в вероятностном смысле) крайне медленно при решении "неблагоприятных" задач. Ускорения сходимости и снижения трудоемкости методов случайного поиска можно добиться благодаря принятию ненулевой вероятности потери точек глобального экстремума (т.е. за счет допускания неверного решения с некоторой положительной вероятностью). Подобная идея разрабатывается в [53]. Исследование так называемой "расслоенной выборки" в [52] показывает, что уменьшение "доли случайности" в стохастических алгоритмах оптимизации нередко повышает их эффективность. Аналогичный вывод имеет место (см. [54]) и для стохастических методов численного интегрирования.

Оценка информационной сложности $O(\varepsilon^{-N/(s+1)})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ на классах $F^s(L)$ справедлива не только для глобальной оптимизации, но и для задач восстановления (приближения) функций [55], вычисления интегралов [8], табулирования функций [7]. По-видимому, эти результаты согласуются с утверждением [6] о том, что "массивность" функциональных классов $F^s(L)$ определяется отношением $N/(s+1)$. Информационная сложность названных задач на классах $F^s(L)$, $0 \leq s < +\infty$ экспоненциально зависит от размерности N , причем порядок информационной сложности снижается с увеличением гладкости задач. Оценка $O(\varepsilon^{-N/(s+1)})$ в асимптотике по $\varepsilon \rightarrow 0+$ и $N \rightarrow +\infty$ характеризует потенциальные нижние границы трудоемкости численных методов решения указанных задач.

Высокая информационная сложность задач на таких широких функциональных классах, как $F(L)$, $F^s(L)$ при небольших s , свидетельствует о невозможности создания численных методов, являющихся универсальными и, вместе с тем, имеющих малую трудоемкость. Наименее трудоемкие методы удастся строить для решения задач на узких классах с учетом их специфики. В связи с этим в теории оптимизации определенный интерес представляют попытки выделения из класса $F(L)$ или $F^1(L)$ таких подклассов, на которых порядок оценки информационной сложности задачи поиска глобального экстремума ниже, чем на всем $F(L)$ или соответственно $F^1(L)$. Подобными подклассами являются, например, классы липшицевых (с константой L) выпуклых функций и гладких выпуклых функций, изучаемые в [11]. Другие подклассы, обладающие указанным свойством, найдены в [56—58].

До сих пор обсуждались теоретические исследования, в которых главное внимание при решении различных задач уделялось оптимальному выбору точек информационных вычислений и оцениванию информационной сложности задач. В ряде работ, относящихся к тематике минимаксных алгоритмов, рассматривается другая постановка: точки информационных вычислений

предполагаются фиксированными, и проблема построения оптимального алгоритма заключается в нахождении оптимальной итоговой операции (см. модель алгоритмов (1), (2)). Данная постановка возникает, к примеру, при отыскании оптимальных коэффициентов квадратурной формулы с фиксированными узлами, при восстановлении экстремального значения целевой функции с наименьшей погрешностью (без указания точки приближенной реализации экстремума) по информации о функции в узлах заданной сетки. Довольно часто (см. [12] и библиографию в [12]) в подобной форме изучаются задачи оптимального приближения функций различных классов; важным инструментом при решении этих задач служит аппарат сплайнов [59, 60]. Для сплайновых алгоритмов (алгоритмов, в которых в роли итоговой операции используются сплайны) доказан ряд свойств оптимальности [12].

В связи с развитием теории принятия решений обрели популярность сравнительно новые типы оптимизационных задач, являющиеся теми или иными обобщениями обычных экстремальных задач. Так, в последние десятилетия активно изучались многокритериальные задачи с различными принципами оптимальности решений [61 — 65], задачи оптимизации по бинарным отношениям и функциям выбора [41, 66, 67]. Анализу трудоемкости (сложности) и вопросам построения экономных, оптимальных в каком-либо смысле численных методов решения этих задач посвящены специальные исследования.

Для многокритериальных задач понятие информационной сложности допускает неоднозначность толкования, которая обусловлена возможностью выбора разных принципов (концепций) оптимальности в задачах с векторным критерием эффективности. Если в качестве точного решения многокритериальной задачи рассматривается множество оптимальных по Парето (или оптимальных по Слейтеру) стратегий, то информационная сложность такой задачи выражается согласно определению 2. При этом полагается, что во всех точках информационного вычисления рассчитываются характеристики (для алгоритмов нулевого порядка — значения) всех частных критериев. Оптимальные по информационной сложности алгоритмы нулевого порядка, обеспечивающие нахождение с заданной точностью множества паретовских стратегий в липшицевых многокритериальных задачах, построены в [68] (см. также [13]) и в [14 — 17]. Статьи [14 — 17], результаты которых в систематизированной форме представлены в §3 настоящей работы, посвящены оцениванию и сравнению информационной сложности липшицевых задач приближенного отыскания множества паретовских стратегий при различных трактовках аппроксимации этого множества — аппроксимации "по функционалу" и аппроксимации "по аргументу". Соображения, аналогичные идеям [14—17], развиваются в [18] для сравнительного анализа информационной сложности липшицевых задач скалярной глобальной оптимизации и глобального поиска корней нелинейных уравнений. Материал из [18] отражен в §4 данной работы. Отметим также, что результаты, полученные в [14—18], служат вкладом в изучение проблемы иерархии сложности разнообразных задач вычислительной математики. Эта обширная проблема выдвигается в [12], там же приводятся фрагменты иерархии сложности задач.

