Раздел II.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Разгулин А.В., Роганович И.Б.

О сходимости проекционно-разностной схемы для нелинейного параболического уравнения с преобразованием пространственного аргумента.

1. Введение

Нелинейные параболические функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) с преобразованием пространственных аргументов широко используются для описания пространственно-временной динамики оптических систем с нелокальной обратной связью ([1]). Аналитические методы построения бифуркационных периодических решений предложены для случая поворота аргументов в [2], [3], а для гладкого обратимого преобразования – в [4], [5]. Для широкого круга произвольных (в том числе необратимых) измеримых по Лебегу поточечно ограниченных преобразований аргументов доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений начально-краевой задачи ([6], [7]).

Вместе с тем, одним из основных способов исследования задачи остается численное моделирование на ЭВМ. При построении и анализе конечномерных аппроксимаций рассматриваемого класса ФДУ приходится учитывать, что, во-первых, необратимые преобразования задаются в специальном (обобщенном) смысле, и, во-вторых, решение соответствующей начально-краевой задачи может не обладать высокой гладкостью даже для бесконечно гладкого преобразования, например, преобразования в точку. В [8] предложена и исследована проекционно-разностная схема (п.р.с.), естественным образом аппроксимирующая необратимые преобразования и сходящаяся к обобщенным решениям из пространства $H^{1+\gamma,1}$ в энергетической норме со скоростью порядка $O\left(\tau^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}+h^{\gamma}\right)$, $\gamma\in(0,1/2)$. Целью настоящей работы является исследование сходимости этой п.р.с. в более слабой норме $L^2(Q)$ и получение более высокой скорости сходимости порядка $O(\tau+h^{1+\gamma})$ на том же самом классе обобщенных решений.

2. Постановка начально-краевой задачи.

Рассмотрим начально-краевую задачу для вещественной функции $u=u(x,t)$, $x\in[0,2\pi]$, $t\in[0,T]$, $T>0$:

$$\partial_t u+u-D\partial_{xx}^2 u=F_G(u), \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(2\pi,t),\quad \partial_x u(0,t)=\partial_x u(2\pi,t), \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{3}$$

Слагаемое $F_G(u)$ в (1) задает для почти всех $u(x,0)=u_0(x)$ обобщенную суперпозицию $F(u(x,t))$ и измеримого по Лебегу преобразования $G(x)$ в виде функционала над пространством $C[0,2\pi]$ непрерывных пробных функций

$$\langle F_G(u(t)),\varphi\rangle = \int\limits_{G^{-1}([0,2\pi])} F(u(x,t))\varphi(G(x))dx\,,\quad \varphi\in C[0,2\pi]\,,$$

где $G^{-1}([0,2\pi])=\{x\in[0,2\pi]: G(x)\in[0,2\pi]\}$ - полный прообраз $[0,2\pi]$ при отображении $G(x)$. Например, при отображении в точку $G(x)\equiv x_0\in[0,2\pi]$, и, следовательно,

$$\langle F_G(u(t)),\varphi\rangle = \int\limits_0^{2\pi} F(u(x,t))dx\cdot\varphi(x_0)\,,\quad \text{т.е. } F_G(u(t)) = \int\limits_0^{2\pi} F(u(x,t))dx\cdot\delta(x-x_0)\,,$$

где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция Дирака. Другие примеры преобразований приведены в [5], [7]. Далее будем считать выполненным условие

$$G(x)\in[0,2\pi]\quad \text{для почти всех}\quad x\in[0,2\pi]\,, \tag{4}$$

тогда определение суперпозиции $F_G(u)$ принимает вид

$$\langle F_G(u(t)),\varphi\rangle = \int\limits_0^{2\pi} F(u(x,t))\varphi(G(x))dx\,,\quad \forall\varphi\in C[0,2\pi]\,. \tag{5}$$

