

*А.В. Разгулин¹, Е.Ж. Кужамалиев², Н.Г. Ирошников³,
А.В. Ларичев⁴*

Вариационный метод восстановления волнового фронта по измерениям его локальных наклонов со стабилизатором дробного порядка гладкости*

Введение

Методы адаптивной оптики традиционно имеют широкое применение в лазерной технологии [1], медицинской физике [2-4] и конструировании телескопов [5]. Однако в последнее время подходы, применявшиеся ранее для измерения атмосферных турбулентных искажений (например, метод Шака-Гартмана [6]), начинают широко использоваться для исследования волнового фронта [7]. Принцип работы датчика волнового фронта Шака-Гартмана состоит в разбиении волнового фронта матрицей микролинз на локальные субапертуры, в пределах каждой из которых измеряется средний наклон волнового фронта. Различные технологии реализации этого подхода обсуждаются в работах [8-11]. С математической точки зрения задача сводится к восстановлению поверхности, задающей волновой фронт, по данным о ее локальных наклонах. Для приложений важно, чтобы методы восстановления учитывали возможную нерегулярность волнового фронта и устойчиво работали в условиях различных искажений и потери данных в некоторых точках. Решение данного комплекса задач является весьма актуальным, что привлекает внимание исследователей [11-16].

В настоящей работе предложено семейство новых методов реконструкции волнового фронта. В их основе лежит вариационный подход в сочетании с методом конечных элементов, который, по мнению авторов, наилучшим образом подходит для случая восстановления волнового фронта, не обладающего высокой гладкостью и не обязательно непрерывного. Для улучшения пространственно-частотной характеристики (ПЧХ) метода и ее выравнивания на высоких частотах в схему добавляется стабилизирующее

¹ Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В.Ломоносова

² "КАР Technology" LLP

³ Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

⁴ Физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 15-29-03896 офи_м.

слагаемое с разностными производными высокого порядка в дробной степени, параметры которого выбираются также на основе вариационного подхода. Получены пространственно-частотные передаточные функции метода, с помощью численного моделирования изучена точность восстановления при различных пространственных спектрах искажений волнового фронта.

Разработанный вариационный метод реконструкции волнового фронта и его модификации прямых аналогов не имеют. В сравнении с широко используемым методом Симпсона [13] наш метод позволяет достичь лучший профиль ПЧХ в области высоких частот, обеспечивая тем самым возможность восстановления мелкомасштабных деталей волнового фронта, а по сравнению с семейством кумулятивных методов [14] в практическом применении не приводит к накоплению погрешности.

1. Базовый вариационный метод (БВМ)

Задача восстановления волнового фронта $u(x, y)$ по его наклонам $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ вдоль соответствующих направлений x и y , измеренным в пределах двумерной области Ω , может быть сформулирована в виде задачи минимизации целевого функционала $J(u)$:

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left((u_x - g_1)^2 + (u_y - g_2)^2 + \alpha u^2 \right) dx dy. \quad (1)$$

Функционал $J(u)$ задает среднеквадратичную невязку между наблюдаемыми наклонами волнового фронта и соответствующими производными волнового фронта $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ искомого волнового фронта. Слагаемое с множителем $\alpha > 0$ обеспечивает наименьшую среднеквадратичную норму волнового фронта, устранив тем самым неоднозначность его восстановления.

Важным моментом в постановке оптимизационной задачи является выбор допустимого класса функций $u(x, y)$, среди которых ищется минимум функционала невязки. С одной стороны, выбор допустимого класса функций диктуется желанием учесть возможно более широкий диапазон волновых поверхностей, возникающих в приложениях и не обязательно являющихся непрерывными. С другой стороны, у допустимых функций должны быть некоторым естественным образом определены производные по соответствующим направлениям, по которым происходит измерение наклона волнового фронта в эксперименте. По мнению авторов разумный компромисс достигается при использовании пространства Соболева $H^1(\Omega)$ [17], состоящего из измеримых по Лебегу функций, которые имеют

обобщенные частные производные по x и y первого порядка, принадлежащие вместе с самой функцией пространству Лебега $L_2(\Omega)$, и, следовательно, эти наклоны можно локально проинтегрировать, моделируя работу датчика Шака-Гартмана. Заметим, что для непрерывно-дифференцируемых функций их обычные и обобщенные производные совпадают, т.е. имеют тот же физический смысл. Однако пространство Соболева $H^1(\Omega)$ существенно шире и, в частности, в двумерном случае содержит разрывные функции. Далее будем рассматривать случай квадратной апертуры $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и, также как и в работах [15, 16], в качестве множества допустимых функций возьмем пространство $H_{2\pi}^1$, состоящее из 2π -периодических по каждому направлению функций из $H^1(\Omega)$.

Необходимое условие минимума функционала невязки на $H_{2\pi}^1$ получается из равенства нулю его первой вариации и приводит к интегральному тождеству

$$\langle u_x, \varphi_x \rangle + \langle u_y, \varphi_y \rangle + \alpha \langle u, \varphi \rangle = \langle g_1, \varphi_x \rangle + \langle g_2, \varphi_y \rangle \quad \forall \varphi \in H_{2\pi}^1, \quad (2)$$

которому должен удовлетворять искомый волновой фронт $u(x, y) \in H_{2\pi}^1$. Здесь и ниже угловые скобки используются для обозначения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Для построения конечномерной аппроксимации (2) на основе метода конечных элементов воспользуемся подпространствами $S_{2\pi}^1 \subset H_{2\pi}^1$ размерности $N \times N$ кусочно-линейных по каждому направлению сплайнов, являющихся линейными комбинациями функций $\varphi_{kl}(x, y) = \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(y)$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$, причем $\varphi_k(t) = \max(0, 1 - |t - kh| \cdot h^{-1})$, $k = 1, \dots, N-1$, $\varphi_0(t) = \varphi_1(t+h) + \varphi_1(t+h-2\pi)$, $h = 2\pi N^{-1}$. В численных расчетах использовалось значение $N = 128$. Представляя далее искомый волновой фронт в виде конечной суммы $u(x, y) = \sum_{k,l=1}^{N-1} u_{kl} \varphi_{kl}(x, y)$ и ограничиваясь в (2) пробными функциями из подпространства $S_{2\pi}^1$, приходим аналогично [16] к уравнению для матрицы коэффициентов $u = \{u_{kn}\}$

$$B_2 \Lambda_1 u + B_1 \Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u = F, \quad (3)$$

