*Н. П. Савенкова, А. Ю. Мокин, В. П. Ильютко*

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ МГД СТАБИЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРОЛИЗНОЙ ВАННЫ ОТ ФОРМЫ ГАРНИСАЖА

**Введение**

Проблема МГД - стабильности электролиза алюминия является одной из важнейших для решения задачи увеличения выхода алюминия по току, поскольку возникновение волн на поверхности раздела расплавов приводит к их перемешиванию и потерям металла. При этом автоматизированное управление процессом позволяет предупредить волнообразование и не допустить обратного окисления алюминия.

Существуют разные методы исследования МГД - стабильности электролизной ванны. Одним из наиболее эффективных методов признан критерий Бояревича-Ромерио [1], в основе которого находится идея выбора пары ведущих мод для разложения функции, описывающей границу раздела сред металл-электролит. Однако выбор пары ведущих мод сделать однозначно, как правило, не удается. Поэтому актуальной представляется возможность увеличить МГД-стабильность ванны за счет выбора оптимальной формы рабочего пространства, тем более, что саму ФРП формируют заранее в процессе ввода ванны в эксплуатацию.

В настоящей работе исследуется зависимость разделенности (т.е. величины расстояния между соседними собственными значениями) спектра двумерной задачи на собственные значения от вида границы области решения задачи и обсуждаются возможности использования полученного результата к изучению влияния ФРП электролизной ванны на МГД - стабильность ванны с целью выбора оптимальной формы рабочего пространства ванны.

**О зависимости МГД - стабильности ванны от формы ФРП**

В качестве критерия для определения порога устойчивости электролизера в производственных АСУТП используется критерий Бояревича-Ромерио. Критическое МПР (см. [3]) по этому критерию для конкретной ванны может быть выражено через

$$h_{\text{мпр}} = A(l)\frac{I_{\mathbf{c}}^2}{(\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{э}})h_{\text{м}}},$$

где

$$A(l) = \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}'}\varepsilon_{\mathbf{k}}}{2L_xL_yI_0}\left[\frac{n^{'}m - nm^{'}}{L_xL_y}(I(m^{'}+m, n^{'}+n, l) - I(m^{'}-m, n^{'}-n, l)) + \right.$$

$$\left. + \frac{n^{'}m + nm^{'}}{L_xL_y}(I(m^{'}+m, n^{'}-n, l) - I(m^{'}-m, n^{'}+n, l))\right] *$$

$$* \left[g\pi^2\sqrt{\left(\frac{(m^{'})^2}{L_x^2} + \frac{(n^{'})^2}{L_y^2}\right)\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)}\left(\frac{(m^{'})^2 - m^2}{L_x^2} + \frac{(n^{'})^2 - n^2}{L_y^2}\right)\right],$$

где Фурье-компоненты вертикальной составляющей магнитного поля в зависимости от длины настыли $\Gamma$ обозначены через

$$I(m,n,l) = \frac{4}{L_xL_y}\int_{\Gamma} B_z(x,y,l)\sin\frac{\pi mx}{L_x}\sin\frac{\pi ny}{L_y}dxdy.$$

здесь $(m,n)$ и $(m^{'},n^{'})$ две ведущие пары мод.

На практике существует неопределенность в выборе ведущих пар мод. Применение высоко адекватного 3-D математического моделирования, учитывающего реальную геометрию ванны и взаимосвязь полей распределения скоростей в средах металл - электролит с электромагнитными полями и индуцированными токами во времени (см.[4], [5]), позволяет снять эту неопределенность для конкретной ванны с фиксированной ФРП. Однако подобные численные расчеты весьма трудоемки. В работах [4], [5], [6] исследовалось влияние формы рабочего пространства на МГД - стабильность ванны, численные эксперементы выявили существование зависимости МГД-стабильности от ФРП ванны.

Выделение пар ведущих мод в критерии Бояревича-Ромерио навело авторов статьи на мысль о возможности подбора оптимальных форм настыли и гарнисажа ванны, при которых работа ванны будет наиболее МГД-стабильна.

Пусть в критерии устойчивости Бояревича-Ромерио ведущим модам соответствуют собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ задачи Штурма-Лиувилля, которая выписана для динамического уравнения колебания границы раздела сред алюминий-электролит $h(x,t)$. Поскольку МГД нестабильность развивается на малых временах, то будем считать, что $0 < t < 1$.

Пусть

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2$$

и $f_1(x)$, $f_2(x)$ - соответствующие им собственные функции.