Для формулировки дифференциальных свойств задачи (1)-(5) введем обозначения некоторых функциональных пространств. Пусть $L^2(0,2\pi)$ - комплекснозначное пространство Лебега со стандартным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и соответствующей евклидовой нормой $\|\cdot\|$, $H^s(0,2\pi)$ - пространство Соболева порядка $s>0$ ([9], гл. 4, п. 9). Обозначим через A неограниченный оператор $u\to Au = u - D\partial_{xx}^2 u$ с плотной в $L^2(0,2\pi)$ областью определения $D(A)=\left\{u\in H^2(0,2\pi)\ :u(0)=u(2\pi),\partial_x u(0)=\partial_x u(2\pi)\right\}$. Легко видеть, что $A=A^*\geq I$ (I – единичный оператор), спектр A состоит из собственных значений $\lambda_n = 1+Dn^2$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, а собственные функции $e_n(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(inx)$ образуют ортонормированный базис в $L^2(0,2\pi)$. Символ "*" используется в зависимости от контекста для обозначения двойственного пространства, сопряженного оператора или комплексно-сопряженного значения. С помощью спектрального разложения определяются степени A^s, задающие гильбертову шкалу пространств $H_A^s = D(A^{s/2})$ со скалярным произведением $\left\langle A^{s/2}(\cdot),A^{s/2}(\cdot)\right\rangle$ и нормой

$\|(\cdot)\|_{(s)} = \left\|A^{s/2}(\cdot)\right\|$, $H_A^{-s} = \left(H_A^s\right)^*$. В частности, $\|u\|_{(s)} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^s u_n^2\right)^{1/2}$, $u_n = \langle u, e_n \rangle$, а также $\langle u,v\rangle_{(1)} = \langle u,v\rangle + D\langle \partial_x u, \partial_x v\rangle$. Введем банахово пространство

$$H_A^{s,1} = \left\{u : u \in L^2\left(0,T;H_A^s\right),\ \partial_t u \in L^2\left(0,T;L^2(0,2\pi)\right)\right\}$$

с нормой $\|u\|_{(s,1)} = \left(\int_0^T \left(\|u(\tau)\|_{(s)}^2 + \|\partial_t u(\tau)\|^2\right) d\tau\right)^{1/2}$, где $L^p(a,b;B)$- пространство измеримых p-суммируемых $(p \geq 1)$ функций на (a,b) со значениями в банаховом пространстве B. При p=2 в гильбертовом пространстве $L^2\left(0,T;L^2(0,2\pi)\right)$ скалярное произведение и норма имеют вид

$$\langle u,v\rangle_Q = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle dt, \quad \|u\|_Q = \langle u,u\rangle_Q^2, \quad Q = (0,2\pi)\times(0,T).$$

Теорема 1. ([8]) *Пусть выполнены условия*

$$F(z) \in C^1(R),\ \sup_{z\in R}\left(|F(z)| + |F'(z)|\right) \leq M_0,\ M_0 > 0, \tag{6}$$

$$u_0 \in H_A^1. \tag{7}$$

Тогда для произвольного измеримого по Лебегу преобразования $G(x)$ *задача* (1)-(3) *имеет единственное обобщенное решение* $u = u(x,t) \in H_A^{1+\gamma,1}$ *при фиксированном* $\gamma \in (0,1/2)$, причем *справедлива оценка* $\|u(\cdot;G)\|_{(1+\gamma,1)} \leq C_{1,\gamma}\left(1 + \|u_0\|_{(1)}\right)$.

Если преобразования G_1, G_2 *удовлетворяют условию* (4), *то решение липшиц-непрерывно зависит от преобразования* $\max_{t\in[0,T]} \|u(t;G_1) - u(t;G_2)\| \leq C_2\|G_1 - G_2\|_{L^1(0,2\pi)}$, *где константы* $C_{1,\gamma}$, C_2 *не зависят от* G, G_1, G_2.