где $F = F^1 + F^2$,

$$F_{kl}^1 = \frac{1}{h^3} \int_{y_{l-1}}^{y_{l+1}} \varphi_n(y) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g_1(x, y) - g_1(x+h, y)) dx dy,$$

$$F_{kl}^2 = \frac{1}{h^3} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi_k(x) \int_{y_{l-1}}^{y_l} (g_2(x, y) - g_2(x, y+h)) dx dy.$$

Матрицы B_j , Λ_j задаются с помощью матриц Грама [18] в $L_2(\Omega)$ рассматриваемых сплайнов и их градиентов, $B_j = E_j - \frac{h^2}{6} \Lambda_j$ (см. детали в

[16]), E_j - единичная матрица соответствующей размерности, $j = 1, 2$. Сеточная функция $\exp\{ikx\}$ (соответственно, $\exp\{ily\}$) является собственной как для оператора A_1 (соответственно, A_2) с собственными значениями $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{kh}{2})$ ($\lambda_l = \frac{4}{h^2} \sin^2(\frac{lh}{2})$), так и для оператора B_1 (B_2) с собственными значениями $\mu_k = 1 - \frac{h^2}{6} \lambda_k$ ($\mu_l = 1 - \frac{h^2}{6} \lambda_l$), $k, l = 0, 1, \dots, N - 1$. Эти свойства позволяют эффективно реализовать решение уравнения (3) методом быстрого дискретного преобразования Фурье (БДПФ).

Для численной реализации вариационного метода используется его упрощенный вариант, когда значения наклонов известны только в узлах (x_k, y_l) расчетной сетки, а значения остальных точек задаются с помощью кусочно-линейных интерполянтов $g_m(x, y) = \sum_{k,l=0}^{N-1} g_m(x_k, y_l) \varphi_{kl}(x, y)$, $m = 1, 2$. Тогда схема (3) принимает вид

$$B_2 A_1 u + B_1 A_2 u + \alpha B_1 B_2 u = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2, \quad (4)$$

где матрицы $G_{1,2}$ имеют простую структуру.

Проведенный в [16] анализ базового метода показал хорошую точность реконструкции волнового фронта в широком диапазоне пространственных частот. Используемый в методе кусочно-линейный способ восполнения данных позволил одновременно естественным образом решить проблему потери данных при обработке реального эксперимента. К достоинству вариационного метода следует отнести возможность его применения в случае зашумленных измерений наклонов, поскольку эти данные усредняются по ячейкам схемы, снижая тем самым влияние шума. Также метод хорошо показал себя при восстановлении фронта с различными неоднородностями фазы, моделируемыми случайным сигналом, пропущенным через фильтр Баттерворта [19]. Поскольку вариационный метод является прямым (итерации не используются), то он является более устойчивым к погрешностям вычислений, а выбор кусочно-линейных сплайнов, приводящий к специальным трехдиагональным матрицам, допускает эффективную реализацию с использованием БДПФ.

Проведенное в [16] сравнение базового метода и реконструктора Симпсона [13] показало, что реконструктор Симпсона, использующий более точный девятиточечный шаблон "крест", показывает лучший порядок аппроксимации на гладких волновых фронтах. За счет проведения дополнительных итераций реконструктор Симпсон позволяет добиться более однородного распределения пространственно-частотной характеристики на низких и средних частотах, однако допускает более существенный спад на высоких частотах.

В следующем разделе данной работе предлагаются и исследуются

различные модификации вариационного метода, которые позволяют избавиться от отмеченных недостатков БВМ, сохраняя при этом характерную для него нацеленность на негладкие волновые фронты с различными неоднородностями и устойчивость к искажениям.

2. Модифицированный вариационный метод (МВМ)

Рассмотрим семейство модифицированных вариационных методов, отличающихся от базового метода (3) наличием дополнительного слагаемого, нацеленного на выравнивание частотной характеристики в области средних частот.

$$B_2 \Lambda_1 u + B_1 \Lambda_2 u + \alpha B_1 B_2 u + \gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s u = F, \quad (5)$$

где аналогично (4) можно положить $F = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2$.

Получим ПЧХ схемы (5). Для этого рассмотрим в качестве искомого волнового фронта гармонику $e_{kl}(x, y) = \exp\{i(kx + ly)\}$, имеющую наклоны $g_1 = ik \cdot e_{kl}$, $g_2 = il \cdot e_{kl}$. Тогда восстанавливаемый схемой (5) волновой фронт имеет вид $u(x, y) = h_{kl} \cdot e_{kl}(x, y)$. Мультипликатор h_{kl} характеризует относительную амплитуду восстановленной гармоники $e_{kl}(x, y)$ и находится из формулы

$$h_{kl} = \frac{12s_k^2 s_l^2 (\omega_k^{-2} + \omega_l^{-2})}{s_k^2 (2 + c_l) + s_l^2 (2 + c_k) + \frac{\alpha h^2}{12} (2 + c_k)(2 + c_l) + 3\gamma \left(\frac{h}{2}\right)^{2-4s} \cdot s_k^{2s} s_l^{2s}},$$

где $c_k = \cos \omega_k$, $s_k = \sin(0.5\omega_k)$, $\omega_k = kh$. Если же, например, $k \neq 0$, $l = 0$, то

$$h_{kl} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \alpha \mu_k} = \frac{s_k^2}{s_k^2 + \frac{\alpha h^2}{12} (2 + c_k)}.$$

Далее матрица $H_{\gamma s} = \{h_{kl}(\gamma, s)\}$ называется ПЧХ метода восстановления волнового фронта. В частности, при $\gamma = 0$ получаем формулу для ПЧХ H_{0s} базового метода, полученную ранее в нашей работе [16].