Другая возможная концепция решения многокритериальных задач заключается в оптимизации по бинарному отношению, связанному с векторным критерием эффективности и отражающему систему предпочтений ЛПР (лица, принимающего решение). В этой концепции предполагается, что бинарное отношение последовательно уточняется в ходе решения задачи по мере выявления предпочтений ЛПР в диалоговом режиме. Согласно [41] информационная сложность многокритериальной задачи в такой постановке определяется как наименьшее количество осуществляемых ЛПР парных сравнений стратегий по значениям в них векторного критерия, позволяющее с требуемой точностью найти решение задачи, состоящее из единственной (наилучшей) стратегии. При этом, естественно, считается, что процедура сравнения стратегий гораздо более трудоемка, чем процедура вычисления характеризующих их значений векторного критерия. Для решения с заданной точностью выпуклых многокритериальных задач такого рода в [41] построены алгоритмы, субоптимальные по числу парных сравнений. Алгоритмы с аналогичным свойством субоптимальности предложены в [41] и для приближенного решения выпуклых задач оптимизации по бинарным отношениям, когда ЛПР сравнивает конкурирующие стратегии непосредственно, в отсутствие явного критерия эффективности. Заметим, что эти алгоритмы существенно опираются на оптимальные по порядку методы [11] традиционного выпуклого программирования, обсуждавшиеся выше.

В заключение этого обзора остановимся на задачах оптимизации по функциям выбора [41, 66, 67]. Язык функций выбора позволяет описывать всевозможные концепции выбора в ситуациях принятия решений. Весьма важной является проблема о представлении функций выбора в виде конструктивных алгоритмических процедур — так называемых механизмов выбора. Установлено, что для любой функции выбора, определенной на компактном множестве стратегий, существует (причем неединственный) механизм выбора, реализующий ее с заданной точностью; если же функция выбора задана на конечном множестве стратегий, то она может быть точно воспроизведена с помощью некоторого механизма выбора. Класс таких механизмов составляют многошаговые схемы обобщенного математического программирования (МнОМП) [41, 67]. В связи со сказанным представляет интерес задача синтеза механизма выбора, реализующего данную функцию выбора и обладающего минимальной сложностью в каком-либо подклассе схем МнОМП. Различные постановки такого рода вопросов изучаются в [41, 67].

§3. Информационная сложность многокритериальной оптимизации.

Для удобства записи примем обозначения: $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество индексов,

$$R_n^+ = \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i > 0, i \in I_n\}, \quad R_n^0 = \{a = (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \geq 0, i \in I_n\}.$$

Пусть X — непустое компактное множество стратегий в пространстве R^N с непрерывной метрикой r , векторный критерий $f = (f_1, \dots, f_n)$ определен и непрерывен на X . Будем рассматривать многокритериальную задачу, в которой под точным решением понимается

$$P_f(X) = \{x \in X \mid \text{не существует } x' \in X \text{ такого, что } f_i(x') \geq f_i(x), i \in I_n, \\ f(x') \neq f(x)\} —$$

множество оптимальных по Парето точек на X по критерию $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Для произвольных $Z \subseteq X$, $\gamma \in R_n^+$ определим параметрическое семейство множеств

$$\Pi_f^\gamma(Z) = \{x \in Z \mid \text{не существует } z \in Z \text{ такого, что } f_i(z) > f_i(x) + \gamma_i, i \in I_n\}. \quad (9)$$

При этом $\Pi_f^0(X) = S_f(X)$ — множество оптимальных по Слейтеру (полуэффективных) точек на X по критерию $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Пусть имеются $\varepsilon, \beta \in R_n^+$, $\delta > 0$.

Определение 5. Множество $P_\varepsilon \subseteq X$ назовем ε -аппроксимацией множества $P_f(X)$ по функционалу (по векторному критерию f), если для любого $x \in P_f(X)$ существует $x' \in P_\varepsilon$ такое, что $f_i(x') \geq f_i(x) - \varepsilon_i$, $i \in I_n$, и $P_\varepsilon \subseteq \Pi_f^\varepsilon(X)$. ■

Определение 6. Множество $P_{\delta, \beta} \subseteq X$ назовем (δ, β) -аппроксимацией множества $P_f(X)$ в пространстве стратегий (по аргументу), если

$$\Delta(P_f(X), P_{\delta, \beta}) = \sup_{x' \in P_f(X)} \inf_{x'' \in P_{\delta, \beta}} r(x', x'') \leq \delta, \quad \text{и} \quad P_{\delta, \beta} \subseteq \Pi_f^\beta(X). \quad \blacksquare$$

В следующем утверждении устанавливается "поведение" аппроксимирующих семейств $\{P_\varepsilon\}$, $\{P_{\delta, \beta}\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, $\delta \rightarrow 0+$, $\beta \rightarrow 0+$.

Лемма.

$$\Delta(f(P_f(X)), f(P_\varepsilon)) \rightarrow 0, \quad \Delta(P_\varepsilon, S_f(X)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

$$\Delta(P_f(X), P_{\delta, \beta}) \rightarrow 0, \quad \Delta(P_{\delta, \beta}, S_f(X)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0+, \beta \rightarrow 0+,$$

где $f(P_f(X))$, $f(P_\varepsilon)$ — образы множеств $P_f(X)$, P_ε в пространстве значений критерия $f = (f_1, \dots, f_n)$. ■

Доказательства этого и всех остальных утверждений данной работы имеются в [19].