Отметим, что обобщенное решение удовлетворяет уравнению (1) в смысле пространства H_A^{-1} для п.в. $t \in (0,T)$. Это позволяет применить к (1) пробную функцию $\int_t^T \varphi(x,t)dt$, $\varphi \in L^2\left(0,T;H_A^1\right)$, и после интегрирования по частям получить тождество

$$\int_0^T \langle u(t), \varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \left\langle u(t), \int_t^T \varphi(\theta)d\theta\right\rangle_{(1)} dt = \int_0^T \langle u_0, \varphi(\theta)\rangle d\theta + \int_0^T \left\langle F(u(t)), \int_t^T \varphi(G,\theta)d\theta\right\rangle dt. \tag{8}$$

3. Проекционно-разностная схема аппроксимации начально-краевой задачи.

Введем сетку $\omega_h = \{x_n = nh,\ n = 0,1,\dots,N\}$ на $[0,2\pi]$ с шагом $h = 2\pi/N$, $N > 0$, N – четное число, $\omega_\tau = \{t_m = m\tau,\ m = 0,1,\dots,M\}$ - сетка на $[0,T]$ с шагом $\tau = T/M$. Определим пространство периодических кусочно-линейных функций на $[0,2\pi]$ в виде линейной оболочки $S_A = Lin\left\{\varphi_n^{(1)}(x)\right\}_{n=1}^{N} \subset H_A^1$ сплайнов первого порядка

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \varphi_0^{(1)}(x - nh),\ n = 1,\dots,N-1, \quad \varphi_N^{(1)}(x) = \varphi_0^{(1)}(x) + \varphi_0^{(1)}(x - 2\pi),$$

где $\varphi_0^{(1)}(x) = \max(0, 1 - |x|/h)$. Каждой функции $y(x) = \sum_{n=1}^{N} y_n \varphi_n^{(1)}(x) \in S_A$ соответствует сеточная функция $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T \in R^N$, обозначаемая тем же символом y. Обозначим через Λ сеточный оператор, действующий по правилу $(\Lambda y)_n = -h^{-2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})$, $n = 1,2,\dots,N$, где положено $y_{N+1} \equiv y_1$, $y_N \equiv y_0$. Оператор Λ имеет собственные значения $\lambda_k(\Lambda) = 4h^{-2}\sin^2(kh/2)$ и собственные функции $e_k(x)$, ортонормированные относительно сеточного скалярного произведения $\langle f, g\rangle_h = \sum_{k=1}^{N} f_k g_k^* h$. Норма $\|y\|_{\infty,h} = \max_{n=1,2,\dots,N} |y_n|$ является сеточным аналогом нормы $C[0,2\pi]$. Пространство $S \subset L^2\left(0,T; H_A^1\right)$ кусочно-постоянных по t и принимающих значения из S_A функций определим так:

$$S = \{y = y(x,t) : y(x,t) = y^m(x) \in S_A,\ t \in (t_{m-1}, t_m],\ m = 1,2,\dots,M,\ y(x,0) = y^0(x) \in S_A\}.$$

Приближенным решением задачи (1)-(4) назовем функцию $v = v(x,t) \in S$, которая при любом $\varphi \in S$ удовлетворяет тождеству

$$D(v,\varphi) = \int_0^T \left\langle v^0, \varphi(t)\right\rangle dt + \int_0^T \langle F(v(t)), I_t(\varphi(G_h))\rangle dt. \qquad (9)$$

Здесь $D(v,\varphi) \equiv \int_0^T \langle v(t), \varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle v(t), I_t(\varphi)\rangle_{(1)} dt, \quad \varphi(G_h)(x,t) = \varphi(G_h(x),t)$,

G_h - некоторая аппроксимация для G, $\left\langle v^0, \varphi\right\rangle = \langle u_0, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in S_A$,

$I_t(\varphi)$ - кусочно-постоянное восполнение интеграла $I_t(\varphi) = \int_{t_{m-1}}^{T} \varphi(\theta) d\theta$

при $t \in (t_{m-1}, t_m]$, $m = 1,2,\dots,M$.