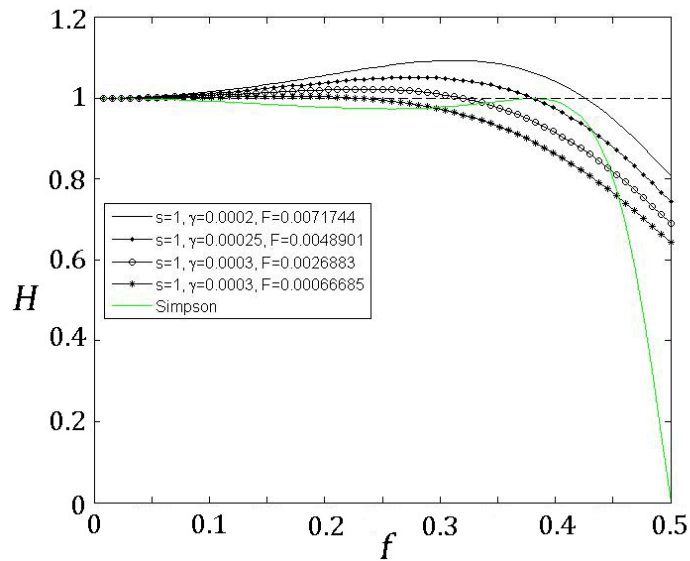


Рис. 1. Графики диагональных сечений ПЧХ МВМ при различных $\gamma, s = 1$.

Нас будет интересовать возможность выбора параметров метода (γ, s) таким образом, чтобы обеспечить близость ПЧХ к единице. Исследуем сначала влияние параметра γ на ПЧХ при фиксированном втором параметре, который для определенности зафиксируем $s = 1$, что задает стабилизатор целого порядка гладкости. На рис. 1 изображена ПЧХ $H_{\gamma 1}$ при различных $\gamma, f \in (-0.5, 0.5]$, где $f = \omega/2\pi$ суть нормированная частотная координата. Нетрудно видеть, что ПЧХ $H_{\gamma 1}$ имеет одинаковую качественную структуру при различных γ , а ее среднее отклонение от единицы не сильно меняется. Дополнительные возможности оптимизации кривой ПЧХ появляются в общем случае метода (5) при согласованном изменении входящих в слагаемое $\gamma(\Lambda_1 \Lambda_2)^s$ параметров, и, в частности, при рассмотрении дробных порядков $s \in (0, 1)$. Далее мы будем рассматривать диагональное сечение ПЧХ в виде графика зависящей от двух параметров метода γ, s функции $H_{\gamma s}(f)$ частоты $f \in [0, 0.5]$.

3. Оптимизация параметров МВМ

Для оптимизации параметров МВМ рассмотрим целевой функционал, характеризующий среднеквадратичное отклонение ПЧХ $H_{\gamma s}(f)$ от единицы

$$F(\gamma, s) = \int_0^{0.5} (H_{\gamma s}(f) - 1)^2 df. \quad (6)$$

На рис. 2 представлен эскиз рассчитанных линий уровня функционала $F(\gamma, s)$ в прямоугольнике $[0.001, 0.03] \times [0.4, 1]$. Видно, что имеется

характерная кривая, на которой расположены локальные минимумы функционала и на которой значение функционала существенно меньше его значения при $s = 1$.

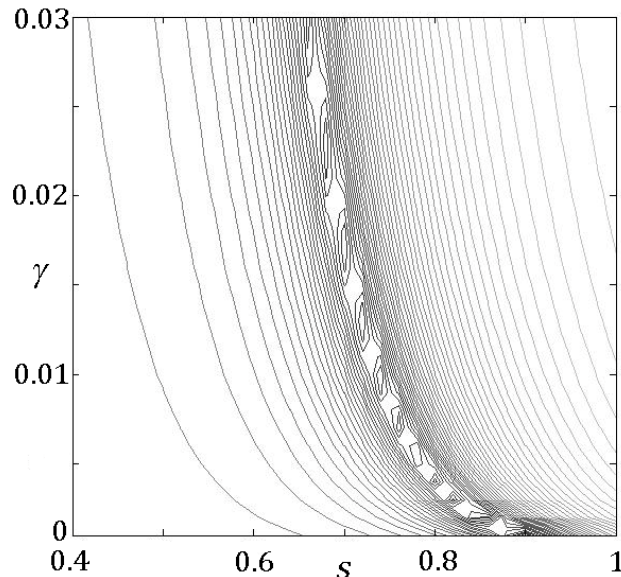


Рис. 2. Линии уровня функционала $F(\gamma, s)$.

На рис. 3 изображены графики диагональных сечений ПЧХ для различных пар параметров (γ, s) , на которых достигаются локальные минимумы функционала. Видно, что благодаря оптимизации дополнительного параметра s удается изменить кривизну кривой с тем расчетом, чтобы небольшое отклонение в области низких частот привело к существенному улучшению выпрямлению графика сечения ПЧХ в среднеквадратичном смысле.

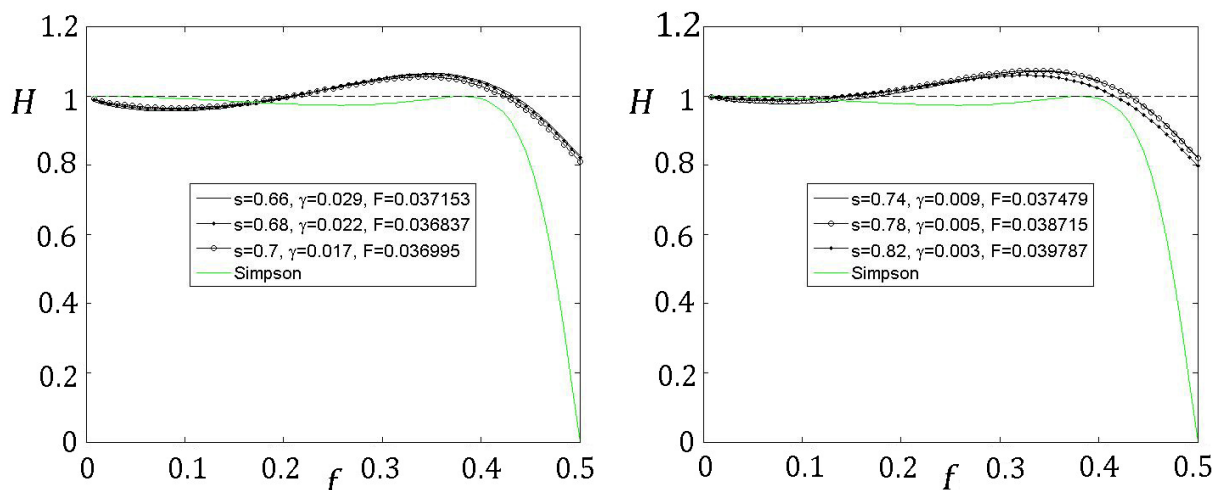


Рис. 3. Графики ПЧХ в точках локальных минимумов функционала $F(\gamma, s)$.