При анализе информационной сложности задач аппроксимации множества $P_f(X)$ в смысле определений 5, 6 будем полагать, что f относится к классу липшицевых вектор-функций

$$F(L) = \{f = (f_1, \dots, f_n) \mid |f_i(x') - f_i(x'')| \leq L_i r(x', x''), x', x'' \in X, i \in I_n\},$$

$$L = (L_1, \dots, L_n), \quad L_i > 0, \quad i \in I_n.$$

Тогда, в соответствии с принятой в §1 формализацией, многокритериальная задача отыскания множества $P_f(X)$ для $f \in F(L)$ описывается парой $z(L) = \langle F(L), \Pi \rangle$. Класс последовательных алгоритмов нулевого порядка, находящихся ε -аппроксимацию множества $P_f(X)$ по функционалу для любого $f \in F(L)$ за конечное (нефиксированное) число шагов обозначим через $A(\varepsilon)$. В алгоритмах $A \in A(\varepsilon)$, имеющих вид (1), (2), используется информация только о значениях критерия $f = (f_1, \dots, f_n)$, т.е. $u(f, \cdot) = f(\cdot)$, а итоговая операция задается равенством $v(x^1, \dots, x^K, f(x^1), \dots, f(x^K)) = P_f\{x^1, x^2, \dots, x^K\}$.

Установим информационную сложность $c_I(A(\varepsilon))$ задачи $z(L)$ в классе алгоритмов $A(\varepsilon)$. Пусть $X(\delta)$ — δ -сеть на компакте X , составленная из минимально возможного количества узлов.

Теорема 1. $c_I(A(\varepsilon)) = |X(\delta)|$,¹⁾ где $\delta = \min_{i \in I_n} \varepsilon_i / L_i$; пассивный алгоритм $A_\varepsilon^0 = \langle f(\cdot); X(\delta); v(\cdot) \rangle$, вычисляющий значения векторного критерия f в узлах минимальной δ -сети $X(\delta)$ и строящий множество $P_f(X(\delta))$ для всякого $f \in F(L)$, оптимален на $F(L)$ в классе последовательных алгоритмов $A(\varepsilon)$, т.е. $c_I(A_\varepsilon^0) = c_I(A(\varepsilon))$.

■

Отметим, что ранее близкий результат был получен в [68] (см. также [13]).

Перейдем к оцениванию информационной сложности приближенного решения многокритериальной задачи $z(L) = \langle F(L), \Pi \rangle$ в смысле определения б. Пусть заданы $\delta > 0$, $\beta, \gamma \in R^n$. Обозначим:

$$\tau = \tau(\delta, \beta, \gamma) = \min \left\{ \delta, \min_{i \in I_n} \gamma_i / L_i, \min_{i \in I_n} (\beta_i - \gamma_i) / L_i \right\}, \quad (10)$$

$$\Gamma(\beta) = \{ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mid 0 < \gamma_i < \beta_i, \quad i \in I_n \},$$

$$\tau^* = \tau^*(\delta, \beta) = \max_{\gamma \in \Gamma(\beta)} \tau(\delta, \beta, \gamma) = \min \left\{ \delta, \min_{i \in I_n} \beta_i / (2L_i) \right\}, \quad (11)$$

$$\Gamma^*(\delta, \beta) = \{ \gamma \in \Gamma(\beta) \mid L_i \tau^*(\delta, \beta) \leq \gamma_i \leq \beta_i - L_i \tau^*(\delta, \beta), \quad i \in I_n \}.$$

Легко видеть, что $\Gamma^*(\delta, \beta) \neq \emptyset$; в частности, $\Gamma^*(\delta, \beta) \ni \hat{\gamma} = \beta/2$.

Введем класс пассивных алгоритмов нулевого порядка

$$A^0(\delta, \beta) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(\beta)} \{ A = \langle f(\cdot); X_\tau; v^r(\cdot) \rangle \mid X_\tau = \{x^1, x^2, \dots, x^K\} \text{ — конечная } \tau\text{-сеть на } X, v^r(x^1, \dots, x^K, f(x^1), \dots, f(x^K)) = \Pi_\gamma^r(X_\tau) \} \quad (12)$$

с нефиксированным конечным числом шагов K и итоговой операцией $v^r(\cdot)$. Множество $\Pi_\gamma^r(X_\tau)$ в (12) определяется согласно (9). Как показано в [19],

1) Здесь и далее употребляется обозначение: $|M|$ — число элементов конечного множества M

алгоритмы из класса $A^0(\delta, \beta)$ обеспечивают нахождение (δ, β) -аппроксимации множества $P_f(X)$ в пространстве стратегий для любого $f \in F(L)$. В следующей теореме найдена информационная сложность $c_I(A^0(\delta, \beta))$ многокритериальной задачи $Z(L) = \langle F(L), \Pi \rangle$ в классе пассивных алгоритмов $A^0(\delta, \beta)$.