П.р.с. (9) эквивалентна задаче нахождения функции $v \in S$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\left\langle \tau^{-1}\left(v^m - v^{m-1}\right), \varphi \right\rangle + \left\langle v^m, \varphi \right\rangle_{(1)} = \left\langle F(v^m), \varphi(G_h) \right\rangle, \quad \forall \varphi \in S_A \tag{10}$$

при $m = 1,2,\ldots,M$, а также начальному условию $v|_{t=0} = v^0(x)$.

Отметим, что предлагаемый в (10) проекционный по пространственной переменной метод аппроксимации уравнения (1) дает простой и естественный способ аппроксимации обобщенного преобразования аргумента в виде интеграла типа (4), определенного теперь уже на конечномерном подпространстве $S_A \subset C[0,2\pi]$. С вычислительной точки зрения п.р.с. (10) удобно записать в виде векторного уравнения

$$B\frac{v^m - v^{m-1}}{\tau} + Bv^m + D\Lambda v^m = \tilde{F}(v^m) \tag{11}$$

относительно сеточной функции $v^m = (v_1^m, v_2^m, \ldots, v_N^m)^T$. Здесь $B = E - h^2\Lambda/6$, E – единичная матрица, а правая часть в (11) задается нелинейным отображением $\tilde{F} : R^N \to R^N$, компоненты $\tilde{F}(v^m)_n$ которого вычисляются по формуле

$$\tilde{F}(v^m)_n = h^{-1}\left\langle F(v^m), \varphi_n^{(1)}(G_h) \right\rangle,$$

где v^m подразумевает элемент из S_A.

Схема (11) является неявной и нелинейной. Для нахождения v^m на очередном слое рассмотрим итерационную последовательность $v^{(s)}$, определяемую из линейного уравнения

$$B\frac{v^{(s)} - v^{m-1}}{\tau} + Bv^{(s)} + D\Lambda v^{(s)} = \tilde{F}(v^{(s-1)}), \qquad s = 1,2,\ldots, \qquad v^{(0)} = v^{m-1}. \tag{12}$$

Теорема 2. ([8]) *При всех достаточно малых* $\tau > 0$ *нелинейная п.р.с.* (11) *на каждом слое имеет единственное решение* v^m. *Итерационный процесс* (12) *сходится к* v^m *в равномерной сеточной норме* $\|\cdot\|_{\infty,h}$ *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем порядка* $\tau^{1/2}$.

4. Оценка скорости сходимости.

Введем аппроксимант $z \in S$ как ортогональную проекцию в $L^2\left(0,T;H_A^1\right)$ точного решения $u(t)$ задачи (1)-(4) на пространство S.

$$\int_0^T \left\langle z(t), \psi(t) \right\rangle_{(1)} dt = \int_0^T \left\langle u(t), \psi(t) \right\rangle_{(1)} dt, \qquad \forall \psi \in S. \tag{13}$$

Разность между точным решением $u(t)$ и решением п.р.с. $v(t)$ представим в виде

$$u - v = \eta - r, \qquad \eta = u - z, \qquad r = v - z.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

Лемма 1. *Пусть* $u \in H_A^{1+\gamma,1}$ *и функция* z *определяется в* (13). *Тогда имеет место оценка*

$$\|u-z\|_Q \le C_3(\tau + h^{1+\gamma})\|u\|_{(1+\gamma,1)}. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим кусочно-постоянное усреднение $[u]$, определяемое из равенства

$$[u](t) = \tau^{-1}\int_{t_{m-1}}^{t_m} u(t)dt, \qquad t \in (t_{m-1}, t_m], \qquad m = 1,2,\dots,M.$$

Тогда (13) можно переписать в виде тождества

$$\langle z(t), \varphi\rangle_{(1)} = \langle [u](t), \varphi\rangle_{(1)}, \qquad \forall \varphi \in S_A, \qquad t \in (0,T].$$