Для экспериментальной проверки качества восстановления волнового

фронта с помощью МВМ (5) в качестве тестовой поверхности использовался полином Цернике, описывающий сферическую aberrацию 4-го порядка (см. рис. 4).

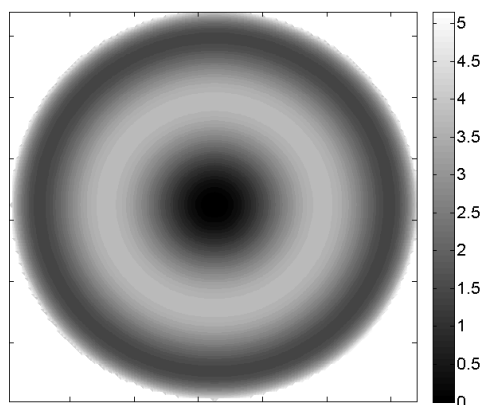


Рис. 4. Тестовая поверхность, описываемая полиномом Цернике 4-го порядка.

На рис. 5 приводятся сравнительные результаты восстановления БВМ и МВМ. Видно, что погрешность восстановления увеличилась. Это связано с влиянием дополнительного регуляризатора на низких частотах (центральная часть рисунка). Далее будут рассмотрены несколько методов компенсации данного эффекта.

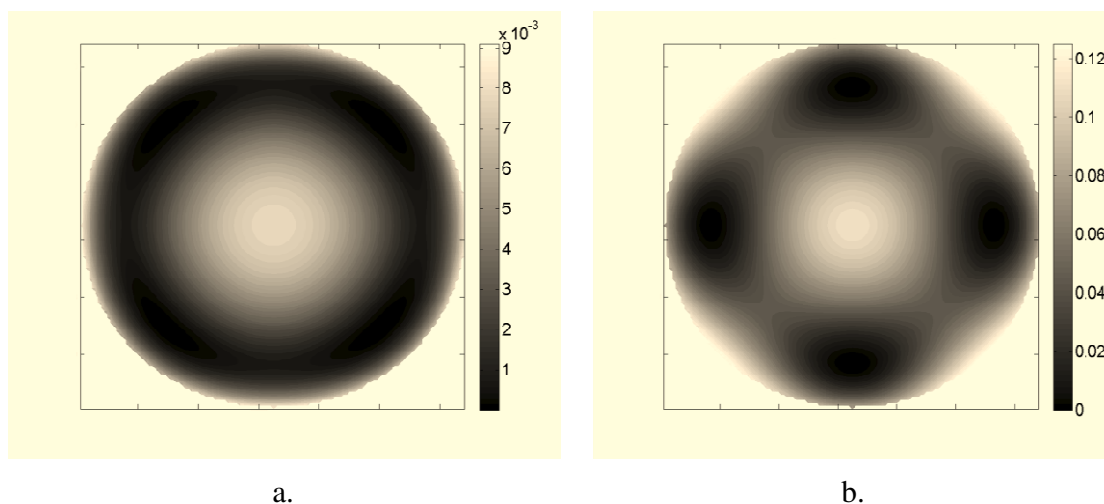


Рис. 5. Погрешности восстановления БВМ (а) и МВМ (b) полинома Цернике.

4. Выбор частотного диапазона для МВМ

Для выравнивания ПЧХ на низких и средних частотах, оказывающих наибольший вклад в восстанавливаемое решение, рассмотрим функционал с

переменным верхним пределом ν

$$F(\gamma, s) = \int_0^{\nu} (H_{\gamma s}(f) - 1)^2 df \quad (7)$$

На рис. 6 представлены сечения ПЧХ для значений $\nu = 0.35$ и $\nu = 0.4$, полученных на нескольких локальных минимумах функционала (7). Анализ рисунка показывает, что при выборе параметров метода из условия оптимальности функционала $F(\gamma, s)$ уменьшение частотного диапазона (7) позволяет на соответствующем отрезке выровнять графики ПЧХ, сохраняя при этом преимущество перед методом Симпсона в области высоких частот $f \in [0.4, 0.5]$, не входящих в оптимизируемый диапазон.

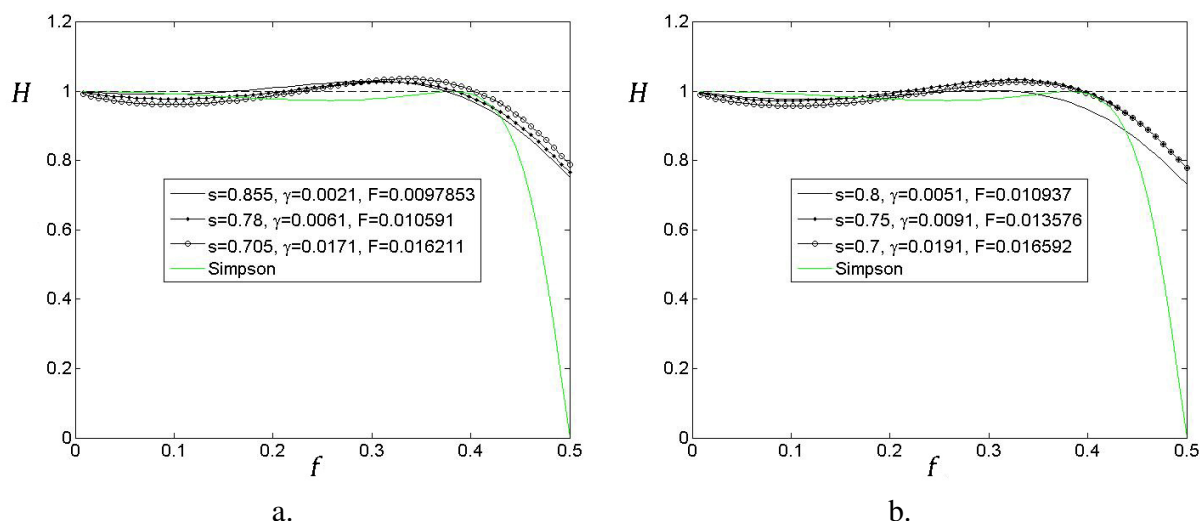


Рис. 6. Сечения ПЧХ при $\nu = 0.35$ (a) и $\nu = 0.4$ (b).