Обозначим через $\delta > 0$ величину

$$\delta = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Тогда для амплитуды границы раздела сред $h(x,t)$ выполняется

$$h(x,t) = C_1 f_1(x) e^{\lambda_1 t} + C_2 f_2(x) e^{\lambda_2 t} =$$

$$= e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}(C_1 f_1(x) e^{(\lambda_2-2\lambda_1)t} + C_2 f_2(x) e^{-\lambda_1 t}).$$

Поскольку

$$e^{-\delta t} = 1 - \delta t + o(t^2),\ e^{-\delta t} \approx 1 - \delta t,\ 0 < t < 1,$$

то в силу ограниченности собственных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ константами, можно считать, что

$$h(x,t) \approx e^{-\delta t}(C_1 f_1(x)(1 - (\lambda_2 - 2\lambda_1)t) + C_2 f_2(x)(1 - \lambda_1 t)) =$$

$$= e^{-\delta t}(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) - t(C_1 f_1(x)(\lambda_2 - 2\lambda_1) + C_2 f_2(x)\lambda_1)) \approx$$
$$\approx (M_1 + M_2 t) e^{-\delta t},$$

где $M_1$ и $M_2$ - константы, не зависящие от $(x,t)$. Следовательно, на малых временах $t$ функция $h(x,t)$ будет вести себя также, как и функция

$$g(\xi) = (C_1 + C_2 \xi) e^{-\delta \xi},\ 0 < \xi < 1,\ g(0) = g_0,$$

для которой характерен «всплеск» в окрестности нуля. При этом, чем больше величина $\delta$, тем ниже будет всплеск функции $h(x,t)$, т.е. слабее МГД - нестабильность ванны.

Поскольку номер ведущей моды неизвестен, то ясно, что для сохранения МГД - стабильности ванны необходимо выбрать ФРП такой, чтобы выполнялось соотношение

$$\delta = \delta^* = \max_{\{\Gamma\}} \min_{i \neq j} |\lambda_i - \lambda_j|,$$

где $\{\Gamma\}$ - множество всевозможных контуров границы рабочего пространства $G$.

Аналогичные рассуждения справедливы в случае, если $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — комплексные:

$$\delta^* = \max_{\{\Gamma\}} \min_{i \neq j} |Re(\lambda_i) - Re(\lambda_j)|.$$

Начнем изучение поставленного вопроса на примере модельной двумерной задачи.

**Дифференциальная постановка двумерной модельной задачи на собственные значения.**

Рассмотрим альтернативный подход исследования МГД стабильности взависимости от ФРП ванны, заключающийся в следующем. Пусть решается следующая задача на собственные значения для оператора Лапласа в области $G$ ( $G$ - соответствует сечению рабочего пространства на границе раздела сред алюминий-электролит ) с нулевыми граничными условиями первого рода на замкнутой границе $\Gamma = \partial G$ (см.[7], [9]):

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -\lambda u(x_1, x), \ (x_1, x_2) \in G; \qquad (1)$$

$$u(x_1, x_2) = 0, \ (x_1, x_2) \in \Gamma = \partial G.$$

Требуется найти минимум модуля разности двух различных собственных значений для выбранной области решения $G$. И далее найти максимум среди всех минимумов полученных результатов для различных областей $G$, имеющих постоянную площадь.

Рассмотрим разностную аппроксимацию задачи (1):

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -\bar{\lambda} y_{ij}, x_{ij} \in \Omega_h; \qquad (2)$$

$$y_{ij} = 0, \ x_{ij} \in \gamma_h.$$

Здесь $x_{ij}$ - узел расчетной сетки, соответствующей точке с координатами $(x_{1i}, x_{2j})$ области $G$ на плоскости $Ox_1x_2$. Считаем, что на границе области решение принимает нулевые значения. Внутри области решения $G$ данное уравнение имеет второй порядок аппроксимации (сетка равномерная с шагами $h_1$ и $h_2$ по направлению $x_1$ и $x_2$ соответственно). Вблизи границы области решения $G$ сетка неравномерная (см.[8]).

Обозначим через $\bar{\lambda}_i(G), \ i = 1, 2, \ldots, M$ - собственные значения задачи (2).

Введем величину:

$$\bar{R}_\lambda(G) = \min_{i \neq j} |Re(\bar{\lambda}_i) - Re(\bar{\lambda}_j)|, \ i, j = 1, 2, \ldots, M.$$

На рис. 1 представлены два семейства четырехугольных областей. В области $G_1$ стороны $AD$ и $CB$ параллельны, а стороны $AB$ и $CD$ одинаково выпуклы (вогнуты). В области $G_2$ все четыре стороны одинаково выпуклы (вогнуты).