Отсюда, используя аппроксимационные свойства сплайнов в пространствах H^1 и H^2 и применяя интерполяцию оператора погрешности ([11], §1.2), получаем

$$\|z(t)-[u](t)\|_{(1)} \le \inf_{\omega \in S_A}\|[u](t)-\omega\|_{(1)} \le C_4 h^{\gamma}\|[u](t)\|_{(1+\gamma)}. \tag{15}$$

С помощью леммы Обэна-Нитше ([12], с.139) аналогично доказательству леммы 2 из [13] выводится оценка $\|z(t)-[u](t)\| \le C_5 h\|z(t)-[u](t)\|_{(1)}$. Отсюда и из (15) имеем

$$\|z(t)-[u](t)\| \le C_6 h^{1+\gamma}\|[u](t)\|_{(1+\gamma)},$$

откуда нетрудно вывести оценку

$$\|z-[u]\|_Q \le C_6 h^{1+\gamma}\|u\|_{(1+\gamma,1)}. \tag{16}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости неравенства $\|u-[u]\|_Q \le \tau\|\partial_t u\|_Q$, которое совместно с (16) дает (14). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть измеримые по Лебегу преобразования* G, G_h *удовлетворяют* (4), а также *выполнены условия* (6) *и* (7).

Тогда для всех достаточно малых шагов $\tau > 0$ *справедлива оценка*

$$\|v-z\|_Q \le C_7\left(\|u-z\|_Q + \|(u)'-u\|_Q + \|G_h - G\|^{1/2}_{L^1(0,2\pi)}\right), \tag{17}$$

где $(u)'(t) = u(t_m)$ при $t \in (t_{m-1}, t_m]$, $m = 1,2,\dots,M$.

Доказательство. Применяя к (1) пробную функцию $I_t(\varphi) \in L^2(0,T;H_A^1)$, $\varphi \in S$, получаем соотношение, аналогичное (8):

$$\int_0^T \langle (u)'(t),\varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle u(t), I_t(\varphi)\rangle_{(1)} dt = \int_0^T \langle u_0,\varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle F(u(t)), I_t(\varphi(G))\rangle dt. \quad (18)$$

На основе (18), (13) и (9) подобно [13], где рассматривались п.р.с. для линейных параболических уравнений, выводится тождество для разности $r = v - z$:

$$D(r,\varphi) = \int_0^T \langle (u)'(t) - z(t),\varphi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle F(v) - F(u), I_t(\varphi(G))\rangle dt +$$

$$+ \int_0^T \langle F(v), I_t(\varphi(G_h) - \varphi(G))\rangle dt, \quad \forall \varphi \in S. \quad (19)$$

Возьмем в (19) пробную функцию $\varphi(t) = r(t)\chi_{l,m}(t)$, где $\chi_{l,m}(t)$ - характеристическая функция отрезка $[t_l, t_m]$. Выполняя преобразования аналогично [13], получаем

$$\int_{t_l}^{t_m} \left(\| r(t) \|^2 + \frac{\tau}{2} \| r(t) \|_{(1)}^2 \right) dt + \frac{1}{2} \left\| \int_{t_l}^{t_m} r(t)\,dt \right\|_{(1)}^2 =$$

$$= -\left\langle \int_0^{t_l} r(t)\,dt, \int_{t_l}^{t_m} r(t)\,dt \right\rangle_{(1)} + \int_{t_l}^{t_m} \langle (u)'(t) - z(t), r(t)\rangle dt +$$

$$+ \int_0^{t_m} \langle F(v) - F(u), I_t(r(G)\chi_{l,m})\rangle dt + \int_0^{t_m} \langle F(v(t)), I_t((r(G_h) - r(G))\chi_{l,m}\rangle dt =$$

$$= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad (20)$$

Оценим каждое слагаемое в (20). Применяя ε-неравенство Коши, имеем

$$R_1 \le 4 \left\| \int_0^{t_l} r(t)\,dt \right\|_{(1)}^2 + \frac{1}{16} \left\| \int_{t_l}^{t_m} r(t)\,dt \right\|_{(1)}^2 \le 4 \| r \|_{*,0,l}^2 + \frac{1}{16} \| r \|_{*,l,m}^2,$$