Теорема 2. Если

$$D(X) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{x', x'' \in X} r(x', x'') > 2(\delta + \max_{i \in I_n} \beta_i / L_i), \quad (13)$$

то $c_I(A^0(\delta, \beta)) = |X(\tau^*)|$, где $\tau^* = \tau^*(\delta, \beta)$ имеет вид (11); алгоритм $A_{\delta, \beta}^* = \langle f(\cdot); X(\tau^*); v^*(\cdot) \rangle$, $\gamma^* \in \Gamma^*(\delta, \beta)$, вычисляющий значения векторного критерия f в узлах минимальной τ^* -сети $X(\tau^*)$ и строящий множество $\Pi_f^*(X(\tau^*))$ для любого $f \in F(L)$, оптимален на $F(L)$ в классе пассивных алгоритмов $A^0(\delta, \beta)$, т.е. $c_I(A_{\delta, \beta}^*) = c_I(A^0(\delta, \beta))$. ■

Условие (13) в теореме 2 не является ограничительным. Оно заведомо справедливо при естественном предположении о малости параметров аппроксимации $\delta > 0$, $\beta \in R_+^n$ по сравнению с диаметром множества X . Вместе с тем отметим, что в [19] теорема 2 сформулирована и доказана в обобщенном варианте — в отсутствие условия (13).

В структуре численных алгоритмов (см. (1)) помимо типа используемой информации были выделены две компоненты: совокупность правил выбора точек для информационных вычислений и итоговая операция — способ нахождения искомого решения по добываемой информации. Во многих алгоритмах (например, в алгоритмах класса $A(\varepsilon)$, рассматривавшегося выше) две указанные компоненты никак не зависят друг от друга. В подобных случаях задача построения оптимального алгоритма обычно состояла либо в оптимизации правил получения информации при известной итоговой операции, либо, наоборот, в оптимизации итоговой операции при фиксированных правилах добывания информации. Особенность алгоритмов класса $A^0(\delta, \beta)$ заключается в том, что в них способ выбора точек для информационных вычислений, определяемый заданием τ -сети X_τ , и итоговая операция $v^*(\cdot)$ связаны между собой, ибо согласно (10), $\tau = \tau(\delta, \beta, \gamma)$. Поэтому, оптимизация в классе алгоритмов $A^0(\delta, \beta)$ проводилась совместно по обоим названным компонентам алгоритмов.

Получим теперь асимптотическую оценку информационной сложности $c_I(A(\delta, \beta))$ приближенного в смысле определения б решения многокритериальной задачи $Z(L) = \langle F(L), \Pi \rangle$ в классе последовательных алгоритмов нулевого порядка $A(\delta, \beta) \supseteq A^0(\delta, \beta)$. Итоговая операция алгоритмов класса $A(\delta, \beta)$ задается также, как в (12).

Предположим, что классы $A(\delta, \beta)$ определены при всех $\delta > 0$, $\beta \in R_+^n$; $\text{int } X$ — подмножество внутренних точек компакта X , и r — произвольная

метрика в R^N , эквивалентная евклидовой метрике. Образует общий класс алгоритмов

$$A = \bigcup_{\substack{\delta > 0 \\ \beta \in R^n}} A(\delta, \beta).$$

Теорема 3. Пусть $\text{int } X \neq \emptyset$. Информационная сложность $c_I(A(\delta, \beta))$ многокритериальной задачи $Z(L)$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\frac{|X(\tau^*)|}{c_I(A(\delta, \beta))} \longrightarrow 1 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0+, \beta \rightarrow 0+, \beta = O(\delta),$$

где $\tau^* = \tau^*(\delta, \beta)$ определено в (11), равенство $\beta = O(\delta)$ для $\beta \in R^n$ при скалярном $\delta > 0$ понимается покомпонентно. Семейство пассивных алгоритмов

$$\{A_{\delta, \beta}^*\} = \left\{ A_{\delta, \beta}^* = \langle f(\cdot); X(\tau^*); v^*(\cdot) \rangle \mid \delta > 0, \beta \in R^n \right\} \subseteq A,$$

в которых $\tau^* = \tau^*(\delta, \beta)$, $\gamma^* \in \Gamma^*(\delta, \beta)$, асимптотически оптимально на $F(L)$ в классе всех последовательных алгоритмов A при $\delta \rightarrow 0+$, $\beta \rightarrow 0+$, $\beta = O(\delta)$. ■

Допустим, что X — координатный параллелепипед в пространстве R^N с кубической метрикой (6). В этом случае легко строится минимальная τ -сеть X_τ на X , подсчитывается количество узлов в ней, и из теорем 1,3 получаются явные количественные оценки информационных сложностей $c_I(A(\varepsilon))$, $c_I(A(\delta, \beta))$ приближенного решения многокритериальной задачи $Z(L)$ в смысле определений 5, 6. При сравнении величин $c_I(A(\varepsilon))$, $c_I(A(\delta, \beta))$ считаем, что параметры δ , $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ связаны с $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ равенствами: $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i / L_i$, $\beta = \varepsilon$. Такое согласование параметров представляется вполне

естественным. Оказывается, что тогда $\frac{c_I(A(\delta, \varepsilon))}{2^N c_I(A(\varepsilon))} \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, т.е. в

анализируемой ситуации при малых $\varepsilon \in R^n$ информационная сложность $c_I(A(\delta, \beta))$ превосходит $c_I(A(\varepsilon))$ приблизительно в 2^N раз, где N — размерность пространства стратегий (аргументов). Этот вывод справедлив при любой (конечной) размерности n векторных критериев $f \in F(L)$, и в частности, для скалярной задачи глобальной оптимизации, соответствующей $n = 1$.

В теоремах этого параграфа найдены оптимальные на классе $F(L)$ пассивные алгоритмы A_δ^0 , $A_{\delta, \beta}^*$ приближенной многокритериальной оптимизации в смысле определений 5, 6. Оптимальные (или асимптотически оптимальные) на $F(L)$ последовательные алгоритмы решения тех же задач построены в [19].