Начало координат находится внутри областей $G_i$, $i = 1, 2$. Пусть $G_i$ задаются уравнением:

$$|x|^\alpha + |y|^\alpha = a^\alpha, \ a > 0 \qquad (3).$$

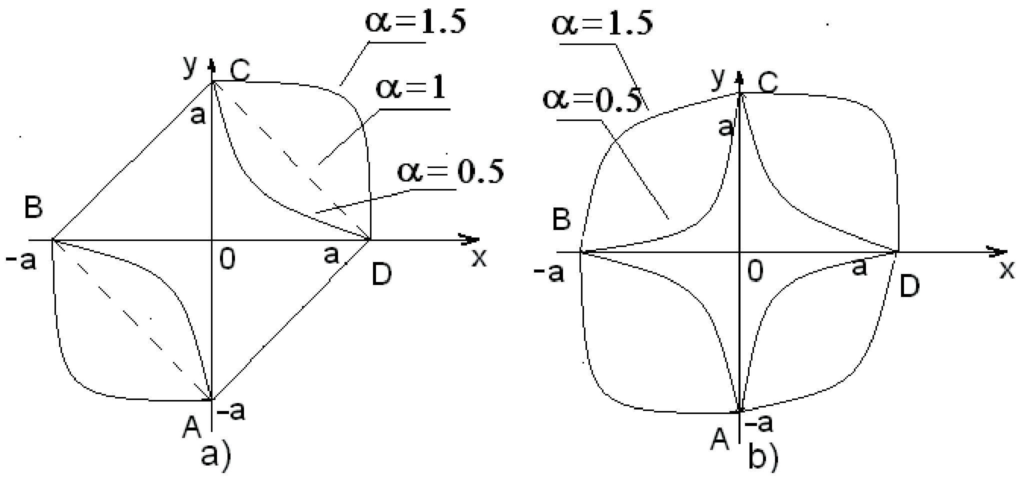


Рис. 1. Вид расчетной области (ФРП) $G$: a) — геометрия области $G_1$ для различных значений параметра $\alpha$; b) — геометрия области $G_2$ для различных значений параметра $\alpha$

Для области $G_1$ параметр $\alpha$ определим следующим образом: если точка $(x, y)$ принадлежит первой или третьей четвертям, то параметр $\alpha \neq 1$ и $\alpha = 1$ во второй и четвертой четвертях.

Таким образом, степень выпуклости (вогнутости) областей $G_i, i = 1, 2$ определяется величиной параметра $\alpha$.

Выделим следующие три случая для параметра выпуклости области $\alpha$:

1. $\alpha \in (0, 1)$ (соответствует семейству областей $G_i$, у которых стороны вогнуты во внутрь);

2. $\alpha \in (1, 3)$ (соответствует семейству областей $G_i$, у которых стороны выпуклы наружу);

3. $\alpha = 1$ (соответствует семейству прямоугольных областей).

**Замечание.** Значения параметра выпуклости области $\alpha$ близкое к нулю не вызывает интерес данного исследования.

Пусть

$$\alpha^*_{i,1} = arg \max_{\alpha \in (0,1)} \bar{R}_\lambda(G_i),$$

$$\alpha^*_{i,2} = arg \max_{\alpha \in (1,3)} \bar{R}_\lambda(G_i),$$

$$\alpha^*_{i,3} = arg \max_{\alpha = 1} \bar{R}_\lambda(G_i)$$

являются оптимальными значениями параметра $\alpha$ для каждого семейства областей $G_i$, $i = 1, 2$ и для каждого из трех случаев выпуклости по параметру $\alpha$. Тогда

$$\bar{R}_\lambda(G_i(\alpha^*_{i,1})) = \max_{\alpha \in (0,1)} \bar{R}_\lambda(G_i),$$

$$\bar{R}_\lambda(G_i(\alpha^*_{i,2})) = \max_{\alpha \in (1,3)} \bar{R}_\lambda(G_i),$$

$$\bar{R}_\lambda(G_i(\alpha^*_{i,3})) = \max_{\alpha=1} \bar{R}_\lambda(G_i)\,.$$

В таблице 1 представлены результаты численных расчетов оптимальных значений параметра выпуклости, которые найдены при помощи $QR$ - алгоритма (см. [10]).

**Таблица 1.** Оптимальные значения параметра выпуклости ($a = 1,\ h_1 = h_2 = 0.04.$)

| | $G_1$ | $G_2$ |
|---|---|---|
| $\alpha \in (0,1)$ | $\alpha^*_{1,1} = 0.5,\ \bar{R}_\lambda(G_1) \approx 2.5$ | $\alpha^*_{2,1} = 0.35,\ \bar{R}_\lambda(G_2) \approx 1.5$ |
| $\alpha \in (1,3)$ | $\alpha^*_{1,2} = 1.8,\ \bar{R}_\lambda(G_1) \approx 1.5$ | $\alpha^*_{2,2} \approx 2,\ \bar{R}_\lambda(G_2) \approx 0.5$ |

Численные эксперименты показали, что дальнейшее измельчение шага $h$ сетки в областях $G_i$ существенного изменения величины оптимального параметра не дает.