где использовано обозначение нормы

$$\| r \|_{*,p,m}^2 = \int_{t_p}^{t_m} \| r(\theta) \|^2 d\theta + \max_{p+1 \le k \le m} \left\| \int_{t_p}^{t_k} r(\theta)\,d\theta \right\|_{(1)}^2.$$

Аналогично,

$$R_2 = \int_{t_l}^{t_m} \langle ((u)'(t) - u(t)) + (u(t) - z(t)), r(t)\rangle dt \le 8\left(\| (u)' - u \|^2 + | u - z |_Q^2 \right) + \frac{1}{16} \| r \|_{*,l,m}^2.$$

Для оценки слагаемого R_3 представим его в виде суммы $R_3 = R_{3,1} + R_{3,2}$ двух интегралов по отрезкам $[0,t_l]$ и $[t_l,t_m]$ соответственно и обозначим для краткости $f = F(v) - F(u)$.

$$R_{3,1} = \int_0^{t_l} \langle f(t), I_t(r(G)) \rangle dt = \left\langle \int_0^{t_l} f(t)\,dt, \int_{t_l}^{t_m} r(G,\theta)\,d\theta \right\rangle \le$$

$$\le C_8 \left(\int_0^{t_l} \| v(t) - u(t) \|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left\| \int_{t_l}^{t_m} r(\theta)\,d\theta \right\| \le C_9 \| u - z \|_Q^2 + C_{10} \| r \|_{*,0,l}^2 + \frac{1}{16} \| r \|_{*,l,m}^2 . \qquad (21)$$

При выводе (21) использовались равенство $I_t(r(G)\chi_{l,m}) = \int_{t_l}^{t_m} r(G,\theta)\,d\theta$ при $t \in (0,t_l]$ и оценка

$$\left| \int_{t_l}^{t_m} r(G(x),\theta)\,d\theta \right| \le \max_{y \in [0,2\pi]} \left| \int_{t_l}^{t_m} r(y,\theta)\,d\theta \right| \le C_{11} \left\| \int_{t_l}^{t_m} r(\theta)\,d\theta \right\|_{(1)},$$

которая следует из вложения $H^1 \subset C[0,2\pi]$ (см., например. [9]), а также оценка (5).

Поскольку $I_t(r(G)\chi_{l,m}) = \int_{t_{k-1}}^{t_m} r(G,\theta)\,d\theta$ при $t_l \le t_{k-1} < t \le t_k \le t_m$, то

$$R_{3,2} = \int_{t_l}^{t_m} \langle f(t), I_t(r(G)\chi_{l,m}) \rangle dt = \sum_{k=l+1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\langle f(t), \int_{t_{k-1}}^{t_m} r(G,\theta)\,d\theta \right\rangle dt =$$

$$= \sum_{k=l+1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\langle f(t), \int_{t_l}^{t_m} r(G,\theta)\,d\theta \right\rangle dt - \sum_{k=l+1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\langle f(t), \int_{t_l}^{t_{k-1}} r(G,\theta)\,d\theta \right\rangle dt.$$

Пользуясь оценкой $\left\| \int_{t_l}^{t_s} r(\theta) d\theta \right\|_{(1)} \le \| r \|_{*,l,m}$ при $l+1 \le s \le m$ и проводя выкладки аналогично выводу (21), имеем

$$R_{3,2} \le C_{12} \sum_{k=l+1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| f(t) \| dt \cdot \| r \|_{*,l,m} \le C_{12} \sqrt{t_m - t_l} \left(\| u - z \| + \| r \|_{*,l,m} \right) \| r \|_{*,l,m} \le$$

$$\le C_{13} \| u - z \|^2 + C_{14} \sqrt{t_m - t_l} \| r \|_{*,l,m}^2 .$$

В результате имеем

$$R_3 \le C_{14} \| u - z \|^2 + C_{10} \| r \|_{*,0,l}^2 + C_{14} \sqrt{t_m - t_l} \| r \|_{*,l,m}^2 + \frac{1}{16} \| r \|_{*,l,m}^2 .$$