На рис. 7 представлены примеры восстановления тестовой поверхности, задаваемой полиномом Цернике, с некоторыми параметрами s, γ из предыдущих графиков. Как видно на графиках, уменьшение верхней границы в функционале до значения $\nu = 0.35$ позволило улучшить точность восстановления. Таким образом, уменьшение частотного диапазона дает возможность получить ПЧХ метода, сопоставимую с методом Симпсона в интервале частот $f \in [0, 0.4]$, с существенным преимуществом в области высоких частот $f \in [0.4, 0.5]$.

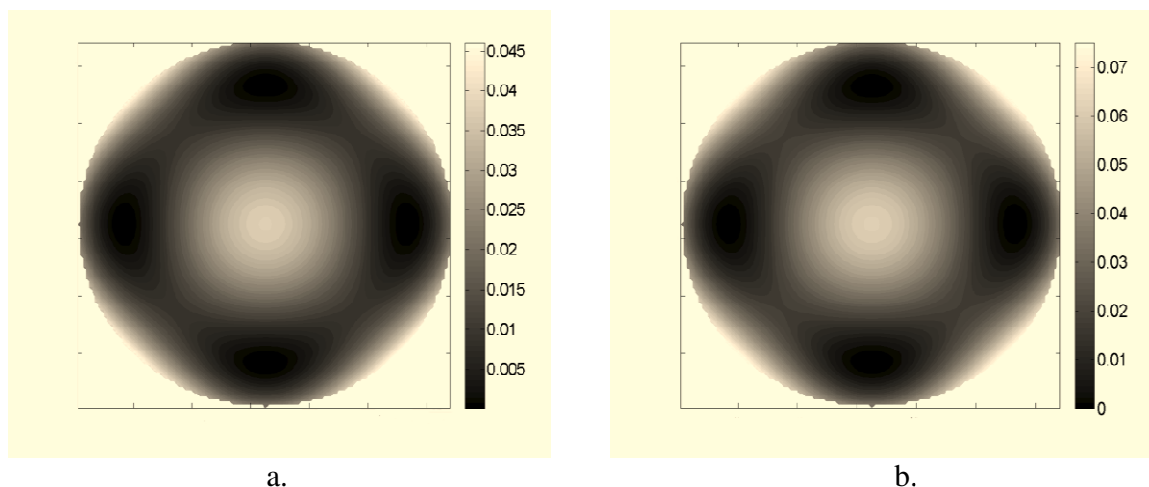


Рис. 7. Погрешность восстановления МВМ при $\nu = 0.35$ (а), $\nu = 0.4$ (б).

5. Локализация выбора параметров МВМ в частотной области

Как отмечалось выше, БВМ хорошо восстанавливает низкочастотные составляющие искомой поверхности, давая всплеск на высоких частотах. МВМ при подходящем подборе параметров позволяет выровнять ПЧХ на высоких частотах, однако при этом происходит частичное ухудшение восстановления на низких частотах. Необходимый компромисс, при котором будет наблюдаться одинаково хорошее восстановление поверхности на всех частотах может быть достигнуто за счет локализации параметров метода в зависимости от частотного диапазона. Заметим, что идея локализации в выборе параметра регуляризации при решении некорректных задач развивалась в работах [20-22] и др.

В рассматриваемой задаче на основе результатов проведенных вычислительных экспериментов дается сравнение трех вариантов априорных частотных диапазонов для выбора параметров вариационного метода:

1. $\Phi_1 = [0, 0.25], \Phi_2 = [0.25, 0.5]$.
2. $\Phi_1 = [0, 0.17], \Phi_2 = [0.17, 0.5]$.
3. $\Phi_1 = [0, 0.17], \Phi_2 = [0.17, 0.34]$.

Здесь Φ_1 - частотный диапазон, на котором будет использоваться восстановление по базовому вариационному методу (3), Φ_2 - диапазон, на котором будут находиться оптимальные по функционалу параметры γ, s для метода (5). В третьем варианте в качестве диапазона оптимизации Φ_2 была выбрана область средних частот, поскольку высокие частоты имеют меньшее влияние на точность восстановления.

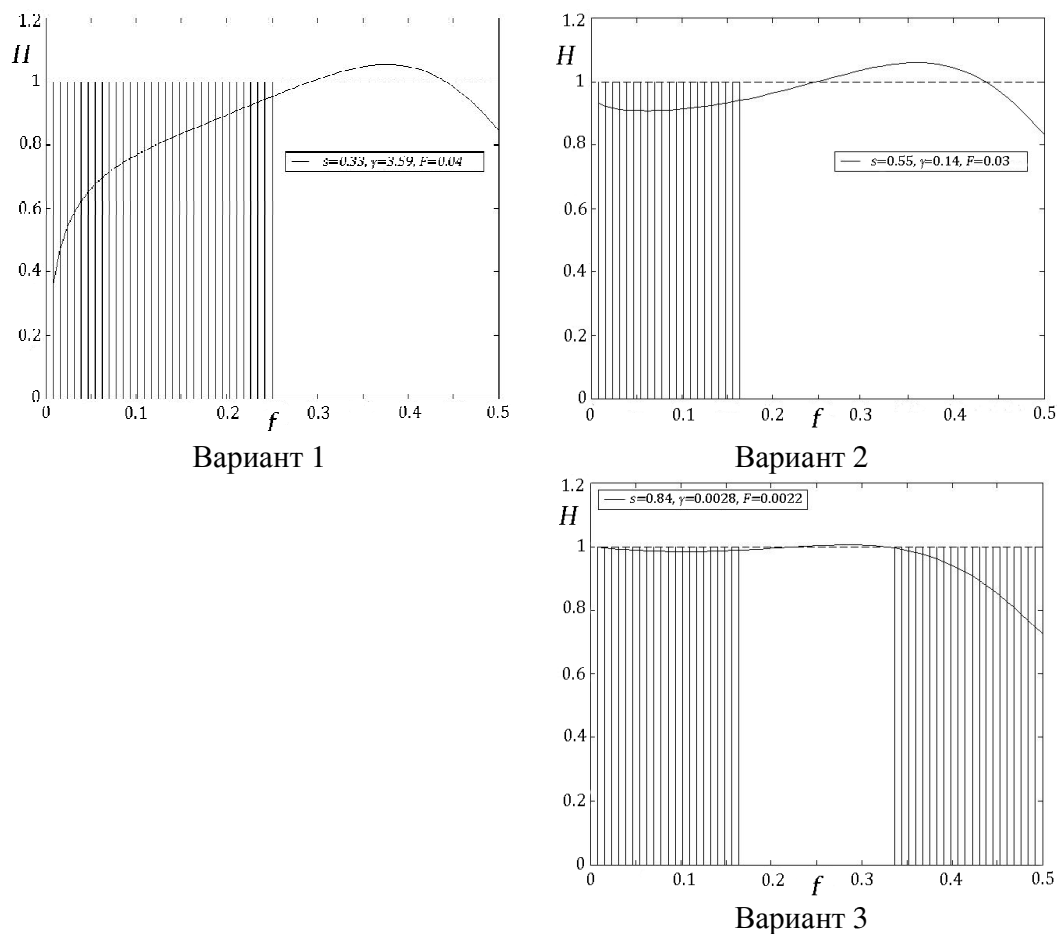


Рис. 8. Сечения ПЧХ для трех вариантов выбора диапазонов.