§4. Сравнение информационной сложности глобальной оптимизации и глобального решения нелинейных уравнений.

В данном параграфе рассматриваются две задачи:

— найти точки и значение глобального максимума скалярной целевой функции f на множестве X :

$$f(x) \longrightarrow \max_{x \in X}, \quad (14)$$

— на множестве X найти корни нелинейного уравнения

$$f(x) = 0, \quad (15)$$

где в обоих случаях X принадлежит конечномерному пространству. Нередко подчеркивается родство задач (14), (15). Очевидно, что отыскание корней уравнения (15) на множестве X сводится к нахождению точек максимума функции $-|f(x)|$ на X ; причем, если хотя бы один корень существует, то этот максимум равен нулю.

Как правило, задачи (14), (15) удается решать лишь приближенно. В "благоприятных ситуациях" (например, в предположении выпуклости множества X и вогнутости функции f) эти задачи сравнительно просто (с малой трудоемкостью) решаются локальными итерационными методами, в которых по выбираемому начальному приближению строится последовательность точек, сходящаяся к точке максимума критерия или к корню уравнения. В общем случае для решения задач (14), (15) приходится использовать методы глобальной оптимизации, имеющие высокую информационную сложность. На практике часто комбинируют глобальные и локальные методы: сначала, проводя глобальный поиск, находят грубые приближенные решения, а затем уточняют их с помощью локальных методов.

К настоящему времени теория глобальной оптимизации сформировалась как обширная самостоятельная область исследований. Вместе с тем, термин "глобальное решение уравнений", по-видимому, не является общепринятым, и потому, сделаем необходимое пояснение. Этот термин, употребляемый в [18, 19] и еще ранее в [56], подразумевает применение методов глобального поиска с целью локализации корней в некоторой достаточно узкой зоне множества X . Под решением уравнений в глобальном смысле может пониматься также отыскание удовлетворительных начальных приближений для итерационных процедур вычисления корней. Итак, в данном параграфе речь идет о глобальном решении задач (14), (15).

Пусть X — непустой компакт в N -мерном пространстве R^N с произвольной непрерывной метрикой r , эквивалентной евклидовой метрике, и скалярная функция f непрерывна на X . Множества точных решений в задачах (14), (15) обозначим через X_f^* , т.е.

$$X_f^* = \{x \in X \mid f(x) = \max_{y \in X} f(y)\} \quad \text{для задачи оптимизации (14), и}$$

$$X_f^* = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \quad \text{для уравнения (15).}$$

Компактность X и непрерывность f на X обеспечивают непустоту множества X_f^* задаче оптимизации. А априорного предположения о существовании на X корней u уравнения (15) делать не будем, т.е. ситуации, когда $X_f^* = \{x \in X \mid f(x) = 0\} = \emptyset$, условимся считать допустимыми. Такое положение

выглядит естественным, поскольку в реальности зачастую приходится исследовать уравнения, про которые заранее не известно, имеют ли они корни.

Введем две трактовки приближенных решений рассматриваемых задач (14), (15). Пусть заданы $\varepsilon, \delta, \beta > 0$.

Определение 7. Точку $x_\varepsilon \in X$ назовем ε -решением задачи оптимизации, если $f(x_\varepsilon) \geq \max_{x \in X} f(x) - \varepsilon$.

Точку $x_\varepsilon \in X$ назовем ε -решением уравнения $f(x) = 0$, если $|f(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon$. ■

Определение 8. Множество $P_{\delta, \beta} \subseteq X$ назовем (δ, β) -аппроксимацией множества X_f^* в задаче оптимизации, если

$$\Delta(X_f^*, P_{\delta, \beta}) = \sup_{x \in X_f^*} \inf_{y \in P_{\delta, \beta}} r(x, y) \leq \delta, \text{ и } f(x) \geq \max_{y \in X} f(y) - \beta \text{ для любого } x \in P_{\delta, \beta}$$

Множество $P_{\delta, \beta} \subseteq X$ назовем (δ, β) -аппроксимацией множества $X_f^* = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ при выполнении двух условий:

— если $X_f^* \neq \emptyset$, то $\Delta(X_f^*, P_{\delta, \beta}) \leq \delta$;

— $|f(x)| \leq \beta$ для любого $x \in P_{\delta, \beta}$ (независимо от того, пусто ли X_f^* или нет) ■

Заметим, что в определениях 7, 8 не исключается ситуация, когда уравнение $f(x) = 0$ не имеет на X корней, но его приближенные решения $x_\varepsilon, P_{\delta, \beta}$ существуют при заданных фиксированных $\varepsilon, \delta, \beta > 0$.

В определении 7 погрешность ε -решений задач (14), (15) оценивается по значениям функции f , и при фиксированном $\varepsilon > 0$ точка x_ε может оказаться далекой от множества X_f^* . Поиск аппроксимационных решений тех же задач согласно определению 8 позволяет локализовать X_f^* в δ -окрестности множества $P_{\delta, \beta}$. Поэтому, точки из $P_{\delta, \beta}$ целесообразно выбирать в качестве начальных приближений для последующего применения итерационных алгоритмов. Такой путь годится, в частности, и для установления самого факта существования корней на X уравнения $f(x) = 0$, если соответствующее найденное множество $P_{\delta, \beta}$ оказалось непустым при выбранных $\delta, \beta > 0$. Сформулированные трактовки приближенного решения задачи глобальной оптимизации, как частные случаи, охватываются введенными в §3 (см. определения 5, 6) понятиями аппроксимации множества парето-оптимальных точек в многокритериальной задаче.