Обозначим $\rho(y)=\int\limits_{t_l}^{t_m} r(y,\theta)d\theta$. Тогда $\rho(G_h(x))-\rho(G(x))=\int\limits_{G(x)}^{G_h(x)}\frac{d\rho}{dy}(y)dy$ и, следовательно,

$$|\rho(G_h(x))-\rho(G(x))|\le\sqrt{|G_h(x)-G(x)|}\left(\int\limits_{G(x)}^{G_h(x)}\left|\frac{d\rho}{dy}(y)\right|^2 dy\right)^{1/2}\le\sqrt{|G_h(x)-G(x)|}\|r\|_{*,l,m} \quad (22)$$

Представим R_4 в виде суммы $R_4=R_{4,1}+R_{4,2}$ интегралов по отрезкам $[0,t_l]$ и $[t_l,t_m]$. С помощью (22) и (5) оцениваем $R_{4,1}$:

$$R_{4,1}=\int\limits_0^{t_l}\left\langle F(v(t)),I_t\big((r(G_h)-r(G))\chi_{l,m}\big)\right\rangle dt=\left\langle\int_0^{t_l}F(v(t))dt,\int_{t_l}^{t_m}\big(r(G_h,\theta)-r(G,\theta)\big)d\theta\right\rangle\le$$

$$\le C_{15}\left(\int\limits_0^{2\pi}|G_h(x)-G(x)|dx\right)^{1/2}\|r\|_{*,l,m}\le C_{16}\|G_h-G\|_{L^1(0,2\pi)}+\frac{1}{16}\|r\|^2_{*,l,m}.$$

Аналогично, $R_{4,2}\le C_{17}\|G_h-G\|_{L^1(0,2\pi)}+\frac{1}{16}\|r\|^2_{*,l,m}$. Поэтому

$$R_4\le C_{18}\|G_h-G\|_{L^1(0,2\pi)}+\frac{1}{8}\|r\|^2_{*,l,m}.$$

Подставляя полученные оценки в (20), группируя подобные слагаемые и пользуясь произволом в выборе m, переходим в левой части (20) к норме $\|r\|_{*,l,m}$. В результате имеем:

$$\|r\|^2_{*,l,m}\le C_{19}\|r\|^2_{*,0,l}+C_{20}\sqrt{t_m-t_l}\|r\|^2_{*,l,m}+C_{21}R, \quad (23)$$

где $R=\|u-z\|^2_Q+\|(u)'-u\|^2_Q+\|G_h-G\|_{L^1(0,2\pi)}$. Если число M, определяющее количество точек разбиения отрезка $[0,T]$, достаточно велико, то всегда найдется конечное подмножество индексов $0=m_0<m_1<\ldots<m_I=M$, что $C_{20}\sqrt{t_{m_i}-t_{m_{i-1}}}\le 1/2$, $i=1,2,\ldots,M$, причем I не зависит от M (см. подробнее в [13]). Тогда (23) можно переписать в виде

$$\|r\|^2_{*,m_{i-1},m_i}\le C_{22}\|r\|^2_{*,0,m_{i-1}}+C_{23}R, \qquad i=1,2,\ldots,I.$$

Пользуясь очевидной оценкой $\|r\|^2_{*,0,m_{i-1}} \le \sum_{j=1}^{i-1} \|r\|^2_{*,m_{j-1},m_j}$ и применяя дискретное неравенство Гронуолла (см., например, [14], гл. 1, §6) с учетом конечности числа I, получаем

$$\|r\|^2_{*,0,M} \le C_{24}R.$$

Отсюда и из неравенства $\|r\|_Q \le \|r\|_{*,0,M}$ следует (17). Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2, а также

$$\|G_h - G\|_{L^1(0,2\pi)} \le C_{25}h^{2(1+\gamma)}, \qquad (24)$$

где параметр γ *взят из теоремы 1,* $0 \le \gamma < 1/2$. *Тогда справедлива оценка скорости сходимости решения п.р.с.* (11) *к решению начально-краевой задачи* (1)-(5):

$$\|u - v\|_Q \le C_{26}\left(\tau + h^{1+\gamma}\right).$$

Доказательство теоремы 3 следует из лемм 1 и 2 и оценки $\|(u)' - u\|_Q \le \tau\|\partial_t u\|_Q$.