На рис. 8 изображены частотные характеристики для каждого из вариантов. Значения параметров, также, как и ранее, находились при помощи оптимизации функционала. Для каждого из случаев диапазон частот для функционала выбирался в соответствии с Φ_2 (на рисунках - незаштрихованные области). Результаты восстановления поверхности, задаваемой полиномом Цернике, приведены на рис. 9. Видно, что при первом варианте точность восстановления увеличилась незначительно по сравнению с нелокальным подходом. Во втором варианте наблюдается существенное улучшение качества восстановления. Это связано с тем, что в диапазон оптимизации Φ_2 были добавлены более низкие частоты, вследствие чего отклонение частотной характеристики на этих частотах уменьшилось. В третьем варианте была достигнута наилучшая точность, по сравнению с двумя другими. Это связано с тем, что из области оптимизации была исключена часть высоких частот $(0.34, 0.5]$, при этом, как видно на рисунке, отклонение ПЧХ на оставшейся части незначительно.

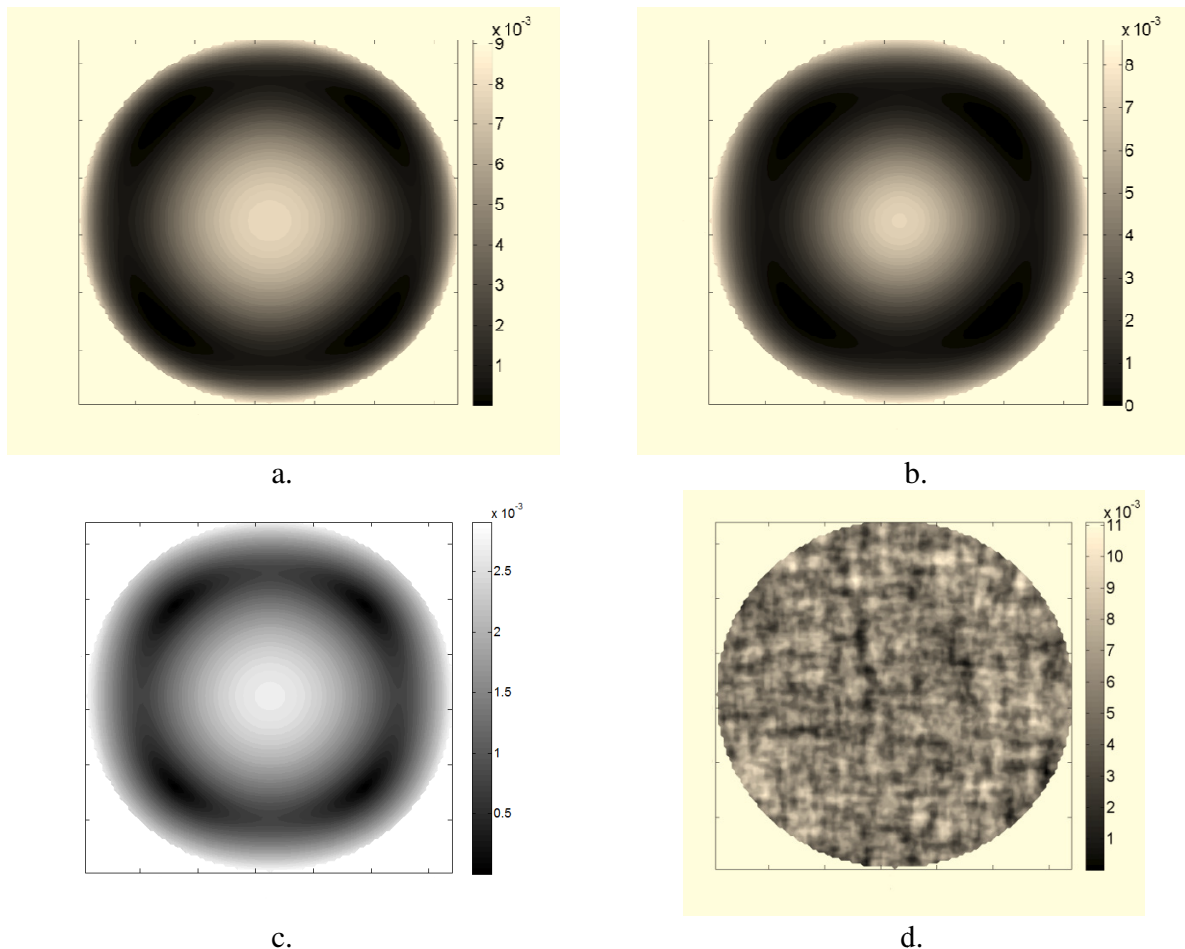


Рис. 9. Погрешность БВМ (а) и вариантов 1 (b), 2(с), 3(d) локализованного МВМ.