Из компактности множества X и непрерывности функции f на X вытекает несколько простых утверждений, характеризующих аппроксимационные решения $x_\varepsilon, P_{\delta, \beta}$ задач (14), (15):

- если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -решение уравнения $f(x) = 0$ в смысле определения 7, либо для любых $\delta, \beta > 0$ существует (δ, β) -аппроксимация множества $X_f^* = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ в соответствии с определением 8, то $X_f^* \neq \emptyset$;

- если x_ε — ε -решение задачи (14) или (15) для каждого $\varepsilon > 0$, то все предельные точки семейства $\{x_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ содержатся в множестве X_f^* ;
- если $P_{\delta,\beta}$ — (δ, β) -аппроксимация множества X_f^* в задаче (14) или (15) для всех $\delta, \beta > 0$, то $h(X_f^*, P_{\delta,\beta}) = \max\{\Delta(X_f^*, P_{\delta,\beta}), \Delta(P_{\delta,\beta}, X_f^*)\} \rightarrow 0$ при $\delta, \beta \rightarrow 0$, где h — метрика Хаусдорфа.

Далее будем полагать, что заданная на компакте X функция f в (14), (15) принадлежит классу Липшица

$$F(L) = \{f(\cdot) \mid |f(x') - f(x'')| \leq Lr(x', x''), \quad x', x'' \in X\}, \quad L > 0.$$

В [13] описаны классы алгоритмов нулевого порядка, обеспечивающие получение ε -решений задач (14), (15) с $f \in F(L)$ согласно определению 7, и найдены оптимальные на $F(L)$ алгоритмы такого рода. Из результатов [13] вытекает, что информационные сложности поиска ε -решений задач (14), (15) на классе $F(L)$ в указанных классах алгоритмов одинаковы и равны $|X(\tau)|$ — числу узлов в минимальной τ -сети $X(\tau)$ на множестве X , $\tau = \varepsilon/L$. Исследуем аналогичный вопрос о том, каково соотношение между информационными сложностями построения приближенных в смысле определения 8 решений задач (14), (15) на классе $F(L)$.

Введенное в определении 8 понятие (δ, β) -аппроксимации множества X_f^* решений задачи глобальной оптимизации представляет собой частный случай при $n = 1$ использовавшегося в §3 определения (δ, β) -аппроксимации множества парето-оптимальных точек в многокритериальной задаче. (Через n в §3 обозначалась размерность векторного критерия.) Поэтому, для оценивания информационной сложности отыскания приближенного в смысле определения 8 решения задачи глобальной оптимизации на классе $F(L)$ применимы рассуждения и результаты §3, если положить в них $n = 1$. При этом некоторые конструкции, фигурирующие в §3, трансформируются и приобретают более простую форму. Например, в случае $n = 1$ заданное в (9) параметрическое семейство множеств $\Pi_\gamma^f(Z)$, $\gamma \geq 0$ для $Z \subseteq X$ принимает вид:

$$\Pi_\gamma^f(Z) = \{x \in Z \mid f(x) \geq \sup_{z \in Z} f(z) - \gamma\}.$$

Пусть, по аналогии с §3, $A(\delta, \beta)$ — класс последовательных алгоритмов нулевого порядка с итоговой операцией $v^r(\cdot)$ из (12), находящихся за конечное число шагов (δ, β) -аппроксимацию множества X_f^* в задаче глобальной оптимизации для любой целевой функции $f \in F(L)$ при фиксированных $\delta, \beta > 0$. Считая, что классы $A(\delta, \beta)$ определены при всех $\delta, \beta > 0$, положим: $A = \bigcup_{\delta, \beta > 0} A(\delta, \beta)$. Для того, чтобы сослаться на теорему 3, допустим также, что

компакт X имеет внутренние точки. Тогда в силу этой теоремы информационная сложность $c_f(A(\delta, \beta))$ задачи построения (δ, β) -аппроксимации множества X_f^* на классе $F(L)$ в множестве алгоритмов $A(\delta, \beta)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\frac{c_I(A(\delta, \beta))}{|X(\tau^*)|} \longrightarrow 1 \text{ при } \beta = O(\delta), \text{ где } \tau^* = \min\{\delta, \beta/(2L)\}.$$

Кроме того теоремы 2, 3 позволяют указать семейство пассивных алгоритмов $\{A_{\delta, \beta}^* = \{A_{\delta, \beta}^* \mid \delta, \beta > 0\}$ асимптотически оптимальное на $F(L)$ во всей совокупности алгоритмов A при $\delta, \beta \rightarrow 0, \beta = O(\delta)$.