Замечание 1. Обсудим возможности выбора аппроксимирующего преобразования G_h из конечномерных пространств сплайнов. При $G \in H^{2(1+\gamma)}(0,2\pi)$ соответствующего (24) порядка аппроксимации можно добиться выбором G_h из пространств L или B-сплайнов (см., например, [10], [11]). Однако при этом возникают сложности при проверке включения $G_h(x) \in [0,2\pi]$, фигурирующего в лемме 2. Можно предложить более простой способ построения $G_h \in S_1 = Lin\left\{\varphi_0^{(1)}(x - nh)\right\}_{n=0}^{N}$ по формуле $G_h(x) = \sum_{n=0}^{N} G(x_n)\varphi_0^{(1)}(x - nh)$, позволяющий при $G \in H^2(0,2\pi)$ получить оценку $\|G_h - G\|_{L^1} \le C_{26}h^2\|G\|_{H^2(0,2\pi)}$ (см., например, [10], гл. 2, §2). При этом из включения $G(x) \in [0,2\pi]$ для п.в. $x \in [0,2\pi]$ нетрудно вывести аналогичное включение для G_h и воспользоваться теоремой 2 при $\gamma = 0$, что дает оценку скорости сходимости п.р.с. порядка $O(\tau + h)$. Отметим, что проблемам построения сплайн-аппроксимаций, которые удовлетворяют поточечным и интегральным ограничениям, посвящена работа [15].

Замечание 2. Результаты численного моделирования функционально-дифференциального уравнения (1) для произвольных (в том числе необратимых) преобразований, а также задач управления такими преобразованиями представлены в [16]. Интересно отметить, что важные для приложений локализованные решения удается получить именно при использовании необратимых преобразований пространственного аргумента.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, проект 98-01-00206.

Литература

1. Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., Larichev A.V., Zheleznykh N.I. Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // J. Opt. Soc. Amer. 1992. Vol. 9, No 1. P. 78-90.

2. Разгулин А.В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 1993. Т. 33, No 1. С. 69-80.

3. Razgulin A.V. Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics (Rajarshi Roy ed.). Proceedings SPIE. 1993. Vol. 2039, pp. 342-352.

4. Скубачевский А.Л. О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // Успехи математ. наук. 1996. Т. 51, вып. 1(307). С. 169-170.

5. Skubachevskii A.L. Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear analysis, theory, methods and applications. 1998. Vol. 32, No 2. P. 261-278.

6. Потапов М.М. Уравнение нелинейной оптики с преобразованиями пространственной независимой переменной в роли управляющих воздействий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, вычислит. матем. и киберн. 1997. No 3. С. 13-16.

7. Разгулин А.В. Об одном классе функционально-дифференциальных параболических уравнений нелинейной оптики // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, No 3. С. 400-407.

8. Разгулин А.В. Аппроксимация задачи управления преобразованием аргументов в нелинейном параболическом уравнении // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 2001.

9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

10. Марчук Г.П., Агошков В.П. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.

11. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974.

12. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

13. Злотник А.А. Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 1978. Т. 18, No 6. С. 1454-1465.

14. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

15. Потапов М.М. Об аппроксимации задач оптимизациии с гладкими допустимыми управлениями при наличии ограничений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, вычислит. матем. и киберн. 1983. No 4. С. 4-8.

16. Razgulin A.V. Localized and periodic patterns in nonlinear optical system with controlled transforms of spatial arguments // Nonlinear Optical Phenomena in Information Technologies. Proceedings SPIE. 1998. Vol. 3733, pp. 211-217.