6. Двухшаговый вариационный метод (ДВМ)

Поскольку абсолютная погрешность восстанавливаемого изображения зависит от его модуля и, как показано в предыдущих разделах на основе анализа ПЧХ, основной вклад в погрешность дают низкие частоты, то для уменьшения абсолютной погрешности восстановления следует сначала "хорошо" восстановить низкочастотную часть изображения. После вычитания низкочастотной части оставшаяся поправка будет содержать высокочастотные составляющие малой амплитуды, которые могут быть восстановлены с помощью МВМ. Таким образом, для нахождения искомого профиля волнового фронта $u(x, y)$ предлагается искать его в виде суммы $u(x, y) = w(x, y) + v(x, y)$, где $v(x, y)$ - сигнал с малыми значениями амплитуд на низких частотах, $w(x, y)$ - некоторый сигнал. Линейность модели позволяет в взять качестве $w(x, y)$ сигнал с наиболее близкими к

$u(x, y)$ значениями амплитуд на низких частотах. Проведенное выше исследование частотной характеристики показало, что с помощью базового вариационного метода можно получить наиболее точное восстановление значений искомой функции на низких частотах. Поэтому в качестве $w(x, y)$ можно выбрать функцию, являющуюся решением задачи (4). Таким образом, используя полученную функцию $w(x, y)$, приходим к новой постановке задачи нахождения невязки $v(x, y)$, которая удовлетворяет следующей проекционной схеме:

$$\begin{aligned} B_2 \Lambda_1 v + B_1 \Lambda_2 v + \alpha B_1 B_2 v + \gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s v \\ = B_2 G_1 g_1 + B_1 G_2 g_2 - B_2 \Lambda_1 w - B_1 \Lambda_2 w. \end{aligned}$$

Таким образом мы получаем задачу нахождения $v(x, y)$, для которой на низких частотах имеются малые значения амплитуд, и поэтому эффективно применить МВМ с регуляризатором $\gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s$.

Для тестирования исходный волновой фронт формировался двумя способами: полиномом Цернике (см. рис. 4) и случайным сигналом, пропущенным через фильтр Баттерворта [19] с заданными значениями порядка фильтра и частоты среза (см. рис. 10).

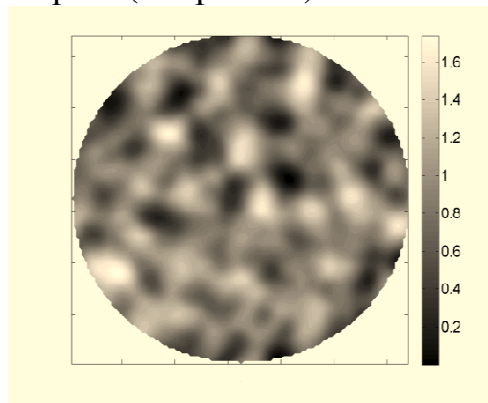


Рис. 10. Пример турбулентного волнового фронта, полученного на основе фильтра Баттерворта.

Ниже для сравнения приведены восстановления волнового фронта с помощью БВМ, МВМ (с регуляризатором $\gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s$) и ДВМ для случаев полинома Цернике (рис. 11) и турбулентного фронта (рис. 12). Значения параметров s, γ взяты из п. 4 для функционала (7) с уменьшенными диапазонами расчета оптимальных значений $f \in [0, 0.35]$ и $f \in [0, 0.4]$. Видно, что при использовании ДВМ для восстановления волнового фронта удается получить значительное улучшение точности восстановления как для регулярного волнового фронта, так и для турбулентного волнового фронта.

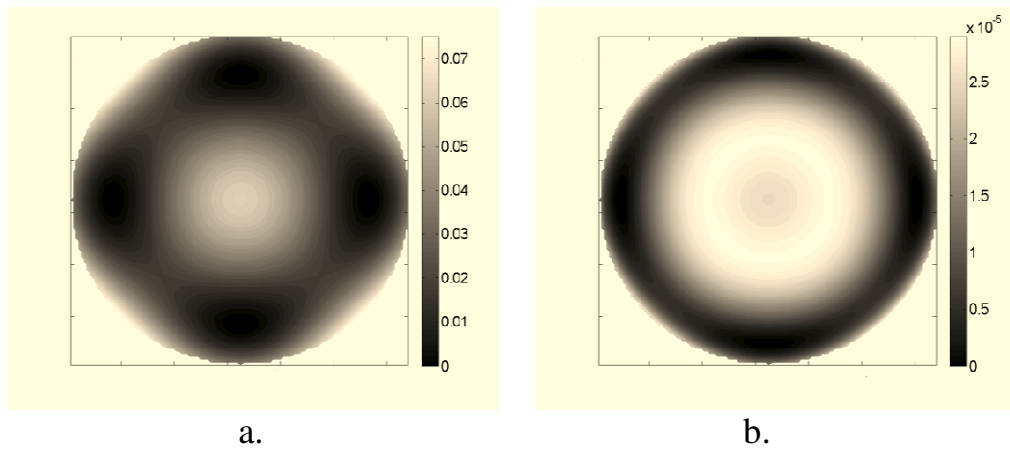


Рис. 11. Погрешности восстановления МВМ (а) и ДВМ (б) при $\nu = 0.35$ для полинома Цернике.