Найдем теперь информационную сложность задачи построения (δ, β) -аппроксимации множества корней X_f^* уравнения (15) на классе липшицевых функций $F(L)$. Для произвольного $Z \subseteq X$ зададим параметрическое семейство множеств

$$T_f^\gamma(Z) = \{x \in Z \mid |f(x)| \leq \gamma\}, \quad \gamma \geq 0.$$

Вспользуемся еще раз формализованной моделью численных алгоритмов, описанной в §1 (см. (1), (2), (5)). Пусть B — последовательный алгоритм нулевого порядка:

$$B = \langle f(\cdot); \xi^1, \xi^2(\cdot), \dots, \xi^K(\cdot); \nu^\beta(\cdot) \rangle, \quad (16)$$

в котором $\xi^1 \equiv x^1 \in X, x^k = \xi^k(x^1, \dots, x^{k-1}, f(x^1), \dots, f(x^{k-1})) \in X, k = 2, 3, \dots, K,$

$$\nu^\beta(x^1, \dots, x^K, f(x^1), \dots, f(x^K)) = T_f^\beta(X^K), \quad X^K = \{x^1, x^2, \dots, x^K\}.$$

Здесь x^1, x^2, \dots, x^K — точки информационных вычислений значений левой части уравнения (15), выбираемые по правилам $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^K$; K — количество шагов; $\nu^\beta(\cdot)$ — итоговая операция алгоритма B . Обозначим через $B(\delta, \beta)$ класс всевозможных алгоритмов вида (16), позволяющих за конечное (нефиксированное) число шагов найти (δ, β) -аппроксимацию множества решений X_f^* уравнения (15) для любого $f \in F(L)$. Заметим, что если $X_f^* = \emptyset$ для некоторого $f \in F(L)$, и параметр $\beta > 0$ достаточно мал, то получаемое в результате работы всякого алгоритма $B \in B(\delta, \beta)$ множество $T_f^\beta(X^K)$ окажется пустым. Пассивные алгоритмы, наряду с последовательными содержащиеся в классе $B(\delta, \beta)$, представим в виде:

$$B = \langle f(\cdot); X^K; \nu^\beta(\cdot) \rangle, \quad X^K = \{x^1, x^2, \dots, x^K\}.$$

Пусть далее $c_I(B(\delta, \beta))$ — информационная сложность поиска (δ, β) -аппроксимации множества корней X_f^* на $F(L)$ в классе алгоритмов $B(\delta, \beta)$, и по-прежнему, $X(\tau)$ — минимальная τ -сеть на X .

Теорема 4. $c_I(B(\delta, \beta)) = |X(\tau)|$, где $\tau = \min\{\delta, \beta/L\}$; пассивный алгоритм $B_{\delta, \beta}^* = \langle f(\cdot); X(\tau); \nu^\beta(\cdot) \rangle$ оптимален на $F(L)$ в классе последовательных алгоритмов $B(\delta, \beta)$, т.е. $c_I(B_{\delta, \beta}^*) = c_I(B(\delta, \beta))$. ■

При сравнении информационных сложностей $c_I(A(\delta, \beta)), c_I(B(\delta, \beta))$ будем считать, что множество X есть N -мерный координатный параллелепипед, и в пространстве $R^N \supset X$ введена кубическая метрика (6). Допустим также, что параметры δ и β , характеризующие погрешность аппроксимации множеств

точных решений X_f^* задач (14), (15) с функциями $f \in F(L)$, связаны равенством $\beta = L\delta$. Такое согласование величин δ и β для $f \in F(L)$ выглядит наиболее естественным с точки зрения роли δ и β в определении 8. В рассматриваемом случае с помощью теорем 3, 4 легко устанавливаются явные оценки для $c_I(A(\delta, L\delta))$, $c_I(B(\delta, L\delta))$, и получается, что

$$\frac{c_I(A(\delta, L\delta))}{2^N c_I(B(\delta, L\delta))} \longrightarrow 1 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0+.$$

Итак, если приближенное решение задач (14), (15) понимается согласно определению 8, то на классе $F(L)$ при малых $\delta > 0$ информационная сложность оптимизации $c_I(A(\delta, L\delta))$ выше информационной сложности решения уравнений $c_I(B(\delta, L\delta))$ приблизительно в 2^N раз. Этот вывод интересно сопоставить с уже отмечавшимся выше фактом — совпадением информационных сложностей приближенного решения тех же задач на классе $F(L)$ в смысле определения 7.

Литература

1. Sard A. Best approximate integration formulas; best approximation formulas // Amer. J. Math. 1949. V. 71. № 1. P. 80—91.
2. Никольский С.М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи матем. наук. 1950. Т. 5. Вып. 2 (36). С. 165—177.
3. Kiefer J. Sequential minimax search for a maximum // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. № 3. P. 502—506.
4. Колмогоров А.Н. О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108. № 3. С. 385—388.
5. Kiefer J. Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1957. V. 5. № 3. P. 105—136.
6. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. Вып. 2 (86). С. 3—86.
7. Витушкин А.Г. Оценка сложности задач табулирования. М.: Физматгиз. 1959.
8. Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестник Моск. ун-та. Матем., механ., астрон., физ., хим. 1959. № 4. С. 3—18.
9. Бахвалов Н.С. Об оптимальных способах задания информации при решении дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 4. С. 569—592.
10. Бахвалов Н.С. Об оптимальных оценках скорости сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука. 1964. С. 5—63.
11. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука. 1979.
12. Трауб Дж, Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир. 1983.
13. Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. М.: Наука. 1989.
14. Попов Н.М. Об одном алгоритме многокритериальной оптимизации в системе автоматизированного проектирования // Математические методы в теории САПР, роботов и систем. Калинин: КГУ. 1988. С. 37—45.
15. Попов Н.М. О сложности приближенного построения множества парето-оптимальных стратегий // Математическое и программное обеспечение задач много-