Из таблицы 1 видно, что в семействе областей $G_i$ существует оптимальное значение параметра выпуклости, соответствующее области $G_1$ ($\alpha^*_{1,1} = 0.5$), которому соответствует значение $\bar{R}_\lambda(G_1) \approx 2.5$. ФРП в данном случае имеет вид фигуры с двумя вогнутыми вовнутрь противоположными сторонами (см. рисунок 1а при $\alpha = 0.5$).

**Заключение.**

Проведенные исследования показали, что при изучение МГД-стабильности электролизной ванны представляется актуальным исследование разделенности спектра двумерной задачи на собственные значения в области с замкнутой границей, соответствующей плоскому сечению ванны. При этом задача на собственные значения возникает при решения кинематического уравнения для поверхности раздела сред алюминий-электролит $h(x, y, t)$.

На основе проведенных численных расчетов можно сделать вывод о том, что существует оптимальная форма рабочего пространства, соответствующая наиболее стабильному режиму работы ванны. Это хорошо согласуется с известными наблюдениями на производстве за МГД-стабильностью ванны, из которой следует,что наиболее стабильный режим работы соответствует форме рабочего пространства, при которой настыль подводится под проекцию крайних анодов на дно ванны. В нашем случае это означает, что существует оптимальное значение $\alpha$, определяющее выпуклость настыли (соотвтственно гарнисажа).

Авторы считают, аналогичные выводы можно сделать и в случае решения трехмерной задачи на собственные значения. Это основывается на выводах из исследований, которые обсуждаются в [6]. В [6] показано, что результаты исследования МГД-стабильности реальной электролизной ванны, полученные по двум различным математическим моделям, 2-ой и 3-ей, фактически совпадают. Первая математическая модель является двумерной, при этом моделирование проводилось в некоторых средних слоях каждой из сред отдельно (в среде электролита и в среде металла), которые на границе раздела связаны вязким трением. Вторая математическая модель является трехмерной двухфазной и соответствует реальной геометрии конкретной электролизной ванны. В [6] было показано, что вывод о существовании "средних слоев" в каждой из двух сред вполне обоснован и что результаты исследования МГД-стабильности ванны, полученные по двумерной модели, хорошо коррелируют с результатами, которые получены по трехмерной модели. Поэтому естественно предположить, что результаты о разделенности спектра трехмерной задачи на собственные значения будут аналогичны результатам о разделенности спектра, полученным в двумерной задаче на собственные значения. Таким образом исследование разделенности спектра трехмерной задачи на собственные значения позволит заранее определить оптимальную форму рабочего пространства, которая будет соответствовать наибольшей МГД-стабильности ванн.

## Литература


1. *V. V. Bojarevics, M. V. Romerio* Long waves instability of liquid metal-electrolyte interface in aluminium electrolysis cells: a generation of Sele's criterion // Eur. J. Mech. B/ Fluids, 1994 Vol.13, №1. P.33-56

2. *P. A. Davidson, R. J. Lindsay* // Stability of interfacial waves in aluminium reduction cells J. Fluid Mech/ 1998, vol.362. p.273-295

3. *И.Н. Коростелев, Т.В. Пискажова, О.Г. Проворова, В.В. Синельников* // Разработка методики использования критерия устойчивости Бояревича – Ромерио в алгоритмах АСУТП электролиза алюминия. Вестник Красноярского государственного Университета. Физико-математические науки. - ИЦ КрасГУ. – 2005. Вып 3. - С. 118-124.

4. *А. В. Алаторцев, Р. Н. Кузьмин, О. Г. Проворова, Н. П. Савенкова* // Динамическая модель магнитно-гидродинамического процесса в алюминиевом электролизере. Прикладная физика. 2004, №5, стр. 33-42

5. *Н. П. Савенкова, Р. Н. Кузьмин, О. Г. Проворова, А. В. Шобухов, С. В. Анпилов, С. А. Складчиков* // Двумерная и трехмерная математические модели электролиза алюминия // Динамика сложных систем. 2009, №2, стр.53-59

6. *Н. П. Савенкова, Р. Н. Кузьмин, О. Г. Проворова, С. В. Анпилов, Т. В. Пискажова* // Двумерная и трехмерная модель алюминиевого электролизера // Прикладная математика. 2011, №6, стр.25-33

7. *А. Н. Тихонов , А. А. Самарский* Уравнения математической физики. Изд. 6-е, испр. и доп. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 742 с.

8. *А. А. Самарский* Теория разностных схем. — 3-е изд. — М.: Наука, 1989.– 656 с.

9. *Л.Коллатц* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.:Наука, 1968. – 504 с.

10. *Дж. Х. Уилкинсон* Алгебраическая проблема собственных значений. – М.:Наука, 1970. – 564 с.