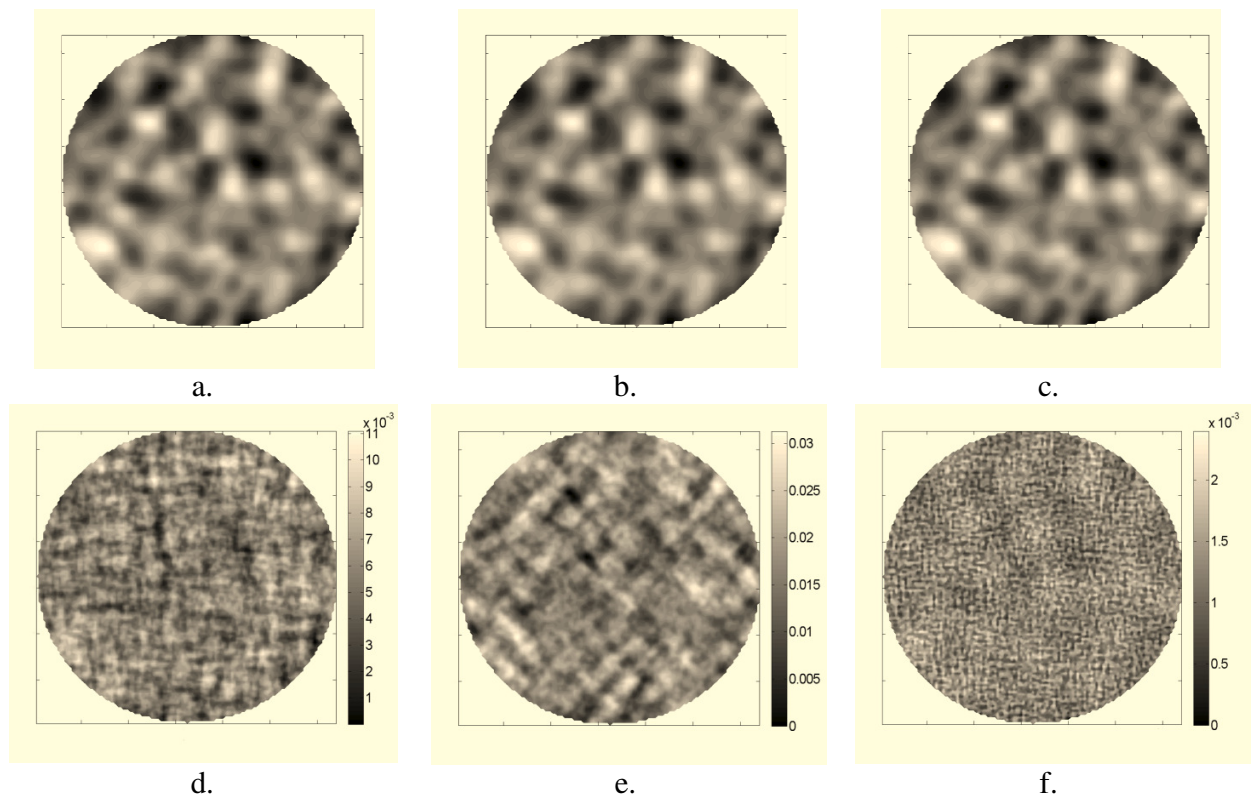


Рис. 12. Результаты восстановления (а,б,с) и погрешности (d,e,f) восстановления турбулентного волнового фронта БВМ, МВМ ($\nu = 0.35$) и ДВМ, соответственно.

7. Заключение

Для решения задачи восстановления волнового фронта на основе данных о его локальных наклонах разработано семейство вариационных методов со стабилизатором дробного порядка, нацеленное на максимально равномерное восстановление фронта на всем спектре частот. Методы не являются итерационными и эффективно реализуются на основе БДПФ. Аналитическое и численное исследование пространственно-частотной характеристики семейства и проведенные вычислительные эксперименты по восстановлению регулярных и турбулентных волновых фронтов выявили его преимущество перед широко используемым методом Симпсона.

Литература

1. Шанин О.И. Адаптивные оптические системы в импульсных мощных лазерных установках. М.: Техносфера, 2012. 200 с.
2. Porter J., Queener H., Lin J., Thorn K., Awwal A.A.S. Adaptive optics for vision science. Wiley-Interscience, 2006. 628 p.
3. Goncharov A.S., Iroshnikov N.G., Larichev A.V., Nikolaev I.P. The impact of speckle on the measurement of eye aberrations // Journal of Modern Optics. 2015. Vol. 62. № 21. P. 1775-1780.
4. Liang J., Grimm B., Goetz S., Bille J.F. Objective measurement of wave aberrations of the human eye the use of a Hartmann-Shack wavefront sensor // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. Vol. 11. № 7. P. 1949-1957.
5. Антошкин Л.В., Ботыгина Н.Н., Емалеев О.Н., Ковадло П.Г., Коняев П.А., Лукин В.П., Петров А.И., Янков А.П. Адаптивная оптическая система с корреляционным датчиком смещения изображения. // Оптика атмосферы и океана. 2002. Т. 15. № 11. С. 1027-1030.
6. Platt B.C., Shack R. History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing // J. Refract. Surg. 2001. Vol. 17. P. S573-S577.
7. Chernyshov A., Sterr U., Riehle F., Helmcke J., Pfund J. Calibration of a Shack-Hartmann sensor for absolute measurements of wavefronts // Appl. Opt. 2005. Vol. 44. № 30. P. 6419-6425.
8. van Dam M. A., Lane R. G. Wave-front slope estimation // J. Opt. Soc. Am. 2000. Vol. 17. № 7. P. 1319-1324.
9. Sallberg S.A., Welsh B.M., Roggemann M.C. Maximum a posteriori estimation of wave-front slopes using a Shack-Hartmann wave-front sensor // J. Opt. Soc. Am. 1997. Vol. 14. № 6. P. 1347-1354.
10. Carmon Y., Ribak E.N. Phase retrieval by demodulation of a Hartmann-Shack sensor // Opt. Comm. 2003. Vol. 215. № 4. P. 285-288.

11. *Talmi A., Ribak E.N.* Direct demodulation of Hartmann-Shack patterns // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2004. Vol. 21. № 4. P. 632-639.
12. *Southwell W.* Wave-front estimation from wave-front slope measurements // *J. Opt. Soc. Am.* 1980. Vol. 70. № 8. P. 998-1006.
13. *Bahk S.W.* Highly accurate wavefront reconstruction algorithms over broad spatial-frequency bandwidth // *Optics Express.* 2011. Vol. 19. № 20. P. 18997-19014.
14. *Zhariy M., Neubauer A., Rosensteiner M., Ramlau R.* Cumulative wavefront reconstructor for the Shack-Hartmann sensor // *Inverse Problems and Imaging.* 2011. Vol. 5. № 4. P. 893-913. doi:10.3934/ipi.2011.5.893.
15. *Kindermann S., Neubauer A., Ramlau R.* A singular value decomposition for the Shack–Hartmann based wavefront reconstruction // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2012. Vol. 236. Iss. 8. P. 2186-2199. doi: 10.1016/j.cam.2011.09.041.
16. *Razgulin A.V., Kuzhamaliyev Y.Z., Goncharov A.S., Larichev A.V.* A variational method for wavefront reconstruction from Shack–Hartman sensor measurements // *Atmospheric and Oceanic Optics.* 2017. Vol. 30. No. 4. P. 399-403. DOI: 10.1134/S1024856017040091.
17. *Adams R., Fournier J.* *Sobolev Spaces (2nd Edition).* Academic Press, 2003.
18. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
19. *Huelsman L. P., Allen P. E.* *Introduction to the Theory and Design of Active Filters.* McGraw-Hill, 1980.
20. *Арсенин В.Я., Криксин Ю.А., Тимонов А.А.* Метод локальной регуляризации линейных операторных уравнений I рода и его приложения // *ЖВМиМФ.* 1988. Т. 28. №6. С. 793-808.
21. *Сизиков В.С.* Анализ методов локальной регуляризации и формулировка методов субоптимальной фильтрации решения уравнений I рода // *ЖВМиМФ.* 1999. Т. 39. № 5. С. 718-733.
22. *Voskoboynikov Yu.E., Mukhina I.N.* Local regularizing algorithm for high-contrast image and signal restoration // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.* 2000. No 3. P. 41-48.