- критериальной оптимизации и их применение. Тезисы докладов Межреспубликанской школы-семинара. Ереван. 1988. С. 172—174.
16. Попов Н.М. Об оценке вычислительной сложности многокритериальной оптимизации // Вычислительные комплексы и моделирование сложных систем. М.: МГУ. 1989. С. 142—152.
17. Попов Н.М. Об асимптотической оптимальности некоторых алгоритмов многокритериальной оптимизации // Программное обеспечение и модели системного анализа. М.: МГУ. 1991. С. 150—161.
18. Попов Н.М. К оцениванию информационной сложности глобальной оптимизации и глобального решения уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1853—1868.
19. Попов Н.М. Задачи высокой информационной сложности и численные методы их решения. Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-матем. наук. Москва. 1999.
20. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука. 1971.
21. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988.
22. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1986.
23. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986.
24. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир. 1979.
25. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир. 1982.
26. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир. 1985.
27. Компьютер и задачи выбора / Под ред. Ю.И. Журавлева. М.: Наука 1989.
28. Новикова Н.М. Дискретные и непрерывные задачи оптимизации. М.: ВЦ РАН. 1996.
29. Krolak P., Cooper L. An extension of Fibonacci search to several variables // Comm. Assoc. Comput. Mach. 1963. V. 6. № 10. P. 639—641.
30. Newman D.J. Location of the maximum on unimodal surfaces // J. Assoc. Comput. Mach. 1965. V. 12. № 3. P. 395—398.
31. Gal S. Multidimensional minimax search for a maximum // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 23. № 4. P. 513—526.
32. Черноусько Ф.Л. Об оптимальном поиске минимума выпуклых функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т. 10. № 6. С. 1355—1366.
33. Witzgall C. Fibonacci search with arbitrary first evaluation // Fibonacci Quart. 1972. V. 10. № 2. P. 113—134.
34. Афанасьев А.Ю. О поиске минимума функции с ограниченной второй производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 4. С. 1018—1021.
35. Левин А.Ю. Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 6. С. 1244—1247.
36. Кузовкин А.И., Тихомиров В.М. О количестве вычислений для нахождения минимума выпуклых функций // Экономика и матем. методы. 1967. Т. 3. Вып. 1. С. 95—103.
37. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач // Экономика и матем. методы. 1976. Т. 12. Вып. 2. С. 357—369.
38. Тарасов С.П., Хачиян Л.Г., Эрлих И.И. Метод вписанных эллипсоидов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. № 5. С. 1081—1085.
39. Шор Н.З. Метод отсечений с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. 1977. № 1. С. 94—95.
40. Анциферов Е.Г., Булатов В.П. Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 3. С. 377—384.
41. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука. 1989.
42. Бабушка И., Соколов С.Л. Оптимизация численных методов // Apl. Mat. 1965. Т. 10. № 2. С. 96—130.

43. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ. 1976.
44. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир. 1968.
45. Рышков С.С., Бараковский Е.П. С-типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелепипеды (с приложением к теории покрытий) // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 137.
46. Бахвалов Н.С. Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т.11. № 4. С.1014 — 1018.
47. Зализняк Н.Ф., Лигун А.А. Об оптимальных стратегиях поиска глобального максимума функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 2. С. 314 — 321.
48. Gal S., Micchelly C.A. *Optimal sequential and non-sequential procedures for evaluating a functional* // *Applicable Analysis*. 1980. V. 10. № 2. P. 105 — 120.
49. Подобедов В.Е. Оптимальный алгоритм поиска экстремума липшицевых функций при произвольной линейной информации // Системное программирование и вопросы оптимизации. М.: МГУ. 1987. С. 180 — 187.
50. Sikorski K. *Optimal solution of nonlinear equations satisfying a Lipschitz condition* // *Numer. Math.* 1984. V. 43. № 2. P. 225 — 240.
51. Иванов В.В. Об оптимальных алгоритмах минимизации функций некоторых классов // Кибернетика. 1972. № 4. С. 81 — 94.
52. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука. 1991.
53. Устюжанинов В.Г. Случайный поиск в непрерывных задачах глобальной оптимизации // Вопросы кибернетики. Модели и методы глобальной оптимизации. М.: Науч. совет АН СССР по компл. пробл. "Кибернетика". 1985. С. 37 — 45.
54. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука. 1975.
55. Иванов В.В. Об оптимальных по точности алгоритмах приближения функций некоторых классов // Теория приближения функций. М.: Наука. 1975. С. 195 — 200.
56. Волков Е.А. О поиске максимума функции и приближенном глобальном решении системы нелинейных уравнений // Труды МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 64 — 80.
57. Васильев Н.С. К отысканию глобального минимума квазивогнутой функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 2. С. 307 — 313.
58. Перезозчиков А.Г. О сложности вычисления глобального экстремума в одном классе многоэкстремальных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 3. С. 379 — 387.
59. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М.: МГУ. 1983.
60. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука. 1984.
61. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио. 1975.
62. Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Д.М. Гвишиани, С.В. Емельянова. М.: Машиностроение. 1978.
63. Кини Р., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь. 1981.
64. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука. 1982.
65. Ларичев О.И., Никифоров А.Д. Аналитический обзор процедур решения многокритериальных задач математического программирования // Экономика и матем. методы. 1986. Т. 22. Вып. 3. С. 508 — 523.
66. Макаров И.М., Виноградская Т.М., Рубчинский А.А., Соколов В.Б. Теория выбора и принятия решений. М.: Наука. 1982.
67. Шоломов Л.А. Логические структуры исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука. 1989.
68. Сухарев А.Г. Об оптимальных методах решения многокритериальных задач // Известия АН СССР. Технич. киберн. 1982. № 3. С. 67 — 73.